

**MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS**

Om och endast om

– hur bevis och bevisföring hanteras i två gymnasieläroböcker

Mattias Norström

Martin Sjökvist

Handledare: Heidi Krzywacki

Examinator: Katalin Földesi

och Tor Nilsson

MMA491 - Examensarbete i matematik för senarelärare

Vårterminen 2014

Sammanfattning

Det finns en problematik i övergången för svenska studenter mellan gymnasiet och högskolan. En faktor i den problematiken är att bevis och bevisföring hanteras på olika sätt på de olika utbildningsnivåerna. Dessutom är forskning kring hur läroböcker hanterar bevis och bevisföring begränsad. I denna studie undersöks två vanliga läroböcker på gymnasiet med avseende på bevis och bevisföring. Utifrån de i ämnesplanen befintliga ämnesområdena granskas teoriavsnitten i läroböckerna med fokus på bevis och bevisföring. Dessutom undersöks bevisföringsuppgifter med utgångspunkt i G. Stylianides (2009) ramverk. Resultaten visar att läroböckerna är inkonsekventa i sitt hanterande av bevis och att bevis ofta osynliggörs i teoriavsnitten. Ett annat resultat är att den matematiska strukturen är svår att följa. Läroböckerna innehåller 6,7 % respektive 13,7 % bevisföringsuppgifter och vi har funnit 19 olika typer av bevisföringsuppgifter varav två typer är väldigt dominerande. Vi argumenterar att didaktiskt värdefulla syften kan uppnås genom att synliggöra bevis bättre i läroböcker.

Nyckelord: bevis, bevisföring, resonemang, gymnasiematematik, läroböcker

Abstract

There exists a problem in Swedish students' transition between high school and college. One factor of this problem stems from the fact that proofs and proving are handled in different ways at these different levels of education. In addition, research on how textbooks deal with proofs and proving is limited. This study examines proofs and proving in two common math textbooks intended for upper secondary high school students in Sweden. Based on the contents of the curriculum, the theoretical sections in the textbooks are examined with an added focus on proofs and proving. Also, the textbooks' tasks are examined with the help of a modified framework based on G. Stylianides (2009) framework. The results show that the textbooks are inconsistent in their handling of proofs and that proofs are often made invisible in the theoretical sections. Another result is that the mathematical structure is difficult to follow. The textbooks contain 6.7% and 13.7% proving tasks respectively and we have found 19 different types of proving tasks among which two types are very dominant. We argue that didactically valuable objectives can be achieved by making proofs more visible in textbooks.

Keywords: proof, proving, reasoning, upper secondary school mathematics, textbooks

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
2. Syfte och frågeställning	2
3. Vad är bevis?	2
3.1. Bevis i matematiken	2
3.2. Bevis i lärande	5
3.3. Bevis i läroböcker	8
4. Metod	10
4.1. Urval.....	10
4.2. Analysramverk	11
4.2.1. Ramverk för analys av teoriavsnitt	11
4.2.2. Ramverk för analys av uppgifter	12
4.3. Dataanalys	15
4.4. Studiens tillförlitlighet	17
4.5. Etiska principer	17
5. Resultat	18
5.1. Bevishantering i läroböckernas teoriavsnitt	18
5.2. Bevisföringsuppgifter i läroböckerna.....	24
6. Slutsatser	29
6.1. Bevishantering i läroböckernas teoriavsnitt	29
6.2. Bevisföringsuppgifter i läroböckerna	30
7. Diskussion	31
Referenser	35

1. Inledning

Bevis och bevisföring är en viktig del av matematikens struktur. Vi upplever dock att bevis och bevisföring inte har samma framträdande roll inom skolmatematiken. Brandell, Hemmi och Thunberg (2008) problematiserar kring övergången som studenter gör mellan gymnasiet och högskolan. Ett av deras undersökningsområden behandlade studenters möte med bevis och bevisföring. I deras intervjuer med både matematiker och studenter framkom att det fanns ett upplevt problem. Studenter på högskolan önskade att de hade fått lära sig mer om bevis på gymnasiet. Nordström och Löfwall (2005) stärker detta och hävdar att bevis och bevisföringens roll inom matematiken har minskat i svenska skolor såväl som i andra länder under de senaste 20 åren. De skriver också att forskare har ägnat relativt lite tid åt att undersöka vilken roll läroböcker har, med avseende på bevis och bevisföring.

Efter skolreformen år 1994 infördes nya styrdokument i gymnasieskolan (*Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf94*). Palm, Bergqvist, Eriksson, Hellström och Häggström (2004) menar att detta förde med sig nya program mål, läroplaner, kursplaner och betygskriterier. För gymnasieskolan reviderades sedan kursplanerna år 2000. Den nya reformen innebar ett förändrat synsätt på styrdokument och de nationella proven. Styrdokumenten skulle vara mer decentraliserade. Varje enhet skulle göra egna lokala tolkningar utifrån de generellt skrivna styrdokumenten men tolkningarna var tvungna att vara tillräckligt specifika så att undervisningen kunde planeras på ett sätt som gav eleverna den bästa chansen att lyckas uppfylla målen. För att tackla detta utförde Palm et al. (2004) en analys av läroplan, program mål, kursplan och betygskriterier gällande för den svenska gymnasie matematiken. Deras analys resulterade i en tolkning som stod till grund för konstruktionen av de nationella proven i gymnasie matematik. Palm et al. skriver om sex olika matematiska kompetenser: problemlösningsskompetens, algoritmkompetens, begreppskompetens, modelleringskompetens, resonemangskompetens och kommunikationskompetens. Eftersom dessa kompetenser låg som grund för uppgiftsskapandet till de nationella proven i gymnasie matematik, var de viktiga att ha i åtanke redan då Lpf 94 var aktiv, men de fick dessutom en tydliggjord och viktigare roll i de senast införda styrdokumenten: *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*, [Gy 11].

I Gy 11 listas kompetenserna i ämnets syfte och resonemangskompetensen beskrivs på följande sätt: "Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att: följa, föra och bedöma matematiska resonemang." (Skolverket 2011, s. 90). I det centrala innehållet för Matematik 4 skrivs: "Olika bevismetoder inom matematiken med exempel från områdena aritmetik, algebra eller geometri." (Skolverket, 2011). I den äldre läroplanen Lpf 94 nämns inte ordet bevis över huvud taget. Detta pekar mot ett ökat fokus på resonemang, bevis och bevisföring i de nuvarande styrdokumenten.

Resonemang är ett vidare begrepp än bevis men vi kommer att i fortsättningen prata om enbart bevis och bevisföring för att underlätta för läsaren. Med begreppet bevis menas ett slags matematiskt resonemang och begreppet bevisföring är aktiviteten där bevis hanteras och utförs.

Vi har under vår utbildning fått en allt större förståelse för matematikens uppbyggnad och vi tycker att bevis och bevisföring är en viktig grundpelare. Vi

upplever också att gymnasieelever inte får tillräcklig kunskap kring denna grundpelare. Som vi redan skrivit har inte bevis varit framträdande i läroböcker och ämnesplaner tidigare, men med de nya ämnesplanerna bör bevis få en större betydelse. Vi tror även att övergångsproblematiken som Brandell et al. (2008) skriver om kan avhjälpas genom att gymnasieeleverna får större insikt kring matematisk bevisföring. Vi menar också att bevis kan vara ett viktigt verktyg för att elever ska nå en större förståelse för matematik. Eftersom ämnesplanen har fått ett ökat fokus på bevis jämfört med tidigare vill vi undersöka hur nya läroböcker, som reviderats utefter Gy 11, hanterar bevis och bevisföring. Vidare kan en studie kring läroböcker ge oss som blivande lärare en större inblick i hur några av de aktuella tillgängliga läroböckerna ser ut.

2. Syfte och frågeställning

Syftet med studien är att undersöka hur bevis och bevisföring hanteras och introduceras i två gymnasieläroböcker tillhörande kursen Matematik 4. Studien avgränsas till Matematik 4 eftersom det är först där som bevis och bevisföring får en framträdande roll i ämnesplanen. Studien behandlar läroböckernas specifika kapitel kring bevisföringsmetoder, de övriga teoriavsnitten samt läroböckernas uppgifter. För att uppnå syftet kommer följande frågor att besvaras:

1. Hur hanteras bevis i läroböckernas teoriavsnitt?
2. I vilken utsträckning återfinns bevisföringsuppgifter i läroböckerna och hur är de uppbyggda?

3. Vad är bevis?

I den här delen av studien skriver vi om hur bevis kan ses inom tre olika områden, i matematiken, i lärandet och i läroböcker. I den första delen beskrivs hur bevis kan definieras och att matematiker ofta har olika syn på vad bevis är. I den andra delen beskrivs viktiga aspekter av bevis i matematikundervisningen och även matematikdidaktisk forskning kring bevis. I den tredje och sista delen beskrivs olika studier kring bevis i läroböcker och vad deras resultat visar.

3.1. Bevis i matematiken

Bevis och bevisföring är en del av den matematiska uppbyggnaden. Som Hemmi (2009) betonar, kan man uppfatta ett bevis som något som verifierar att ett påstående är sant och att detta påstående kan användas vidare i matematiken. Precis som Hemmi skriver kan det tolkas som ett sätt att få ny matematisk kunskap accepterad. Även Rav (1999) hävdar att bevis kan leda väg för matematisk utveckling. Rav hävdar att bevis är hjärtat i matematiken och att det är via bevisföring som matematiker systematiserar kunskap och länkar ihop olika teorier, vilket i sin tur ger upphov till matematisk utveckling. Vidare menar Rav att matematiken i grund och botten handlar om att hitta metoder, verktyg, strategier och koncept för att lösa problem. Dessa konceptuella och praktiska upptäckter är tydligt bundna till bevis och bevisföring. I Hemmis (2006) avhandling anser matematiker hon talat med att bevis är en väsentlig del av matematiken. Vidare berättar matematiker om vilka funktioner bevis har i deras matematiska verksamhet. Sådana funktioner är till exempel att

förklara, verifiera, systematisera, att ge en estetisk upplevelse eller en intellektuell utmaning. Dessutom beskriver Hemmi (2006) en funktion som hon kallar transfer, vilket innebär att med hjälp av bevis lära sig ett specifikt matematiskt innehåll och utveckla olika tekniker som behövs för matematisk problemlösning, och påminner om det som Rav (1999) betonar om matematiken.

Begreppet matematiskt bevis är svårt att definiera och innehåller flera aspekter. Hemmi (2009) skriver att synen på vad ett giltigt bevis är varierar och att alla matematiker inte har samma definition. Definitionerna varierar från rigoröst formella till mer allmänna och vida. Enligt Roginskaya (u.å.) finns en allmänt accepterad formell definition given av Bourbaki (1968). Men Roginskaya (u.å.) menar att denna rigorösa definition är alltför omständlig att använda i praktiken. Istället för att alltid utgå från den rigorösa definitionen skapas mindre formella bevis som sedan kan omformuleras av en skicklig matematiker. Roginskaya beskriver det hela som:

”Till och med enkla bevis skrivna på den form som definitionen kräver skulle uppta många sidor och bli oläsbara. Därför presenterar man i praktiken inte hela bevis, utan lösare resonemang som kan kompletteras för att passa definitionen.” (s. 2).

Om Bourbakis definition är svår att använda i praktiken gäller det att hitta en lämpligare definition. I uppslagsverket *Encyclopaedia Britannica* (2014) förklaras ett logiskt bevis mer allmänt som:

”bevis, i logik, ett resonemang som etablerar sanningshalten av ett påstående. Även om bevis kan baseras på induktiv logik, så innefattar begreppet bevis allmänt sett en strikt deduktiv aktivitet. I formella axiomatiska system i logik och matematik, är bevis en ändlig sekvens av välformulerade påståenden (skapade enligt accepterade regler) där: (1) varje påstående antingen är ett axiom eller kan härledas från föregående påståenden genom giltiga slutsatser; och (2) det senaste påståendet är det som ska bevisas.” (*Encyclopaedia Britannica*, *proof*, vår översättning)

Ovanstående definition är allmän och passar inte i denna studies kontext. Ytterligare en definition ges av Velleman (2006) som skriver att ett matematiskt bevis kan beskrivas som ett logiskt resonemang av ordnade påståenden, där varje påstående stegvis kan motiveras med hjälp av axiom, tidigare bevisade påståenden, satser, och matematiska definitioner. Hans definition är enkel men ger inte den flexibilitet som denna studie söker. Men Vellemans definition ger däremot anledning att även definiera de viktiga begreppen: axiom, sats och matematisk definition. Studiens definitioner av dessa begrepp ges i slutet av denna del. För att återgå till definitionen av bevis skriver Hanna et al. (2012) att det finns en underliggande princip för bevis som alla matematiker accepterar: ”Att tydligt ange de antaganden man utgår från och sedan ge lämpliga argument som stöds av korrekta resonemang för att kunna dra slutsatser.” (s. 443). Detta är mer en allmän förklaring till begreppet bevis. Enkelheten i definitionen göms dock i de komplexa formuleringarna: ”tydligt ange”, ”lämpliga argument” och ”korrekta resonemang”.

Ytterligare en definition av bevis ges av A. Stylianides (2007) som skriver att bevis är ett matematiskt resonemang, en sammanhängande sekvens av antaganden för eller emot ett matematiskt påstående, som har följande egenskaper:

1. Påståendena som används (till exempel definitioner, axiom och teorem med mera) är accepterade av den aktuella gemenskapen som sanna och tillgängliga utan vidare motivering.
2. Resonemanget som förs är giltigt och bekant, eller inom rimlig gräns för det förståeliga, för den aktuella gemenskapen.
3. Resonemanget kommuniceras med representationsformer som är lämpliga och kända, eller inom rimlig gräns för det förståeliga, för den aktuella gemenskapen.

I A. Stylianides definition har ordet resonemang en central del vilket också kan kopplas till Palm et al (2004) som introducerar resonemangskompetens som en kompetens kring bevisföring. Precis som A. Stylianides (2007) och Palm et al. (2004) menar vill vi poängtera att bevisföring och resonemang inte enbart handlar om strikt och formell bevisföring, i alla fall inte enligt den definition denna studie vill använda. Exempelvis beskriver Palm et al. resonemangskompetensen så här:

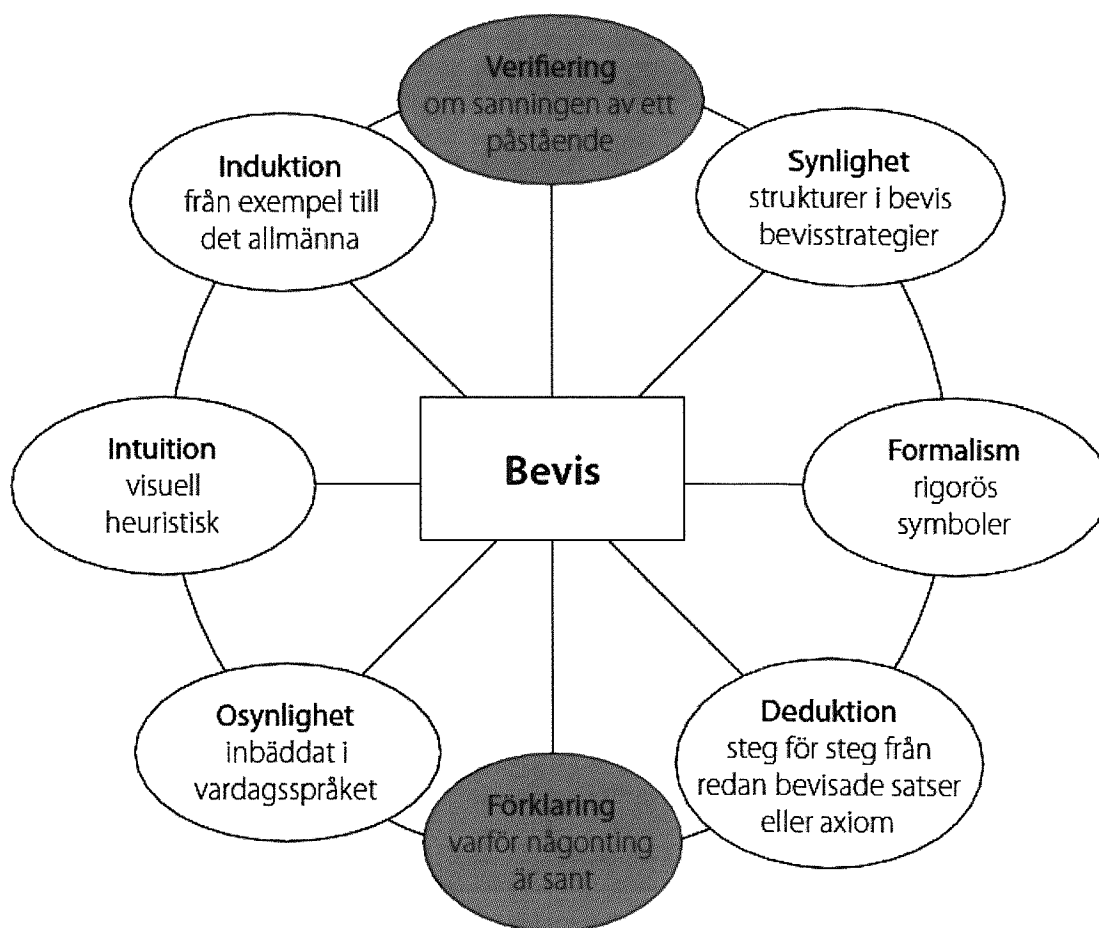
”Med *resonemang* avses här en argumentering som sker på allmänna logiska och speciella ämnesteoretiska grunder. Det inkluderar deduktiva resonemang där logiska slutledningar görs baserade på specifika antaganden och regler, där den striktaste formen av resonemang kan sägas vara bevis. Det inkluderar också induktiva resonemang där allmänna slutsatser nås fram till genom resonemang baserade på enskilda iakttagelser av mönster och regelbundenheter. Det innebär att det i *resonemangskompetensen* ingår en undersökande verksamhet av att hitta mönster, formulera, förbättra och undersöka hypoteser. Det inkluderar också olika former av kritisk granskning, som t ex värdering av bevis och andra former av matematiska argument. Resonemang ska kunna föras dels som en algoritmisk aktivitet med redan kända argument och bevis och dels som en problemlösande aktivitet i nya situationer.” (s. 25).

Resonemangskompetensen är framträdande i dagens ämnesplaner och enligt A. Stylianides (2007) definition av bevis kan många resonemang tolkas som bevis vilket är varför A. Stylianides definition passar bra i vår studie.

Sammanfattningsvis definieras bevis i denna studie enligt A. Stylianides (2007) definition ovan. Definitionen är utarbetad för att fungera på många olika nivåer, både för matematiker och för nybörjare inom matematiken. Definitionen fungerar bra inom skolväsendet eftersom den kan anpassas till olika nivåer även där. Istället för att ge en strikt och svåränvänd definition för bevis öppnar den upp för att olika matematiska resonemang kan användas på olika nivåer. Innan vi skriver vidare om bevis i lärande behöver begreppen axiom, sats och matematisk definition också definieras. Likt bevis, har även dessa ord olika definitioner. Här definieras hur vår studie använder dessa begrepp. Axiom definieras enligt Gärdenfors och Prawitz (u.å.) som: ”en grundsats som inte själv är föremål för bevis men som tjänar som utgångspunkt för bevis av andra satser”. Vidare definieras studien en sats eller ett teorem som ett matematiskt viktigt påstående som formellt bevisats och en matematisk definition är en exakt beskrivning av ett matematiskt begrepp. Definitionen måste vara entydigt formulerad.

3.2. Bevis i lärande

Det är uppenbart, inte minst från föregående del, att bevis är ett mångsidigt begrepp bland matematiker. Men bevis nyttjas inte endast av matematiker, utan även av elever som möter det i sitt lärande av matematik. Det blir då intressant att undersöka vilka aspekter av bevis som är viktiga för inläringen av bevis. Hemmi (2006) skriver om fyra aspekter av bevis som samspelar med varandra. Aspekterna har två komponenter vardera och paras samman på följande sätt: verifiering/förklaring, induktion/deduktion, intuition/formalism och osynlighet/synlighet. Dessa aspekter visas nu i en figur lånad från Hemmi (2009) (s. 98).



Figur 1. Aspekter av bevis som samspelar med varandra.

Detta är inte tänkt som någon definition av bevis, utan illustrerar istället de aspekter av bevis som är viktiga att tänka på i matematikundervisningen, och är aspekter som Hemmi (2006) använt i sin doktorsavhandling för att på ett begripligare sätt kunna strukturera sin data. I figuren syns att komponenterna verifiering och förklaring är särskilt markerade (grå bakgrund), vilket beror på att dessa är komponenter som beskriver olika funktioner som ett bevis kan uppfylla, medan de övriga komponenterna beskriver olika egenskaper som ett bevis har och hur bevis kan hanteras och utföras.

Verifiering och förklaring är två komponenter av bevis vars samspel har stor påverkan på upplevelsen av lärande menar Hemmi (2006). Verifiering av bevis ska leda till en övertygelse om att någonting inom matematiken är sant, medan förklaring istället ämnar förklara varför någonting är sant. Hemmi hävdar att verifiering av bevis kan vara viktigt för elever beroende på vad som menas med bevis och vad som menas med verifiering. Om vi menar att bevis uppkommer i all matematisk aktivitet och för att verifiera varje steg av processen, är verifiering genom bevis en central aspekt. Hon skriver vidare att det är vanligt att matematiklärare i Sverige bekymrar sig över att elever söker nå rätt svar utan att övertyga sig själva om deras resonemang var korrekt eller inte. Det finns tre distinkta sätt att bli övertygad på. Övertygelse som kommer från en auktoritet, övertygelse som kommer från en förklaring, och till sist, övertygelse som kommer från att se hur fakta kan härledas från andra matematiska resultat. Hemmi skriver att övertygelse som nås genom kritiskt tänkande och ifrågasättande kan ses som önskvärda kvalitéer hos personer som arbetar med matematik. Det är också någonting som lärare kan fokusera på i undervisningen, att lära eleverna att ifrågasätta det uppenbara. Vidare är det viktigt att tänka på att bara för att ett bevis är en förklaring för en matematiker behöver det inte per automatik betyda att det är en förklaring för en elev. Om ett bevis är en förklaring för en person eller inte beror dels på bevisets komplexitet och dels på personens erfarenhet.

En annan viktig aspekt som Hemmi (2006) behandlar i sin doktorsavhandling är matematikers förhållningssätt till undervisningen av bevis. Med hjälp av aspekterna av bevis som tidigare nämndes och annan data identifierade hon tre olika stilar eller pedagogiska perspektiv, som hon kallade: den progressiva-, den deduktiva- och den klassiska stilen. Vanligt för den progressiva stilen är att lärarna undviker bevis och ordet bevis för att inte skrämma studenterna. Ett bevis ges endast om lärarna anser att beviset fungerar som förklaring, men formella och långa bevis undviks. Den deduktiva stilen står i många avseenden i kontrast till den progressiva stilen. Här anses det att studenterna ska lära sig den formella matematiken, med symboler, bevis och begrepp så tidigt som möjligt, och lärarna försöker snarare använda formella bevis ofta än att som i den progressiva stilen undvika dem. Slutligen, skriver Hemmi att bevis för lärare som använder den klassiska stilen betraktas som någonting fantastiskt, så fantastiskt att lärarna uttrycker att endast vissa studenter kan uppskatta bevisen. I den klassiska stilen anser lärarna att studenterna har för dåliga förkunskaper och inte är tillräckligt intresserade av bevis.

Det finns ett intressant diskussionsdokument ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction) som behandlar bevis. I detta dokument har så många som 53 matematikdidaktiker medverkat. I diskussionsdokumentet beskriver många matematikdidaktiker sina tankar och resultat kring bevis och i de nästkommande styckena tar studien upp några av de saker som diskuteras i dokumentet.

Enligt Hemmi (2006) finns det en viss fara när bevisen blir osynliga för eleverna. Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, och Tanguay (2012) skriver om bevis i undervisningen och styrker Hemmis påstående. De skriver att aktiviteter som att utforska, verifiera och tolka frambringar elevers behov av att förstå. Detta händer speciellt ofta då eleven stöter på oväntade resultat, motsägelser eller oklarheter. Komplexa uppgifter, vilka kan leda till tvivel på grund av eventuella motsägelser eller oklarheter, skapar en didaktisk situation som gynnas av bevisföring och stimulerar till utvecklandet av det. Jämförelsevis hamnar bevis ofta i skymundan då eleven alltför ofta ställs inför enkla uppgifter. Detta kan enligt Durand-Guerrier et al. leda

till att eleven inte ser behovet av eller meningen med bevis och bevisföring. Vidare hävdar de att elever alltför sällan ställs inför uppgifter som utgår från falska matematiska påståenden, där eleven för det första har i uppgift att avgöra om påståendena är sanna eller falska och för det andra avgöra om det finns särskilda förutsättningar då påståendena kan vara sanna respektive falska. De skriver att det i själva verket är önskvärt för elever att uppleva ovisshet jämt emot matematiska objekt och påståenden för att kunna utveckla sin skepticism och sitt kritiska tänkande till en rimlig nivå. Uppgifter vars sanningshalt ifrågasätts ställer högre krav på att elever ska utforska problemen, vilket i sin tur leder till resonemangsskapande aktiviteter. Durand-Guerrier et al. skriver även om hypoteser. De hävdar att det är väsentligt att hypoteser är mer än bara vilda spekulationer och menar att det är först när hypotesen bereder väg för en strukturerad förklaring som den ger upphov till ett meningsfullt utforskande som i sin tur behöver verifieras.

Durand-Guerrier et al. (2012) argumenterar för att elever måste möta särskilda bevisföringsuppgifter i sitt lärande skriver Lin, Yang, Lee, Tabach och G. Stylianides (2012) om utvecklandet av de grundprinciper som bör gälla vid konstruktionen av sådana uppgifter. I slutet av deras kapitel listas fem grundprinciper kring bevis som kan utnyttjas i matematikundervisningen. Dessa fem grundprinciper är att:

1. Främja klassificerandet av matematiska påståenden.
2. Främja användandet av olika representationsformer för argument.
3. Främja rollbyten vid lösandet av uppgifter.
4. Belysa vikten av tillräckliga och nödvändiga bevis.
5. Elever konstruerar och delar med sig av sina egna bevis.

Med den första principen menar Lin et al. (2012) att elever måste förstå att olika sorters påståenden kräver olika sorters argumentation och resonemang. Som exempel inleder de med påståendet: summan av tre på varandra följande naturliga tal är delbar med sex. Lin et al. skriver att det till detta påstående går att hitta tripplar av naturliga tal vars summor uppfyller påståendet, exempelvis $1+2+3$, men att det även går att hitta tripplar av naturliga tal vars summor inte uppfyller påståendet, exempelvis $2+3+4$. De menar att påståendet är uppbyggt på ett sådant sätt att det ibland är sant och ibland är falskt. Om påståendet sedan modifieras kan det leda till ett matematiskt påstående som antingen är falskt eller sant, där påståendet alltså inte kan vara ibland sant och ibland falskt. Som exempel skrivs påståendet om till: det finns naturliga tal sådana att summan av tre på varandra följande naturliga tal är delbar med sex. Detta matematiska påstående är alltid sant, och kan inte vara någonting annat. Skrivs påståendet istället om till: summan av vilka som helst tre på varandra följande heltal är delbar med sex, leder det istället till ett påstående som alltid är falskt, och som inte kan vara någonting annat än falskt. Poängen här, menar Lin et al. är att elever måste vara medvetna om att dessa påståenden är uppbyggda på olika sätt, och därför kräver olika sätt och metoder för resonemang och bevisuppbyggnad.

Den andra principen beskrivs som att lärare bör uppmuntra elever att använda olika sätt att framföra sina argument och resonemang på. Lin et al. (2012) skriver att matematiskt symbolspråk inte är förstahandsvalet hos alla elever och att det finns ett syfte med att låta dessa elever börja med vanligt talspråk, som inte nödvändigtvis behöver vara matematiskt korrekt, för att sedan introducera fler sätt som de kan framföra sina bevis och resonemang på.

Med den tredje principen menar Lin et al. (2012) att lärare och elever kan byta roller med varandra för att i sin tur främja lärandet. De hävdar att det finns didaktiska fördelar med att byta roller när eleverna ska lära sig om bevis och resonemang. Idén är att eleven ställs i den förklarande rollen, för att exempelvis stegvis gå igenom ett bevis i ett försök att få läraren att förstå.

Den fjärde principen handlar likt den första principen mycket om att medvetandegöra. Lin et al. (2012) skriver att elevers matematiska uppmärksamhet kan hjälpas av uppgifter som belyser nödvändigheten av bevis men också vad som krävs för att beviset ska anses vara tillräckligt.

Med den femte och sista principen hävdar Lin et al. (2012) att elever i en traditionell klassrumsmiljö kan bilda den felaktiga uppfattningen att bevis endast är någonting som ges och att det endast går att lära sig bevisföring genom att memorera bevis. Om eleven engageras i att konstruera egna bevis kan detta undvikas.

I slutet av ICMI-dokumentet sammanställer de medverkande matematikdidaktikerna tre viktiga punkten rörande bevis och bevisföring. Hemmi (2009) uppmärksammar också detta och har översatt punkterna:

- ”– Bevis och bevisföring i skolmatematik har en potential att ge en långsiktig koppling till den vetenskapliga matematikens syn på bevis.
- Bevis och bevisföring utvecklar tanke sätt som fördjupar förståelsen av matematik såväl som människans sätt att resonera allmänt.
- Bevis och bevisföring är både komplexa och fundamentala och elever borde gradvis få bekanta sig med det genom lämpliga övningar som passar den nivå där de befinner sig.” (s. 103)

3.3. Bevis i läroböcker

Som etablerats i tidigare delar är det viktigt att elever möter matematiska bevis på en nivå som blir utvecklande. Matematikundervisningen i Sverige är starkt läroboksanknuten, vilket betyder att de flesta av elevernas möten med bevis förmodligen kommer att ske i samband med läroböckerna. Detta ställer högre krav på läroboksförfattare, och inte minst matematiklärare, att ta hänsyn till bevis-hanteringen i läroböckerna. Nordström och Löfwall (2006) studerar bevis i två vanliga svenska gymnasieläroböcker. Deras studie gäller böcker skrivna för den tidigare svenska läroplanen, inte den nuvarande. Studien besvarar frågan om i vilken utsträckning läroböckerna ger elever tillgång till bevis och på vilket sätt läroböckerna hjälper elever att förstå olika aspekter av bevis. Resultatet visar att andelen bevisföringsuppgifter i läroböckerna är låg i jämförelse med praktiska tillämpningar och rutinuppgifter. Bevisföringsuppgifterna är något fler inom vissa områden, t ex inom geometri och verifikation av trigonometriska formler. En annan studie som också visar på det sistnämnda är utförd av Grenier (2000) som skriver om bevisens roll i läroböcker i den franska skolan. Greniers studie visar att läroplanens mål och läroböckerna inte stämmer överens. Även om läroplanen ger möjlighet att hantera bevis på ett nytt sätt, verkar läroböckerna i praktiken mest använda bevis i samband med geometri och då på endast grundläggande sätt. Ytterligare en studie som styrker detta är gjord av Hanna och de Bruyn (1999) som undersöker förekomsten av bevis i kanadensiska läroböcker. Deras resultat visade att det ämnesområde som innehåller överlägset flest bevis är geometri, där ungefär hälften av alla bevis återfinns.

Trigonometri har näst störst andel bevis. De övriga ämnesområdena innehåller bara ett fåtal bevis. Hanna och de Bruyn (1999) påtalar också det som tidigare nämndes i inledningen, att det finns få moderna studier av läroböcker, trots att läroböksanalys kan belysa skillnader mellan läroplaners mål och den praktiska inläringen. Särskilt studier kring förekomsten av bevis, bevisföring och bevisföringsmetoder i läroböcker saknas. De menar att studier fokuserar mer på egenskaper och funktioner hos matematiska bevis, hur elever möter bevis och hur bevis lärs ut effektivt.

G. Stylianides (2009) skriver om resonemang och bevis i läroböcker för middle school i USA och går ett steg längre när det gäller förhållandet mellan bevis och geometri. Han menar att bevis ofta hanteras som en formell process inom geometri och är helt isolerat från övriga aktiviteter. Detta är problematiskt eftersom matematikers vardag ofta involverar att identifiera mönster, formulera hypoteser, testa dessa hypoteser, eventuellt omformulera dem och slutligen bevisa att hypoteserna håller. Dessa aktiviteter hjälper matematiker att förstå och utveckla matematiken. Men, om skolmatematiken behandlar bevis som en isolerad företeelse ges eleverna inte möjligheten att använda bevisföring som en del av uppbyggnaden av ny matematisk kunskap. Enligt G. Stylianides har resonemang och bevis fått en ökad betydelse i läroplaner i en rad länder, men trots detta har elever svårigheter i dessa aktiviteter. Läroböckers inflytande på matematikundervisningen är stark och det gör att intresset för hur läroböcker ser ut är stort. Dock saknas det studier, precis som Hanna och de Bruyn (1999) påtalat, som visar i vilken utsträckning resonemang och bevis behandlas i läroböcker. G. Stylianides presenterar ett analytiskt ramverk för att undersöka hur läroböcker ger elever möjligheten att öva på resonemang och bevis. Detta ramverk har legat till grund för vår studie av läroboksuppgifter. Efter att ha skapat ramverket använder han det för att studera resonemangs- och bevisuppgifter i en amerikansk läroboksserie uppdelad i tolv böcker som spänner över 3 årskurser, årskurs 6 (tre böcker), årskurs 7 (tre böcker) och årskurs åtta (sex böcker), och tre ämnesområden, algebra (sex böcker), talteori (en bok) och geometri (fem böcker). G. Stylianides resultat visar att cirka 40 % av uppgifterna innehåller någon form av resonemang och bevis. Minst andel, 26 %, var det i årskurs 7 algebra och störst andel, 49 %, var det i den första boken, årskurs 6 som handlade om talteori.

En annan studie i USA utförd av Davis (2012) undersöker bevis i tre olika läroböcker för high school. De tre läroböckerna är av olika typ, en reformorienterad, en konventionell och en hybrid. Med utgångspunkt i G. Stylianides (2009), skapade han ett modifierat ramverk och undersökte läroböckerna. Resultaten visar att det i avsnittet om polynomfunktioner i respektive bok finns 22 %, 4 % och 9 % resonemangs- och bevisuppgifter. Vidare skriver Davis att bara 19 % av det polynomfunktionsrelaterade innehåll som ingår i läroplanens kunskapsmål, valideras i läroböckerna.

För att återkoppla till Nordström och Löfwalls (2006) studie visar den också, som G. Stylianides (2009) påpekat, att läroböckerna inte ger eleverna tillräckligt med underlag för att lära sig eller konstruera olika typer av bevis. Språket i teoriavsnitten är mer vardagligt än matematiskt. Ord som bevis, definition och antagande undviks i läroböckerna. När dessa ord undviks uppstår det en förvirring kring vad som är vad eftersom ord som förklaring, motivering och upptäckt alla kan översättas till någon slags bevisföring. Ingen av läroböckerna synliggör bevis genom att fokusera på logik och bevisstruktur men det finns vissa skillnader mellan böckerna. Den ena boken är mer matematiskt strukturerad, vilket kan leda till att eleverna lättare ser en logisk ordning. Den andra boken gör ett försök att definiera begreppen bevis, sats och

definition med mera, men är inte konsekvent. Indelningen av läroböckernas uppgifter i olika svårighetsgrader tyder på att läroboksförfattarna anser att bevis är svårt. Nordström och Löfwall diskuterar också att det är svårt att synliggöra bevis i gymnasiet. Trots att de olika begreppen bevis, sats och definition definieras blir det förvirrande för elever. Det är inte konstigt, ty även matematiker har svårt att definiera dessa begrepp. Trots detta kan elevers förståelse av bevis förbättras om den matematiska strukturen synliggörs bättre. De hänvisar till ett exempel i en finsk lärobok som, genom att visa bevisstrukturen i en figur i anslutning till resonemanget, synliggör bevisprocessen och dess logiska struktur.

4. Metod

Den här studien är en kvalitativt inriktad undersökning som baseras på kvalitativ innehållsanalys. När valet av metod övervägdes var innehållsanalysen ett självklart val. Vi följer här Brymans (2011) grundläggande idé att: "Innehållsanalys är ett angreppssätt när det gäller analys av dokument och texter som på ett systematiskt och replikerbart sätt syftar till att kvantifiera innehållet utifrån kategorier som bestämts i förväg." (s. 283). Det låter som en metod som framgångsrikt kan användas för att besvara vår frågeställning. En sak som dock är viktig att påpeka här är att denna studie ej genererar så pass mycket data att det kan leda till någon större generalisering eller kvantifiering. Därför använder studien en egentligen kvantitativ metod, innehållsanalys, men på ett mer kvalitativt inriktat sätt. Innehållsanalysen har givetvis, som Bryman skriver, både för- och nackdelar. En av fördelarna är att innehållsanalysen är en "öppen" forskningsmetod, där det är lättare att beskriva hur ramverket konstruerats och urvalet skett. Det leder till att uppföljningsstudier är enkla att göra. Bryman hävdar också att innehållsanalysen är en icke-reaktiv metod. Med det menas: "... en metod som gör att de som studeras inte påverkas av forskarens närvaro." (s.296). En nackdel med innehållsanalysen är dock att det är svårt att få svar på varför-frågor. Precis som Bryman skriver är det med hjälp av innehållsanalysen lätt att se vad som finns i ett material, men när frågan ställs varför det är så, kan det endast spekuleras. Detta påverkar dock inte denna studie eftersom studien endast söker svar på hur bevis hanteras i böckernas teoriavsnitt och hur många bevisföringsuppgifter som finns i böckerna och hur de är uppbyggda.

I den här delen av studien beskrivs urvalet av läroböcker, teoriavsnitt och uppgifter. Efter det beskrivs hur studiens två analysramverk konstruerats och hur de kan användas för att besvara forskningsfrågorna. Dessa två ramverk beskrivs separat. Till sist beskrivs också hur studien gått till väga med analysramverken, hur analysprocessen gick till, och avslutningsvis behandlas studiens tillförlitlighet samt vilka forskningsetiska principer som beaktats.

4.1. Urval

Först undersöktes vilka läroboksserier som fanns tillgängliga för gymnasie-matematik vilket visade sig vara fyra bokserier: *Matematik 5000*, *Matematik Origo*, *Matematik M* och *Exponent*. Utav dessa fyra valde vi ut två. Valet skedde av praktiska skäl, det var dessa böcker vi kunde få tag på omgående. I denna studie jämför vi dessa två utvalda läroböcker, *Matematik 5000* och *Matematik för gymnasiet – Exponent* tillhörande kursen matematik 4. Att läroböckerna för just Matematik 4 valdes beror på att de har med ett nytt ämnesområde som handlar om bevismetoder (kommer i studien att benämnas som bevisföringsmetoder) men också eftersom Matematik 4

har en större koppling till matematikstudier på högskolan. Hädanefter refererar studien till dessa böcker som *Exponent* och *Matematik 5000*.

Läroböckerna använder sig av olika informationsrutor för att förtydliga viktiga saker, exempelvis, men inte begränsat till, satser, definitioner, formler och sammanfattningar. Dessa rutor förekommer i majoriteten av teoriavsnitten, oavsett ämnesområde. Dessa benämns härafter som "informationsrutor". *Exponent* har sex kapitel: trigonometri, funktioner, bevisföring och standardgränsvärden, deriverings-regler och differentialekvationer, integraler och slutligen komplexa tal. I boken finns teoriavsnitt, övningsuppgifter, gruppaktiviteter, utmaningar, tester, blandade övningar, historikdelar och även uppgifter som kallas för reflektera och diskutera. *Matematik 5000* har fyra kapitel: trigonometri och formler, trigonometri och grafer, derivator och integraler och till sist komplexa tal. I boken finns teoriavsnitt, övningsuppgifter, aktiviteter, temadelar, historikdelar, diagnoser, repetitionsuppgifter och blandade uppgifter.

I ramverket för analys av teoridelarna är en minsta analysenhet ett teoriavsnitt i någon av läroböckerna. För att förtydliga menas alltså då all text, alla bilder och illustrationer, samt alla exempeluppgifter som finns innan övningsuppgifterna. Ett teoriavsnitt är ett avsnitt som börjar med en tydlig rubrik, exempelvis "Derivat av en kvot". Hit räknas inte temadelar, gruppaktiviteter, utmaningar, diagnoser eller repetitionsuppgifter et cetera.

Olika läroböcker har olika sätt att benämna och numrera uppgifter och frågor. För att kunna använda ramverket för bevisföringsuppgifter effektivt, och senare kunna jämföra de två läroböckernas olika uppgifter definieras även här en minsta analysenhet. I båda läroböckerna förekommer numrerade uppgifter (exempelvis 4201) som har deluppgifter (exempelvis 4201a, 4201b och 4201c). I denna studie betraktas deluppgiften 4201a som en minsta analysenhet och benämns alltså som en uppgift. Detta betyder alltså att 4201a, 4201b och 4201c räknas som tre uppgifter.

Studien undersöker alla teoriavsnitt i läroböckerna. I studien undersöks också alla uppgifter som inte tillhör läroböckernas teoriavsnitt. För *Matematik 5000* innefattar detta alla övningsuppgifter, aktivitetsuppgifter, temauppgifter, historikuppgifter, diagnosuppgifter och blandade uppgifter. Med hänsyn till definitionen av analysenheten uppgår antalet uppgifter i *Matematik 5000* till 2058. I *Exponent* finns övningsuppgifter, gruppaktivitetsuppgifter, utmaningsuppgifter, "reflektera och diskutera"-uppgifter, testuppgifter och blandade uppgifter. Med hänsyn till definitionen av analysenheten uppgår antalet uppgifter i *Exponent* till 2138.

4.2. Analysramverk

För att besvara de två forskningsfrågorna behövdes olika ramverk till innehållsanalysen. Den här delen beskriver ramverkets konstruktion, och hur det fungerar.

4.2.1. Ramverk för analys av teoriavsnitt

Utgångspunkten var att detta ramverk skulle vara så "öppet" som möjligt, för att lättare kunna beskriva hur läroböckerna hanterar bevis i teoriavsnitten. Detta berodde också på att vi efter mycket letande, inte hittade något ramverk som undersökte något som liknande denna studies första forskningsfråga. Istället för ett helt öppet ramverk ställde vi upp en rad stödfrågor, som vi bestämde oss för att utgå

från när vi analyserade teoriavsnitten. Exempel på sådana stödfrågor är: "Används orden definition, sats, bevis et cetera och om inte, vad används istället?" och "Bevisas satser, eller ges något förklarande, verifierande resonemang?". I ramverket användes också Hemmis (2009) modell om aspekter av bevis som samspelar med varandra, se figur 1. Tanken var att till viss del undersöka huruvida bevisen i teoridelarna var synliga/osynliga, induktiva/deduktiva och så vidare. Utifrån de konstruerade stödfrågorna och Hemmis modell utformades ramverket.

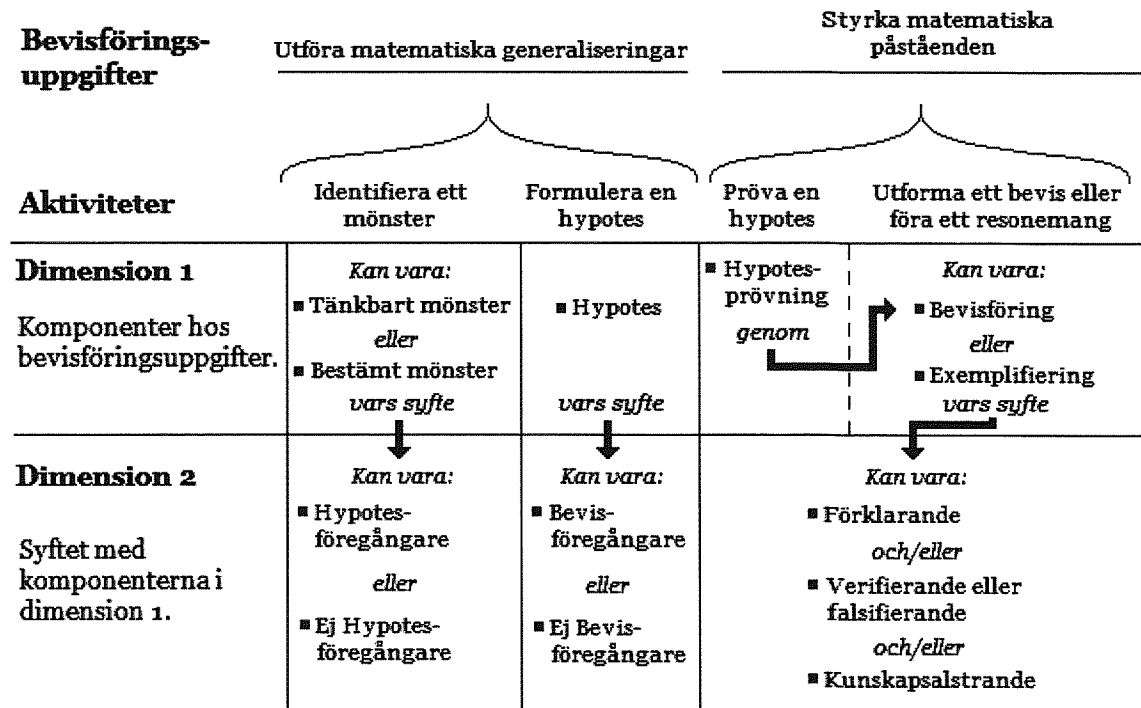
En annan viktig detalj att nämna i samband med detta ramverk är att läroböckerna inte har lika många kapitel, vilket betyder att det finns kapitel som behandlar olika matematiska ämnesområden. Detta betydde att för att kunna jämföra mellan böckernas teoriavsnitt på ett betydelsefullt sätt blev vi först tvungna att dela in böckernas teoriavsnitt i olika ämnesområden. Dessa ämnesområden bestämdes utifrån böckernas innehåll men också kursplanens innehåll. Resultatet blev åtta ämnesområden: trigonometri, funktioner, derivata, differentialekvationer, integraler, komplexa tal, bevisföringsmetoder och ett område för övriga ämnesområden, sådana som inte passade in i något av de andra ämnesområdena.

4.2.2. Ramverk för analys av uppgifter

För att kunna besvara forskningsfråga 2 letade vi efter ett ramverk som effektivt kunde hitta och kategorisera bevis- och resonemangsuppgifter i läroböckerna. G. Stylianides (2009) beskriver ett ramverk som kunde vara lämpligt. Utifrån G. Stylianides ramverk utformades en pilotstudie för att testa lämpligheten. I pilotstudien applicerades ramverket på ett antal utvalda uppgifter från ytterligare en lärobok, *Matematik M4* (2013). Även denna lärobok är ämnad för matematikkurs 4 på gymnasiet. Detta gjordes för att pilotstudien inte skulle undersöka exakt samma uppgifter som den riktiga studien ämnade undersöka. De utvalda uppgifterna bestod av var tionde uppgift i *Matematik M4*. Uppgifterna delades in i två kategorier, bevisföringsuppgifter samt icke-bevisföringsuppgifter. Detta steg genomfördes en och en, för att sedan kunna jämföra om vi kodat uppgifterna lika. Vid jämförelsen diskuterades de uppgifter som inte kodats lika (10 av 160 uppgifter), och det beslöts vilka uppgifter som var bevisföringsuppgifter. Efter det, kodades alla beslutade bevisföringsuppgifter vidare enligt ramverket, även detta utfördes en och en. Återigen diskuterades kodningen och slutsatser drogs. Slutsatserna av pilotstudien var att G. Stylianides ramverk var lämpligt för studien men att vissa modifieringar krävdes. Notera att vi har översatt G. Stylianides ramverk i denna studie. Bland annat visade pilotstudien att det var svårt att särskilja på komponenterna "rationale" och "demonstration" samt "empiriskt argument" och "exemplifiering" eftersom graden av bevisföring var svår att definiera. Detta stämmer överens med Davis (2012), som också ansåg att "rationale" var svårtolkat. På grund av detta bestämdes det att komponenterna "rationale" och "demonstration" skulle sammanfogas till en komponent "bevisföring" och att komponenterna "empiriskt argument" och "exemplifiering" skulle sammanfogas till en komponent "exemplifiering". En annan förändring är sammanfogandet av syftena "verifiering" och "falsifiering". Motiveringen till detta är att samtidigt som man verifierar ett påstående falsifieras det motsatta påståendet. Därför ansåg vi att det var mer logiskt att ha dessa två syften samlade i ett syfte "verifierande/falsifierande". En annan modifiering vi gjort, vilken även Davis (2012) använt, är införandet av en ytterligare aktivitet "hypotesprövning". Detta gjordes eftersom vissa uppgifter i pilotstudien innehöll delar där eleven förväntades testa en redan given hypotes, medan eleven i vissa andra uppgifter

istället förväntades skapa en egen hypotes. Vi ville med det färdiga ramverket kunna skilja på dessa två typer av uppgifter.

När ramverket hade reviderats efter pilotstudien användes det sedan som analysverktyg. I denna del ges först en överblick av ramverket (figur 2) och sedan beskrivs de olika delarna djupare.



Figur 2. Översikt av ramverket

I ramverket syns att en bevisföringsuppgift kan bestå i att *utföra matematiska generaliseringar* eller *styrka matematiska påståenden*. Sedan listas de aktiviteter som utförs vid bevisföringsuppgifter. Dessa aktiviteter är att: *identifiera ett mönster*, *formulera en hypotes*, *pröva en hypotes* och *utforma ett bevis eller föra ett resonemang*. Den tredje aktiviteten, *pröva en hypotes*, är en aktivitet som inte återfinns i G. Stylianides (2009) ramverk, utan är en av de förändringar som utförts. Ramverket är uppdelat i två dimensioner. Den första dimensionen består av komponenterna som bygger upp bevisföringsuppgifter. Aktiviteterna är kopplade till respektive komponenter i dimension 1. I dimension 1 särskiljs viktiga egenskaper med hjälp av komponenterna. Den andra dimensionen beskriver syftena med komponenterna i dimension 1 och fungerar kompletterande. Med detta menas att en viss komponent i dimension 1 bara kan leda till vissa syften i dimension 2 som figur 2 visar. Viktigt att notera är också att en bevisföringsuppgift kan innehålla komponenter från flera aktiviteter och därmed också ha flera syften. I slutet av dataanalysdelen visas hur ramverket använts på en bevisföringsuppgift från böckerna för att ytterligare förtydliga.

Aktiviteten *identifiera ett mönster*, dess komponenter och syften

En grundläggande aktivitet för en bevisföringsuppgift är att kunna identifiera ett mönster. Ett mönster kan i detta ramverk klassificeras som antingen komponenten *bestämt mönster*, då endast ett unikt mönster kan hittas utifrån uppgiftens kontext,

eller komponenten *tänkbart mönster*, då det finns flera möjliga mönster att finna och som kan passa in i uppgiftens kontext. Ett exempel där komponenten *bestämt mönster* kan ses är:

Om du delar ett pappersark på mitten och staplar halvorna i en hög och delar dessa (och fortsätter med staplingen och delningen), vilket mönster kan du då se gällande antalet pappersbitar efter varje delning?

Mönstret blir som följer: 2, 4, 8, 16, _, _

I detta exempel kan endast ett mönster passa utifrån kontexten, det vill säga talen är potenser av 2 och de följande två talen kan endast vara 32 och 64. Ett *tänkbart mönster* syns istället i följande exempel:

Vilka är de två följande talen i denna talföljd?

2, 4, 8, _, _

Här kan flera möjliga mönster passa. De två talen kan vara 14 och 22, om mönstret för varje tal a_n beskrivs med $a_{n-1} + 2(n-1)$ där $a_1 = 2$. Talen kan också vara 16 och 32, om mönstret beskriver potenser av 2. Matematiskt sett, kan mönstret ha oändligt många tänkbara fortsättningar. Komponenterna i denna aktivitet kan ha två syften. Antingen ger de upphov till en hypotes eller inte. Detta benämns i dimension 2 som *hypotesföregångare* respektive *ej hypotesföregångare*.

Aktiviteten *formulera en hypotes*, dess komponent och syften

En hypotes kan vara ett matematiskt samband eller ett påstående som är sant eller falskt. En hypotes kan formuleras utifrån ett identifierat mönster, eller andra observationer. Denna aktivitet har endast en komponent i dimension 1, *hypotes*, som i sin tur kan ha två olika syften i dimension 2, *bevisföregångare* eller *ej bevisföregångare*. En hypotes kan alltså antingen stå till grund för ett bevis eller lämnas utan vidare bevisföring.

Aktiviteten *pröva en hypotes*, dess komponent och syften

Den här aktiviteten lades till i ramverket eftersom hypoteser i vissa fall redan är formulerade, och endast ska prövas, det vill säga visas sanna eller falska. Detta innebär att komponenten hypotesprövning i dimension 1 alltid kommer att prövas genom någon av komponenterna i aktiviteten *utforma ett bevis eller föra ett resonemang*. Det klargörs med en pil i figur 2. Detta leder också till att syftena för komponenten hypotesprövning är desamma som för komponenterna i aktiviteten *utforma ett bevis eller föra ett resonemang*.

Aktiviteten *utforma ett bevis eller föra ett resonemang*, dess komponenter och syften

I dimension 1 för den här aktiviteten listas komponenterna *bevisföring* och *exemplifiering*. Komponenterna *bevisföring* innebär att eleven visar ett påstående med hjälp av ett resonemang som kan tolkas som bevis. Komponenterna *exemplifiering* är då eleven istället uppmanas att troliggöra ett påstående med hjälp av ett eller flera exempel. Komponenternas syften i dimension 2 är i denna aktivitet annorlunda jämfört med tidigare aktiviteter. Syftet med *bevisföring* eller *exemplifiering* kan vara att ge en förklaring till ett matematiskt begrepp och/eller verifiera alternativt

falsifiera ett påstående och/eller ge upphov till ny kunskap. Dessa syften kallas för *förklarande*, *verifierande/falsifierande* samt *kunskapsalstrande*. Notera även att komponenterna i denna aktivitet kan ha flera av dessa syften samtidigt. Med det förklarande syftet menas att ett bevis eller resonemang självt kan ge upphov till en förklaring till varför det måste stämma. Med *kunskapsalstrande* menas att ett bevis eller resonemang bildar ny kunskap som eleven ej känt till tidigare. Tolkningen av dessa syften är inte helt självklara. När vi kodar uppgifter med ramverket måste vi se på uppgifterna ur elevernas synvinkel för att syftena ska bli korrekt kodade. Som tidigare nämnt, skriver Hemmi (2006) att om ett bevis är förklarande eller ej beror dels på bevisets komplexitet och dels på personens erfarenhet.

4.3. Dataanalys

Gällande ramverket för forskningsfråga 1, började vi med att dela in alla teoriavsnitt i de tidigare nämnda ämnesområdena. Sedan satte vi oss enskilt med en lärobok i taget och gick igenom varje teoriavsnitt stödfråga för stödfråga. När vi hittade något som svarade på en stödfråga gjorde vi en notering vilken sida det var och vad det var som var intressant på den sidan. När detta hade gjorts för samtliga teoriavsnitt i båda böckerna letade vi också (fortfarande enskilt) efter skillnader och likheter mellan läroböckerna. Efter det, satte vi oss tillsammans och sammanfogade de anteckningar vi fått i ett sammanställt dokument, vilket gjorde att vi kunde få en bättre datamängd att ha som grund för resultaten. Vi gick sedan igenom det dokumentet och undersökte vad som kunde klassificeras (enligt Hemmis modell) som osynligt/synligt, induktivt/deduktivt och så vidare.

Vid ramverket för forskningsfråga 2 började vi med att tillsammans skriva upp och ämnesområdesindela alla uppgifter i båda läroböckerna. Sedan undersökte vi varje uppgift för att se om det var en bevisföringsuppgift. Detta utfördes enskilt. En uppgift räknades som en bevisföringsuppgift om den innehöll minst en av de fyra aktiviteterna i ramverket (se figur 2). När vi gjort detta jämförde vi om vi hade kodat lika, och diskuterade kring de uppgifter vi inte kodat lika och bestämde om de skulle räknas eller inte. Vi ändrade också uppfattning kring två typer av uppgifter som vi först hade tänkt skulle räknas. Den första var att vi inte kommer att räkna uppgifter av typen: "Visa att x är en lösning till differentialekvationen y " som bevisföringsuppgifter eftersom den typen av uppgifter är en slags färdighetsövning innehållande derivata och blir mekaniskt räknande. Det andra som bestämdes var att *Exponents* "reflektera och diskutera"-uppgifter inte skulle räknas som bevisföringsuppgifter. Detta eftersom de visade sig vara instuderingsfrågor där eleven alltför enkelt skulle kunna motivera sina svar med: "Eftersom det står i teoriavsnittet". Efter alla bestämmelser kring vilka uppgifter som skulle räknas började vi återigen att enskilt koda varje uppgift vidare med hjälp av ramverket. Först undersöktes vilka komponenter som ingick i uppgiften (dimension 1), och sedan vilka syften dessa komponenter hade (dimension 2). Detta gjordes för varje uppgift i läroböckerna och sedan jämförde vi vår kodning igen, precis som tidigare. De uppgifter som inte kodats lika gick vi tillbaka till i läroböckerna och tittade på tillsammans. Vi förde argument för varför uppgiften i fråga innehöll en viss komponent eller varför en komponent hade ett visst syfte och enades i slutet om hur den skulle kodas. Den sammanställda kodningen står till grund för våra resultat.

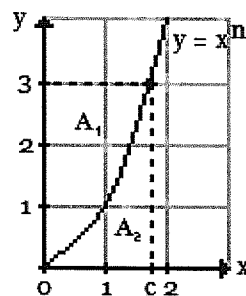
Processen för detta ramverk kan ses så här:

1. Ämnesområdesindela och lista uppgifterna (tillsammans).
2. Undersök om de är bevisföringsuppgifter (enskilt).
3. Jämför kodningen och bestäm vilka uppgifter som ska räknas (tillsammans).
4. Undersök vilka komponenter (dimension 1) varje bestämd uppgift har (enskilt).
5. Undersök vilka syften (dimension 2) dessa komponenter har (enskilt).
6. Jämför kodningen och diskutera hur uppgifter ska vara kodade (tillsammans).

Nedan ges ett exempel på hur uppgift 37 och dess 9 deluppgifter på sidan 218 i *Exponent* har kodats med hjälp av ramverket. Notera igen att med hänsyn till definitionen av en analysenhet räknas detta som 9 uppgifter. Uppgifterna är formulerade så här:

Figuren visar en rektangel och en potensfunktion $y = x^n, x \geq 0$ och $n > 0$ i ett koordinatsystem. Grafen till potensfunktionen delar rektangeln i två områden med areorna A_1 och A_2 . Du ska undersöka förhållandet mellan areorna A_1 och A_2 .

- a) Sätt $n = 2$ och undersök för några olika värden på c vad kvoten A_1/A_2 blir.
- b) Formulera en slutsats.
- c) Visa att din slutsats gäller för alla värden på c när $n = 2$.
- d) Sätt $c = 1$ och undersök för några olika värden på n vad kvoten A_1/A_2 blir.
- e) Formulera en slutsats.
- f) Visa att din slutsats gäller för alla värden på n när $c = 1$.
- g) Låt både c och n variera och undersök vad kvoten A_1/A_2 blir.
- h) Formulera en slutsats.
- i) Visa att din slutsats gäller för alla värden på c och n .



Uppgift a) är en bevisföringsuppgift eftersom den innehåller aktiviteten *identifiera ett mönster*. Dess komponent (dimension 1) är ett bestämt mönster, eftersom eleven söker efter ett specifikt mönster som passar in här. Det bestämda mönstrets syfte är att fungera som en grund till en hypotes, som ses i uppgift b). Därför kodas den i dimension 2 som hypotesföregångare.

Uppgift b) är en bevisföringsuppgift eftersom den innehåller aktiviteten *formulera en hypotes*. Dess komponent i dimension 1 blir alltså hypotes, vars syfte (dimension 2) är att fungera som grund till ett bevis, som ses i uppgift c) och kodas alltså som bevisföregångare.

Uppgift c) är en bevisföringsuppgift eftersom den innehåller aktiviteten *utforma ett bevis eller föra ett resonemang*. I dimension 1 kodas den som bevisföring, eftersom uppgiften instruerar eleven om att visa att slutsatsen alltid gäller, till skillnad från exemplifiering, där eleven endast skulle behöva visa några exempel där den stämmer. Syftet med komponenten är här att verifiera en slutsats, och kodas alltså som verifierande eller falsifierande. Bevisföringen i sig har dock inte något förklarande syfte varför slutsatsen stämmer, och ger inte heller upphov till någon kunskap som eleven inte hade tidigare, därför kodas den inte som förklarande eller kunskapsalstrande i dimension 2.

De övriga uppgifterna kan kodas på samma sätt som uppgifterna a), b) och c) och det visar sig att a), d) och g) kodas exakt lika, b), e) och h) kodas exakt lika och c), f) och i) kodas lika i detta fall. Notera även att detta var uppgifter som endast hade en komponent i dimension 1. Detta är inte alltid fallet, en uppgift kan innehålla flera komponenter i dimension 1 som vardera har sina syften i dimension 2.

4.4. Studiens tillförlitlighet

Eftersom vi använder en vanligtvis kvantitativ metod men på ett kvalitativt sätt, betraktas studiens tillförlitlighet på ett lite speciellt sätt. Bryman (2011) skriver att tillförlitlighet består av fyra delkriterier: trovärdighet, överförbarhet, pålitlighet och möjlighet att styrka och konfirmera. När det gäller trovärdighet skriver Bryman att när studien beskriver en social verklighet måste resultatens trovärdighet vara acceptabla i andra människors ögon. Studiens tolkningar av innehållet i läroböckerna ska vara acceptabla. Eftersom vi först analyserade böckerna en och en och sedan sammanställde och jämförde våra analyser gällande båda våra frågeställningar ger det en viss triangulering. Det vi såg var att våra analyser till stor del överensstämde med varandra men skilde sig åt i vissa punkter. Vi gjorde en statistisk kontroll över hur lika vi tolkade uppgifterna och därmed hur lika vi tolkade ramverket. Resultatet visade att vi var överens kring bevisföringsuppgifterna till ungefär 95 %. Efter att vi diskuterat de uppgifter vi inte var överens om enades vi om hur vi skulle tolka resultatet. Detta ökar studiens trovärdighet och i sin tur dess tillförlitlighet.

4.5. Etiska principer

Här presenteras de etiska ställningstaganden studien gjort, utgående från de fyra grundkrav, informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet som Vetenskapsrådet (2002) beskriver.

Eftersom studien är en litteraturstudie finns inga uppgiftslämnare eller undersökningsdeltagare som behöver informeras om studiens syfte. Informationskravet handlar om att informera uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare om villkoren för deras deltagande och förklara att deltagandet är frivilligt. Beaktan har tagits till om läroboksförfattare eller förlag bör kontaktas innan publicering men vi har inte funnit det nödvändigt eftersom den eventuella kritik mot böckerna som vi framför inte är av sådan karaktär att det bör påverka upphovsmakarna. Däremot vill vi uppmärksamma förlagen på att undersökningen gjorts eftersom den kan bidra till utveckling av läroböckerna.

Samtyckeskravet blir inte heller vidkommande för vår studie eftersom vi inte har några uppgiftslämnare eller undersökningsdeltagare. Vetenskapsrådet (2002) beskriver detta krav som att uppgiftslämnare har rätt att bestämma över sin egen medverkan.

Eftersom vi inte hanterat någon känslig information eller personuppgifter om några personer i studien är inte heller konfidentialitetskravet aktuellt. Vetenskapsrådet (2002) förklarar detta krav med att alla känsliga uppgifter och personuppgifter kring uppgiftslämnare och undersökningsdeltagare ska behandlas varsamt, samt att forskare bör skriva på tystnadsplikt om det behövs. All insamlad data och offentliggjord data ska behandlas så att ingen deltagares identitet kan röjas.

Nyttjandekravet handlar om att all insamlad data bara får användas till vetenskapliga ändamål och ej användas i kommersiellt bruk. Vår studie kommer endast att användas i vetenskapliga ändamål.

5. Resultat

Studien redovisar resultaten i två huvuddelar, en del för forskningsfråga 1, hur bevis hanteras i läroböckernas teoriavsnitt och en del för forskningsfråga 2, i vilken utsträckning bevisföringsuppgifter återfinns i läroböckerna och hur de är uppbyggda.

5.1. Bevishantering i läroböckernas teoriavsnitt

I den här delen presenteras resultaten i åtta separata delar, som delats in efter de tidigare nämnda ämnesområdena som valdes utifrån kursplanen och innehållet i läroböckerna. Innehållet i de sex första delarna är självklart, men de två sista delarna, bevisföringsmetoder och övriga ämnesområden, kommer att behandlas lite annorlunda. Ämnesområdet bevisföringsmetoder är speciellt eftersom det handlar om just metoder för bevisföring. Därför beskriver studien resultaten lite djupare i den delen jämfört med andra ämnesområden. Delen övriga ämnesområden är också speciell eftersom studien där beskriver några av de teoriavsnitt som inte platsat i något av de andra ämnesområdena.

Trigonometri

I *Exponent* introduceras begreppen sinus, cosinus och tangens med hjälp av en rätvinklig triangel, och ges som trigonometriska samband mellan en av triangelns spetsiga vinklar och två av dess sidor. I kapitlets inledning refererar boken tillbaka till Matematik 1c, där begreppen definierats och Matematik 3c, där areasatsen, sinussatsen och cosinussatsen använts. Sambanden ges dock i denna bok utan någon vidare definition, och introduceras som: "Från den rätvinkliga triangeln har vi följande trigonometriska samband:" (s. 12). Det dröjer dock inte länge förrän de trigonometriska sambanden sinus och cosinus också uttrycks som en punkts koordinater på en enhetscirkel och läroboken refererar tillbaka till matematik 3c där enhetscirkeln infördes. *Exponent* definierar sedan trigonometriska ettan (vilket är konstigt, eftersom trigonometriska ettan är en sats, och ej något som definierats). Många trigonometriska samband ges genom att läroboken först med hjälp av enskilda exempel konstaterar att det verkar stämma och sedan skriver ut själva sambandet, ett induktivt sätt att visa det på. Det finns dock även mer deduktiva processer i läroboken, det vill säga, mer formella bevis, där läroboken steg för steg guidar läsaren till slutsatsen. Detta kan ses i *Exponent* på sida 17, där additions- och subtraktionsformlerna för sinus och cosinus ska visas. Det kallas dock inte för bevis, utan läroboken skriver istället om "härledningar". Många av teoriavsnitten använder tidigare härledningar för att visa nya formler och samband, exempelvis dubbla vinkeln.

Matematik 5000 börjar på precis samma sätt som *Exponent* med att repetera viktiga trigonometriska begrepp och samband och visar sedan några exempel där de används. Likt *Exponent* refererar läroboken också tillbaka till tidigare matematikkurser då en del begrepp tas upp. Till skillnad från *Exponent* skriver boken ut att det är en definition då de beskriver de trigonometriska funktionerna med hjälp av enhetscirkeln. *Matematik 5000* ger ett antal tips till eleverna rörande bevis och

resonemang. Exempelvis förklarar boken om hur förkortningarna V.S.V. (vilket skulle visas) och V.S.B. (vilket skulle bevisas) används (s. 16) och att det krävs olika strategier för att lösa "visa att" – uppgifter (s. 18). På sidan 21 skriver boken dessutom om att de vanligaste sambanden, satserna och formlerna kan vara bra att kunna utantill och att det kan vara lättare att minnas om man känner till varifrån de kommer och hur de hänger ihop. Boken uppmanar eleverna att läsa igenom härledningar och motiveringar en extra gång. Ytterligare ett exempel där *Matematik 5000* ger tips till läsaren kan ses senare på sidan 81 där boken skriver om vikten av att behärska både algebraiska och grafiska lösningsmetoder.

Funktioner

Inom det här ämnesområdet anger *Exponent* definitioner i informationsrutor när de skriver om sammansatta och inversa funktioner. Men det finns också definitioner som ges i den löpande texten, exempelvis då de skriver om absolutbeloppsfunktionen på sidan 83. Där inleder boken först med att skriva: "Absolutbeloppet av talet a definieras enligt följande [...]" och fortsätter senare med: "Absolutbeloppet kan också definieras som en funktion t.ex. $f(x) = |x|$ vars graf ser ut så här:". Ytterligare exempel på detta (inom ämnesområdet funktioner) kan ses på sidan 85 där boken behandlar begreppet lokal extrempunkt. Där refererar boken tillbaka till *Matematik 3c* och skriver att "Enligt definitionen på lokal extrempunkt finns det tre möjligheter:". En annan sak som är värd att nämna är den informationsruta som finns på sidan 89. Rutan ligger efter teorin och exemplen och beskriver samband mellan polynomgradtal och olika sorters asymptoter:

"Beroende på det inbördes förhållandet mellan graderna för polynomen $p(x)$ och $q(x)$ kan funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ha olika asymptoter.

- Om täljarens grad är lägre än nämnarens grad har funktionen x-axeln som asymptot.
- Om täljarens grad och nämnarens grad är lika har funktionen en vågrät asymptot.
- Om täljarens grad är exakt en enhet högre än nämnarens har funktionen en sned asymptot."

Detta är ytterligare ett exempel på hur innehållet i informationsrutorna i *Exponent* varierar, men är även intressant eftersom innehållet inte presenteras som en sats. På sidan 95 presenteras faktorsatsen och restsatsen, och läroboken skriver för första gången ut medföljande bevis som av läroboken faktiskt kallas för bevis. Det är också första gången någonting presenteras som en sats.

I *Matematik 5000* skriver boken på sidan 116 om växande och avtagande funktioner. Likt *Exponent* finns även här definitioner i den löpande texten. Läroboken skriver till exempel: "Enligt denna definition är den vänstra grafen [...]" (s. 116) och refererar med "denna definition" till en tidigare text. De skriver också: "Anta att vi har en "snäll" funktion som har en sammanhängande graf som vi kan derivera överallt." (s. 117).

Derivata

Exponent följer en särskild struktur gällande teoriavsnitt inom det här ämnesområdet. Först ges en inledande text kring ämnet, sedan skriver boken om vilka bevisade standardgränsvärden, tidigare bevisade satser och eller annan information som kommer att användas i beviset, vilket följs av en formulerad sats och till sist själva beviset. Ett exempel på den strukturen kan ses på sidorna 134-135 då boken skriver om derivatan av de trigonometriska funktionerna sinus och cosinus. Inledningsvis skriver boken att den ska undersöka derivatan av de trigonometriska funktionerna och börjar med att grafiskt uppskatta derivatan av sinus. Detta resonemang troliggör att derivatan av $\sin x$ är $\cos x$, men det räcker inte för att bevisa det. Därefter går boken vidare med att skriva vilken annan information som behövs (i detta fall ett par standardgränsvärden som visades i tidigare kapitel, samt additionsformeln för $\sin(u + v)$). Sedan formuleras en sats och beviset utförs stegvis, som till sist leder fram till en slutsats. Denna struktur kan ses i varje teoriavsnitt inom det här ämnesområdet och används i teoriavsnitten för exempelvis: derivatan av exponentialfunktionen, derivatan av logaritmfunktionen, produktregeln och kvotregeln med mera.

Upplägget i teoriavsnitten rörande derivata i *Matematik 5000* skiljer sig från *Exponents* upplägg. I *Matematik 5000* är det vanligt att boken först beskriver ett eller flera exempel, följt av ett allmänt resonemang som leder fram till slutsatsen. Detta kan ses bland annat i teoriavsnitten som handlar om derivatan av sammansatta funktioner på sidan 78. Där ges först ett exempel följt av meningen: "Detta resultat kan också troliggöras med ett allmänt resonemang: " (s. 78). Liknande upplägg syns också då boken behandlar kvotregeln. På samma sätt ges först ett exempel, och därefter skriver boken: "På samma sätt härleder vi en allmän formel för derivatan av en kvot." (s. 108). Det är också värt att nämna att *Matematik 5000* till skillnad från *Exponent*, inte benämner de olika skedena i boken som satser eller bevis. Detta kan också ses i de citat som redan nämnts, där *Matematik 5000* istället använder ord som "härledning" eller "allmänt resonemang".

Differentialekvationer

Detta ämnesområde behandlas endast på ett fåtal sidor i läroböckerna. Det finns bara ett teoriavsnitt i vardera bok, och ingendera tar upp något bevis. I *Exponent* skriver boken dock att: "Man kan visa följande samband mellan en differentialekvation och dess lösning:" (s. 153) och listar några samband i en informationsruta.

Integraler

Strukturen som *Exponent* hade inom ämnesområdet derivata återfinns inte när läroboken istället behandlar integraler. Det finns inga bevis eller satser (enligt läroboken) någonstans. Istället ges mycket information direkt i informationsrutor, ibland helt utan eller med minimal motivering i form av text. På sidan 172 finns exempelvis en ruta som beskriver sex vanliga egenskaper hos integraler, eller som läroboken uttrycker det "regler för integralberäkningar som är bra att kunna" (s. 172). Ett exempel på när det saknas motivering kan också ses i teoriavsnittet för normalfördelning på sidorna 192-193. Precis i början av teoriavsnittet skriver läroboken: "Den allmänna normalfördelningen har täthetsfunktionen:" (s. 192) och ger läsaren funktionen utan att ha gett någon som helst motivering till varför den ser

ut som den gör. Informationsrutornas placeringar varierar, och en av de mer avvikande placeringarna var en ruta som var placerad efter alla övningsuppgifter. Rutan finns på sidan 173 och tar upp skillnaden mellan en bestämd och en obestämd integral, något som kan tyckas vara väsentlig kunskap för eleverna. Denna sorts placering, att lista väsentlig information i små rutor efter övningsuppgifterna, syns även två gånger inom ämnesområdet komplexa tal.

Även i *Matematik 5000* finns mycket av informationen att hämta i rutor, men *Matematik 5000* har aningen mer motivering för den givna informationen. Exempelvis har *Matematik 5000* precis som *Exponent* en ruta med egenskaper hos integraler, men skriver innan rutan: "En integral kan visas ha följande egenskaper:" (s. 147) vilket kanske uppmärksammar läsaren på att det som står i rutan möjligtvis är bevisade påståenden som inte bara är tagna ur luften. Detta går även att jämföra då läroböckerna presenterar normalfördelningens täthetsfunktion. Precis som i *Exponent* listar *Matematik 5000* normalfördelningens täthetsfunktion utan någon motivering, men skriver direkt efteråt: "Hur man hittar denna funktion ligger utanför denna kurs men vi kan använda den för att beräkna olika sannolikheter för normalfördelat material." (s. 154). En annan speciell punkt att ta upp är att *Matematik 5000* av någon anledning avslutar integralkapitlet med en historikdel på sidan 164, där läroboken skriver om Riemannsummor och integralens definition, något som kanske skulle ha varit till större nytta i inledningen av integralkapitlet.

Komplexa tal

Inom det här ämnesområdet ger *Exponent* mer motivering till den information som återfinns i rutorna. I de flesta fall ger boken en motiverande text med exempel och bilder, som sedan leder fram till ett samband. Det kan knappast klassas som bevis, och boken skriver till och med ibland att: "Beviset lämnas som övning" (s.248). Detta fenomen finns dock även inom trigonometrin där det till exempel står: "Härledningarna får du göra som en övning." (s. 17). Som nämnt tidigare finns det även i detta ämnesområde vid två tillfällen, informationsrutor som är placerade efter övningsuppgifterna, på sidorna 238 och 243. På sidan 238 formuleras innehållet så här: "Om $z = r(\cos v + i \sin v)$ så är $\bar{z} = r(\cos v - i \sin v)$ och $\arg \bar{z} = -\arg z$." vilket redan av meningsuppbyggnaden ("om x så y") antyder att det handlar om en sats, men den betecknas inte som detta av boken. På sidan 250 introduceras de Moivres formel. Enligt kursplanen ska eleverna hantera användningen och beviset av de Moivres formel men i boken finns inget listat bevis, endast ett kort resonemang. Det är också konstigt att *Exponent* först behandlar de Moivres formel för att därefter ha ett teoriavsnitt om Eulers formel, vilken istället kunde ha introducerats först för att sedan kunna användas i ett bevis av de Moivres formel.

Matematik 5000 ger definitioner vid tre tillfällen inom detta ämnesområde. Bland annat definierar läroboken den imaginära enheten i på sidan 180 och komplexa tal i polär form på sidan 193. På samma sätt som *Exponent* börjar *Matematik 5000* med att introducera de Moivres formel, och i teoriavsnittet efter det, Eulers formel. En annan likhet med *Exponent* är att läroboken vid introduktionen av de Moivres formel endast ger ett resonemang, eller som *Matematik 5000* uttrycker det: "härledning".

Bevisföringsmetoder

Detta ämnesområde är speciellt eftersom det handlar om just metoder för bevisföring. Läroböckerna behandlar samma tre olika bevisföringsmetoder: "direkt bevis", "indirekt bevis" och "motsägelsebevis". Dessa metoder behandlas, i båda läroböckerna, i den ordning som de nyss listades. Delarna som handlar om bevisföringsmetoder är dock placerade i olika kapitel i läroböckerna. I *Exponent* återfinns bevisföringsdelen i kapitel 3 (bevisföring och standardgränsvärden) där del 3.1 behandlar bevisföringsmetoder och resten av kapitlet behandlar standardgränsvärden (som ses som överkurs). I *Matematik 5000* däremot, återfinns bevisföringsdelen i det första kapitlet (trigonometri och formler), i del 1.3. I följande stycken beskriver studien först hur läroböckerna inleder delen som handlar om bevisföringsmetoder, och sedan om hur böckernas respektive teoriavsnitt behandlar de tre bevisföringsmetoderna "direkt bevis", "indirekt bevis" och "motsägelsebevis".

Inledande delar

Exponent behandlar inledningsvis begreppen sats, bevis, definition och axiom och förklarar att de är begrepp som hjälper till att bygga upp matematiken. Det finns en kort återkoppling till tidigare matematikkurser men boken fokuserar mer på att påpeka bevisföring som viktigt eftersom det finns med i ämnesplanen. Den inledande texten uppmanar eleven att utföra bevis steg för steg och förklarar att svårigheten oftast ligger i omfattningen av beviset och inte i varje enskild logisk del. I *Exponent* beskrivs att bevisföringen ofta börjar med ett antagande. Processen beskrivs såhär:

"Sedan används en lämplig metod för att med hjälp av definitioner, tidigare satser och logiska slutsatser, visa att det leder fram till ett sant påstående." (s. 110)

Exponent skriver också "att förstå bevis är grunden för att själv kunna utföra bevis" (s. 110), samt att elevens problemlösnings-, kommunikations- och resonemangsförmågor utvecklas av att de studerar och utför bevis.

Matematik 5000 inleder på ett liknande sätt och skriver om begreppen bevis, logik, implikation, ekvivalens och direkt bevis. Boken listar antagande och slutsats, och kallar dem för påståendena P och Q . *Matematik 5000* skriver också i ett stycke "allmänt om bevis", och förklarar att bevis är viktiga inom matematiken och att bevisade satser hjälper att föra matematiken framåt. Det finns även ett stycke om logik, där de skriver om logik som slutledningskonst, vilket tillsammans med det föregående stycket syftar till att svara lite på varför bevis behövs.

Direkt bevis

I teoriavsnittet som behandlar direkta bevis inleder *Exponent* med att förklara uppbyggnaden av ett bevis. Det vill säga att vi har ett antagande A och ett påstående P följt av instruktionen (uppgiften) att visa implikationen $A \Rightarrow P$ (A medför P). De resonerar sedan kring hur vi kan avgöra om P är sant eller ej, och föreslår först att vi kan testa med olika fall. Dessvärre finns det oändligt många fall och boken föreslår istället att eleven ska leta efter vad det är (vilka egenskaper) som medför att påståendet stämmer. Efter detta skriver *Exponent* om en fyrapunktsmetod för att genomföra bevis och lösa problem, som är tagen från en bok skriven av en professor i

matematik (George Pölya). De fyra stegen är: Förstå problemet, gör en plan, genomför planen, se tillbaka. Efter detta följer ett exempel där boken visar att kvadraten på ett udda tal är udda och även hur eleven kan använda fyrstegsmetoden. *Exponent* använder fyrstegsmetoden i alla tre exempel inom det här ämnesområdet.

I *Matematik 5000* börjar teoriavsnittet om direkt bevis med ett exempel där boken visar att kvadraten på ett jämnt tal är delbar med 4. Läroboken utgår från ett antagande P som är ett påstående och har även en slutsats Q , vilken också är ett påstående. Sedan förklarar boken att uppgiften är att visa att slutsatsen är sann, det vill säga att $P \Rightarrow Q$. Efter exemplet kommer två exempeluppgifter. I den första repeteras endast begreppen implikation och ekvivalens. Den andra utgår från satsen "Ett jämnt tal och ett udda tal har en produkt som är ett jämnt tal" (s. 27) som ska undersökas av eleven. Det finns tre deluppgifter "Undersök satsen med några exempel", "Bevisa satsen med ett direkt bevis" och "Gäller satsens omvändning?". En skillnad från *Exponent* är att *Matematik 5000* inte använder George Pölyas fyrstegsmetod inom ämnesområdet bevisföringsmetoder. Däremot används den i andra delar som *Matematik 5000* benämner "tillämpningar och problemlösning".

Indirekt bevis

Vid indirekt bevis inleder *Exponent* genom att förklara hur påståendet "det är sommarlov" P har ett motsatt påstående "det är inte sommarlov" $\neg P$ och förklarar att de inte kan vara sanna samtidigt. Sedan utökas begreppet och används i implikationen "om det är sommarlov P , är jag ledig från skolan Q ". Nu förklarar boken att på liknande sätt som tidigare har denna implikation en omvänd negerad implikation "om jag inte är ledig från skolan $\neg Q$, är det inte sommarlov $\neg P$ " men förklarar också att implikationerna är ekvivalenta. Boken visar hur detta uttrycks med matematiska symboler och förklarar att det går att visa den omvända implikationen istället eftersom implikationerna är ekvivalenta. Efter detta går *Exponent* igenom ett exempel där det visas att om kvadraten på ett heltal är ett jämnt tal, måste det ursprungliga talet vara ett jämnt tal. Återigen använder *Exponent* George Pölyas fyrstegsmetod när exemplet ges.

Matematik 5000 förklarar att utgångspunkten vid indirekt bevis är att anta att det som ska bevisas är falskt och sedan visa att antagandet då också måste vara falskt. *Matematik 5000* skriver att det ofta är praktiskt att använda motsatsen till ett påstående P , samt förklarar hur det skrivs med symboler och hur det utläses. Sedan fortsätter boken och hävdar att det med grundläggande logiska regler kan visas att:

$\neg Q \Rightarrow \neg P \Leftrightarrow P \Rightarrow Q$. Sedan följer ett exempel där de börjar med att anta att P : "Det regnar" medför Q : "Jag är inne.". Boken använder regeln ovan och hävdar att detta är ekvivalent med $\neg Q$: "Jag är ute" medför $\neg P$: "Det regnar inte.". Efter det ger de en exempeluppgift där de visar att "Om n^2 är ett jämnt tal, så är n ett jämnt tal.". Som går att utläsa liknar de båda läroböckernas teoriavsnitt varandra i stor utsträckning. Exempelvis ses här att båda böckerna använder konkretisering i form av att påståendena P i båda fallen påstår någonting vardagligt ("det är sommarlov" respektive "det regnar") istället för att något med mer matematiskt innehåll (exempelvis "Om n^2 är ett jämnt tal, så är n ett jämnt tal").

Motsägelsebevis

Motsägelsebevis beskrivs väldigt kort i båda böckerna. *Exponent* skriver endast att för att bevisa att ett påstående är sant kan vi skriva upp det motsatta påståendet och visa att det leder fram till en motsägelse. *Exponent* skriver också om Hippasos och Pythagoras historiska upptäckter att vissa tal ej kan skrivas i rationell form. Efter detta ges ett exempel på motsägelsebevis där boken visar att diagonalen i en kvadrat med sidan 1 längdenhet inte kan skrivas som ett rationellt tal.

I *Matematik 5000* står det att utgångspunkten i ett motsägelsebevis är att eleven ska utgå från att påståendet är falskt och visa att detta leder till en motsägelse vilket i sin tur måste betyda att påståendet var sant. Detta följs av ett exempel där de visar att antalet primtal är oändligt många. Sedan beskrivs en exempeluppgift där a , b och c är tre reella tal så att $abc = -10$. I exempeluppgiften visar de med ett motsägelsebevis att minst ett av talen a , b eller c , måste vara negativt.

Övriga ämnesområden

I *Exponent* på sidorna 117-121 listas och bevisas fyra standardgränsvärden, vilka räknas som överkurs. Strukturen av teoriavsnittet i denna del är olikt det i andra ämnesområden. Här finns en tydlig struktur, där det först listas en sats, följt av ett bevis som visar steg för steg och som avslutas med en slutsats. Detta upplägg är precis samma som det som används i ämnesområdet derivata, men det är viktigt att belysa att den här delen är placerad tidigare än derivatakapitlet, just på grund av att de standardgränsvärden som bevisas här sedan används i andra härledningar. Boken skriver att dessa standardgränsvärden bevisas för att de behövs vid härledningen av deriveringsregler för funktionerna $f(x) = \sin x$, $f(x) = e^x$ och $f(x) = \ln x$ senare i kapitel 4 som handlar om derivator. *Matematik 5000* har inte någon sådan här del, och visar exempelvis inte hur derivatan av $f(x) = \ln x$ fås, utan listar den istället utan vidare motivering.

Ett annat ämnesområde som inte passade in i de övriga kategorierna var volym av rotationskroppar. Även detta är ett ämnesområde som endast *Exponent* har med i boken. Några saker som ingår i detta ämnesområde är volymberäkning med integraler där *Exponent* tar upp allmänna volymsatsen. Det finns motivering till satsen i form av resonerande text och två bilder. Boken skriver också om skivmetoden och skalmetoden där det på liknande sätt finns ett resonemang som tillsammans med några bilder kommer fram till formlerna för metoderna.

5.2. Bevisföringsuppgifter i läroböckerna

Här presenteras resultaten i två delar. En del som handlar om hur många bevisföringsuppgifter som förekommer i läroböckerna, samt en del som ämnar svara på hur bevisföringsuppgifterna är uppbyggda. I följande text, samt i figurer och diagram, kommer förkortningen BU användas för bevisföringsuppgifter, och förkortningen iBU för icke-bevisföringsuppgifter.

I den första delen presenteras hur många BU som finns i respektive bok och hur de fördelar sig över de olika ämnesområdena. Andra delen beskriver hur uppgifterna är uppbyggda utgående från ramverkets dimensioner och den avslutas med två exempel på uppgifter som tillhör de två vanligaste typerna av BU.

Utsträckning av bevisföringsuppgifter

Antalet uppgifter i *Matematik 5000* är 2058, av vilka 281 är BU. Detta motsvarar alltså 13,7 % BU. I *Exponent* är denna siffra 6,7 %, en klart mindre andel BU. Totalt finns 2138 uppgifter i *Exponent*. Om uppgifterna delas in efter ämnesområdena resulterar det i följande diagram:

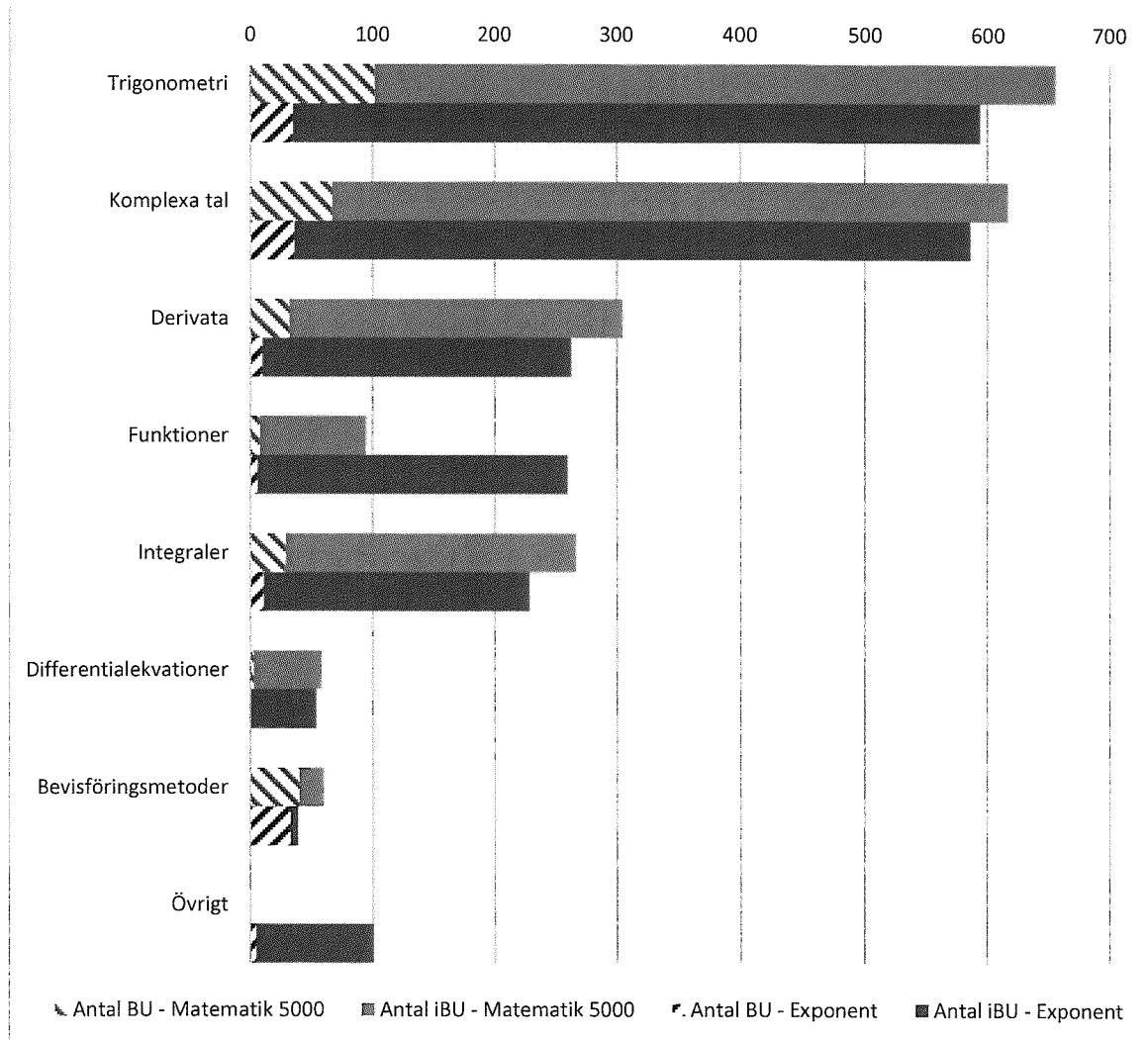


Diagram 1. Antal bevisföringsuppgifter och icke-bevisföringsuppgifter i läroböckerna fördelat i de åtta ämnesområdena.

Diagram 1 visar att för *Matematik 5000* är antalet uppgifter flest i ämnesområdena trigonometri och komplexa tal, medan funktioner, differentialekvationer och bevisföringsmetoder har färre uppgifter. Andelen BU är störst i ämnesområdet bevisföringsmetoder (66,7 %), trigonometri har en andel på 15,5 % och de övriga ämnesområdena har något mindre andel (mellan 5,2 % och 10,9 %). Även för *Exponent* är det trigonometri och komplexa tal som har flest uppgifter och funktioner, differentialekvationer och bevisföringsmetoder har färre. Likt *Matematik 5000* har *Exponent* störst andel BU i ämnesområdet bevisföringsmetoder (84,6 %). Trigonometri har en andel på 5,9 %, de övriga ämnesområdena varierar mellan 2,3 % (funktioner) och 6,0 % (komplexa tal). Ämnesområdet differentialekvationer har inga BU alls. De uppgifter som inte passade i något annat ämnesområde kategoriserades

som övrigt, och ur diagrammet kan vi se att *Matematik 5000* ej har några sådana uppgifter, medan *Exponent* har 101 sådana uppgifter varav endast 5 stycken var BU. Dessa 101 uppgifter var uppgifter som bland annat handlade om rotationsvolymer, gränsvärden och andra ämnesområden som *Exponent* räknat som överkurs. En annan sak som kan utläsas är att *Exponent* har nästan tre gånger så många uppgifter inom ämnesområdet funktioner. Intressant är också att antalet BU ändå är fler i *Matematik 5000* gällande detta ämnesområde.

Om vi i stället tittar på hur endast BU är fördelade bland ämnesområdena (se diagram 2) blir trigonometri det största ämnesområdet i *Matematik 5000* (36,3 %). Komplexa tal står för 23,8% av BU och minst andel har funktioner (2,8 %) och differentialekvationer (1,1 %). För *Exponent* har komplexa tal (26,5 %), trigonometri (25,7 %) och bevisföringsmetoder (24,3 %) ungefär lika stora andelar, de övriga ämnesområdena har alla en andel på mindre än 10 %.

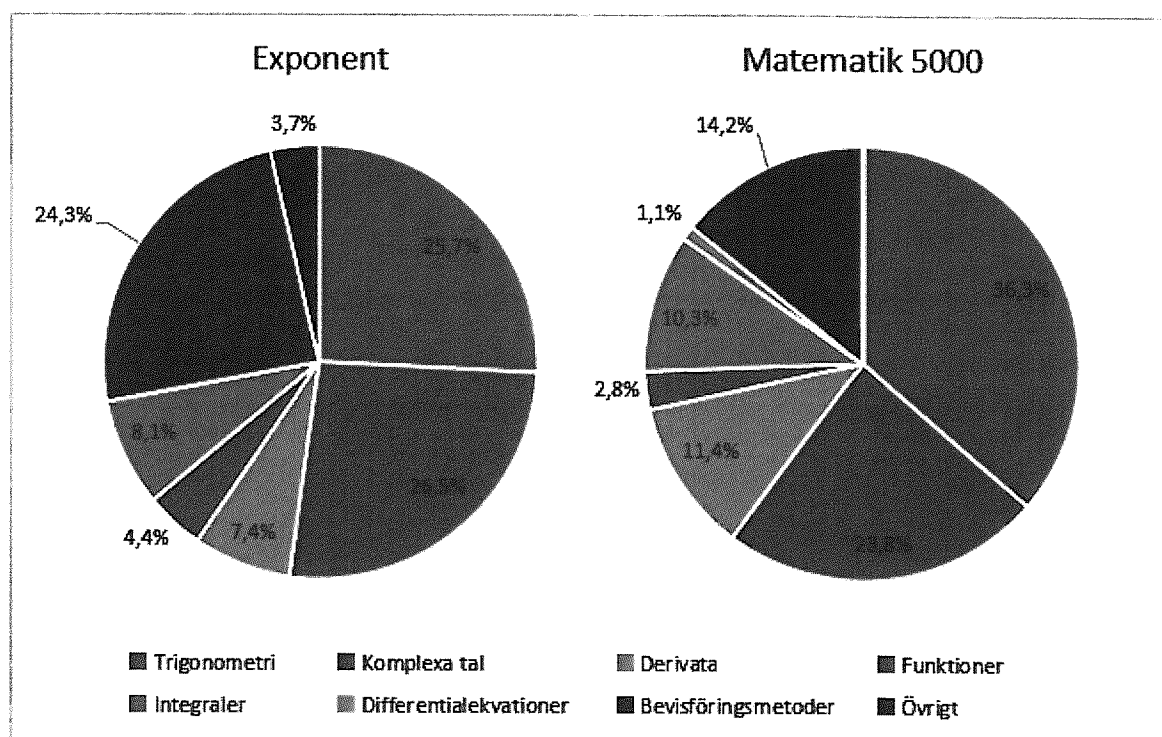


Diagram 2: Andel bevisföringsuppgifter inom varje ämnesområde i båda läroböcker.

Typer av bevisföringsuppgifter

Resultatet av hur BU är uppbyggda, utifrån dimension 1, visas i tabell 1. Tabellen visar hur många BU som innehåller en specifik komponent i dimension 1. Observera att en BU kan innehålla flera komponenter. Tabellen visar att bevisföring är den komponent som är vanligast i både *Matematik 5000* och *Exponent*. 91,1 % respektive 89,0% av BU har denna komponent. I *Matematik 5000* är hypotesprövning också en vanlig komponent, som förekommer i 34,5 % av BU vilket inte alls är fallet för *Exponent*, som där har en andel på 1,5 %. Det syns också att komponenterna tänkbart mönster och exemplifiering nästan inte ingår i några BU alls.

Tabell 1: Visar hur många bevisföringsuppgifter som innehåller de olika komponenterna från dimension 1. Procent inom parentes anger hur stor andel av bevisföringsuppgifterna som innehåller den komponenten.

Lärobok Komponent	Exponent	Matematik 5000
Tänkbart mönster	1 (0,7 %)	1 (0,4 %)
Bestämt mönster	8 (5,9 %)	16 (5,7 %)
Hypotes	12 (8,8 %)	24 (8,5 %)
Hypotesprövning	2 (1,5 %)	97 (34,5 %)
Exemplifiering	1 (0,7 %)	2 (0,7 %)
Bevisföring	121 (89,0 %)	256 (91,1 %)

Ser vi istället till dimension 2 (syftena med komponenterna i dimension 1), se tabell 2, visar den att en stor majoritet av komponenterna i BU är verifierande eller falsifierande, (90,4 %) i *Exponent* och (91,1 %) i *Matematik 5000*, medan de förklarande (3,6 % respektive 8,8 %) och kunskapsalstrande (7,1 % respektive 7,4) BU är färre.

Tabell 2: Visar hur många bevisföringsuppgifter som innehåller komponenter med de olika syftena från dimension 2. Procent inom parentes anger hur stor andel av bevisföringsuppgifterna som innehåller det syftet.

Lärobok Syfte	Exponent	Matematik 5000
Hypotesföregångare	7 (5,1 %)	16 (5,7 %)
Ej hypotesföregångare	2 (1,5 %)	1 (0,4 %)
Bevisföregångare	6 (4,4 %)	9 (3,2 %)
Ej bevisföregångare	6 (4,4 %)	15 (5,3 %)
Förklarande	12 (8,8 %)	10 (3,6 %)
Verifierande eller falsifierande	123 (90,4 %)	256 (91,1 %)
Kunskapsalstrande	10 (7,4 %)	20 (7,1 %)

I nästa tabell (tabell 3) visas vilka olika kombinationer av dimensionerna 1 och 2 i BU som upptäckts i läroböckerna. Det finns 19 olika kolumner som motsvarar en unik kombination av BU där kryssen visar vilka komponenter (dimension 1) och syften (dimension 2) som den specifika kombinationen av BU består av. Talen längst ner i kolumnerna är antalet sådana uppgifter i respektive bok. Färgen i cellerna visar vilka komponenter som kan kombineras med vilka syften. Till exempel kan komponenten hypotes (blå) endast ha syftena bevisföregångare eller ej bevisföregångare (också blåa).

Tabell 3: Visar de olika kombinationerna av bevisföringsuppgifter som finns i läroböckerna och hur många sådana bevisföringsuppgifter som finns i vardera lärobok.

Dimensioner	Aktiviteter	Komponenter	Kombinationer																				
Dimension 1	Identifiera ett mönster	Tänkbart mönster	X																				
		Bestämt mönster		X	X	X	X	X															
	Formulera en hypotes	Hypotes				X	X	X	X	X	X	X											
	Pröva en hypotes	Hypotesprövning									X						X	X					
	Utforma ett bevis eller föra ett resonemang	Exemplifiering																				X	
		Bevisföring						X						X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Dimension 2	Syftet med komponenten	Hypotesföregångare		X			X	X	X														
		Ej Hypotesföregångare	X		X																		
		Bevisföregångare				X		X	X				X										
		Ej Bevisföregångare					X			X	X												
		Förklarande														X				X	X		
		Verifierande/Falsifierande						X				X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
Lärobok	Exponent	Kunskapsalstrande																X	X	X		X	
		Matematik 5000 (Antal Bevisföringsuppgifter)	1	1	0	5	8	2	1	5	2	1	94	1	129	0	4	15	10	0	2	2	
		(Antal Bevisföringsuppgifter)	1	3	1	0	4	0	3	2	0	3	0	1	97	1	0	8	9	2	1	1	

Analysen av vilka kombinationer som bygger upp BU som finns i läroböckerna visar att det finns 19 olika kombinationer av dimension 1 och 2, se de 19 kolumnerna i tabell 3. Den vanligaste kombinationen är komponenten bevisföring tillsammans med syftet verifierande/falsifierande (129 respektive 97 uppgifter) i båda läroböckerna. I *Matematik 5000* är kombinationen innehållandes komponenterna hypotesprövning och bevisföring samt syftet verifierande/falsifierande också vanlig (94 uppgifter). Långt efter dessa kombinationer kommer kombinationen med komponenten bevisföring samt syftena verifierande/falsifierande och kunskapsalstrande (15 respektive 8 uppgifter) och kombinationen med komponenten bevisföring tillsammans med syftena förklarande och verifierande/falsifierande (10 respektive 9 uppgifter). De övriga kombinationerna är ännu ovanligare. Ett exempel på en uppgift som hamnar i den vanligaste kombinationen är: "Bevisa med ett indirekt bevis att om $3n + 2$ är udda så är n udda." (*Matematik 5000*, s. 31). Eleven ska utföra en bevisföring som syftar till att verifiera eller falsifiera ett påstående. Ett exempel på en uppgift som hamnar i den näst vanligaste kombinationen är: "Fiona påstår att absolutbeloppet av x alltid är positivt. Har hon rätt? Motivera." (*Matematik 5000*, s. 123). Notera att i denna uppgift är det alltså inte eleven som sätter upp hypotesen utan den är redan given. Eleven uppmanas att pröva en hypotes som utförs med hjälp av någon slags bevisföring där bevisföringens syfte är att verifiera eller falsifiera hypotesen.

6. Slutsatser

I den här delen av studien presenterar vi våra slutsatser i två delar, en för vardera forskningsfråga.

6.1. Bevishantering i läroböckernas teoriavsnitt

Våra huvudslutsatser är att:

- Den matematiska strukturen och uppbyggnaden är bristfällig i båda böckerna.
- Bevisens synlighet och formalism varierar kraftigt.
- Definitioner och satser varierar också i synlighet och formalism men framförallt finns ingen konsekvent struktur i böckerna.

Som tidigare nämnts finns det ett problem med att begreppet bevis kan definieras på så många olika sätt. Det kan ge en osäkerhet kring vad som är ett bevis och vad som inte är det. Osäkerheten påverkar även böckernas författare, som tvekar kring att hantera bevis på ett konsekvent och synligt sätt. Om böckerna istället var tydliga med hur de definierar ett bevis skulle de inte behöva vara inkonsekventa och tveksamma. Detta gäller också begreppen sats och definition. Om man till exempel utgår från A. Stylianides (2007) definition på bevis, vilket denna studie gör, kan nästan alla matematiska resonemang kallas bevis. Då kan bevisen istället synliggöras i läroböckerna och en diskussion kan föras kring formaliteten i bevisen. Som resultaten visar är detta däremot inte fallet. Gång på gång osynliggörs bevisen och kallas för andra begrepp som "härledning", "förklaring" och "resonemang". Detta går att se i avsnittet om trigonometri i *Exponent* där formler härleds men ordet bevis inte används. I *Matematik 5000* används inte begreppen sats och bevis i avsnittet kring derivata. Istället använder de orden "härledning" och "allmänt resonemang". När det

gäller den inkonsekventa hanteringen av den matematiska strukturen kan även detta ses i resultaten på en rad ställen. Till exempel i avsnittet kring funktioner i *Exponent* definieras begrepp både i löpande text och i informationsrutor vilket är inkonsekvent. I avsnittet kring integraler anges inga satser eller bevis alls, trots att det där finns både satser och bevis i vår mening. I integralavsnittet används informationsrutor flitigt men de används på ett inkonsekvent sätt så det är svårt att se vad de betyder. *Exponent* hänvisar också tillbaka till definitioner som återfinns i tidigare matematikkursers läroböcker utan att repetera definitionerna. Satser hanteras inkonsekvent på det sätt att de ibland skrivs som en sats, som i fallet med faktorsatsen, och ibland inte, som i fallet med asymptoter i funktionskapitlet som också nämnts i resultatet.

När vi jämför *Exponent* och *Matematik 5000* anser vi att *Exponent* hanterar bevis och den matematiska strukturen lite bättre än *Matematik 5000* även om de inte hanterar bevis på ett för oss tillfredställande sätt. *Exponent* är mer matematiskt strukturerad när det gäller bevis i kapitlen kring gränsvärden och derivata. Här blir det synligt hur matematiken är uppbyggd med definitioner, satser och bevis. Satser utnyttjas för att bevisa nya satser och här synliggör boken bevisen. *Matematik 5000* ger i trigonometriavsnittet eleverna ett antal tips kring bevis, vilket är bra men eftersom de inte synliggör bevisen så kan inte eleverna utnyttja tipsen i den utsträckning som vore önskvärt.

Slutsatserna gällande avsnitten om bevisföringsmetoder är att läroböckerna presenterar samma tre bevisföringsmetoder, direkt bevis, indirekt bevis och motsägelsebevis. Metoderna presenteras på ett liknande sätt i båda böckerna och på det hela taget hanteras de olika bevisföringsmetoderna på ett bra sätt. Båda läroböckerna har en inledande del som ämnar förklara lite om varför bevisföring är viktigt. En annan slutsats är att båda böckerna då de presenterar metoden för indirekt bevis först beskriver ett exempel från vardagen, för att sedan behandla matematiska påståenden. *Exponent* använder påståendena "om det är sommarlov P , är jag ledig från skolan Q " medan *Matematik 5000* använder påståendena P : "Det regnar" medför Q : "Jag är inne.". I och med att bevisföringsmetoderna presenteras finns goda möjligheter att vara mer matematiskt strukturerad. Eleverna får en viss vana att använda bevis vilket tyvärr inte utnyttjas eftersom bevisen fortfarande är osynliga i stor utsträckning.

6.2. Bevisföringsuppgifter i läroböckerna

Våra huvudslutsatser är:

- Andelen bevisföringsuppgifter är större i *Matematik 5000* än i *Exponent*.
- Ämnesområdet trigonometri står för en stor andel av bevisföringsuppgifterna i båda läroböckerna.
- Det finns bevisföringsuppgifter av olika typer i båda läroböckerna. Dock är vissa vanligare än andra.

I *Matematik 5000* är 13,6 % av de 2058 uppgifterna bevisföringsuppgifter och i *Exponent* är bara 6,7 % av 2138 uppgifter bevisföringsuppgifter. Detta kan jämföras med Davis (2012) resultat som visar att hans undersökta böcker från high school i

USA innehåller 22 %, 4 % och 9 % bevisföringsuppgifter. G. Stylianides (2009) som studerade middle school-läroböcker i USA, fick resultatet att cirka 40 % av uppgifterna var bevisföringsuppgifter.

Av bevisföringsuppgifterna i *Matematik 5000* var mer än en tredjedel (36,3 %) kategoriserade inom ämnesområdet trigonometri. Även i *Exponent* utgör ämnesområdet trigonometri en av de större andelarna (25,7 %) gällande bevisföringsuppgifter. Likt Nordström och Löfwall (2006) samt Hanna och de Bruyns (1999) undersökning kring bevisföringsuppgifter, visar även våra resultat att det finns en betydande del bevisföringsuppgifter inom trigonometri.

Vi identifierade 19 olika typer av bevisföringsuppgifter. Tyvärr är några typer av uppgifter lite för dominerande. Bevisföringsuppgifter som verifierar eller falsifierar med hjälp av något slags bevis är väldigt många i förhållande till andra typer av bevisföringsuppgifter. Resultatet visar att 129 bevisföringsuppgifter av 281 bevisföringsuppgifter i *Matematik 5000* respektive 97 uppgifter av 136 i *Exponent* hamnar i den största kategorin. Dessutom har *Matematik 5000* ytterligare en typ där 97 av 281 uppgifter ingår, nämligen hypotesprövning med hjälp av verifierande eller falsifierande bevisföring. Denna typ finns inte alls i *Exponent*. Enligt Durand-Guerrier et al. (2012) är sådana uppgifter bra för att eleverna blir mer kritiska till matematiska påståenden och det ger didaktiska möjligheter att utveckla elevernas egna resonemang. Antalet uppgifter som ger upphov till förklarande eller kunskapsalstrande bevisföring är få i förhållande till de verifierande och falsifierande bevisen, vilket är synd eftersom förklarande och kunskapsalstrande bevis kan tillföra en viktig dimension till matematiken, det som Hemmi (2006) kallar transfer.

När vi jämför läroböckerna anser vi att *Matematik 5000* har en större variation och framförallt fler bevisföringsuppgifter än *Exponent* och därför ser vi *Matematik 5000* som lite bättre på uppgiftssidan. *Matematik 5000* innehåller 16 av de 19 typer av bevisföringsuppgifter vi funnit medan *Exponent* innehåller 14 typer.

7. Diskussion

Här diskuteras först varför vi tycker att bevis och bevisföring bör få en mer synlig roll i läroböckerna och därmed i undervisningen. Sedan diskuterar vi för vilka elever bevis är extra viktigt. Vi skriver även om olika val vi gjort under studiens gång och hur det kan ha påverkat resultaten. Efter det diskuteras vilken vidare forskning som skulle vara intressant att genomföra och avslutningsvis nämner vi kort om det som vi har lärt oss av denna studie.

Vi har skrivit om en rad olika aspekter av bevis och bevisföring och vi har undersökt hur läroböcker på gymnasiet hanterar bevis och bevisföring. Vi anser att böckerna inte utnyttjar bevis och bevisföring i den utsträckning de borde och vi sällar oss till den stil som Hemmi (2006) kallar den deduktiva stilen. Men varför ska bevis och bevisföring användas i större utsträckning och vilka bör lära sig mer om bevis?

Enligt vår åsikt är bevis och bevisföring en viktig del i matematiken vilket också bekräftas av det som Hemmi (2006) skriver, det är de flesta matematikers uppfattning. Rav (1999) går till och med så långt att han säger att det är matematikens hjärta. Att då undanhålla bevis och bevisföring för elever gör att de går miste om en väsentlig del av matematikens uppbyggnad och struktur. Matematikens

utveckling går framåt med hjälp av bevis och bevisföring. Hemmi (2006) skriver om olika funktioner som bevis har i matematikers verksamhet, till exempel att förklara, verifiera, systematisera och samt att ge en intellektuell utmaning. Alla dessa funktioner tycker vi även elever ska få del av. Funktionen transfer som Hemmi förklarar är även den viktig för eleverna, bevisen ger upphov till att nytt matematiskt innehåll lärs in och att nya metoder och tekniker för att lösa problem utvecklas.

Att bevis är en väsentlig del av matematiken leder förstås till att det är extra viktigt att elever som ska gå vidare med matematik på högre nivå, likt högskola eller i yrkeslivet, får en förståelse för bevis och bevisföring. Därför blir bevis och bevisföring extra viktigt för elever på naturvetenskapliga programmet och teknikprogrammet. Men även samhällsvetare och andra gymnasieelever bör få en förståelse för bevis och bevisföring. De elever som behöver använda matematiken på högskola och i ett kommande yrkesliv måste kunna förstå bevis och bevisa matematiska påståenden. Idag finns en övergångsproblematik mellan gymnasiet och högre utbildning i matematik (Brandell et al., 2008). Problemet skulle kunna minskas genom att elever visste mer om bevis och bevisföring, men det är svårt om gymnasieböcker i matematik inte vågar tydliggöra begreppet och den matematiska strukturen. Bevis och bevisföring kan också spela en viktig roll i utvecklandet av elevers kritiska tänkande. Hemmi (2006) skriver att verifiering är en funktion som ett bevis kan uppfylla. Verifiering ska leda till en övertygelse om att ett matematiskt påstående är sant. Hemmi skriver att matematiklärare i Sverige oroar sig över att elever bara söker efter rätt svar och inte övertygar sig själva om att deras resonemang är rätt. Genom att lära sig att verifiera att ett resonemang är rätt ökar elevers förmåga till kritiskt tänkande. Vi anser att det behövs medborgare som har ett kritiskt tänkande och som kan ta rationella beslut och dessutom föra logiska resonemang kring varför besluten är rimliga. Detta gör att bevis och bevisföring även spelar en roll i ett annat av skolans viktigaste mål, att lära eleven att sträva mot en hållbar utveckling. Dessa är för oss argument till att bevis och bevisföring bör finnas med i högre utsträckning för alla elever främst på gymnasiet, men vi anser också att det bör introduceras i lägre årskurser. Det finns ingen anledning att osynliggöra bevisen för elever.

Resonemangskompetensen enligt Palm et al. (2004) är också viktig. Ämnesplaner och läroplaner i Sverige och andra länder använder sig av denna kompetens och anser att elever behöver utveckla den. Även här har bevis och bevisföring en betydande roll. Lin et al. (2012) skriver om att det är viktigt för elever att förstå att det finns olika typer av matematiska påståenden och att det krävs olika metoder för att bevisa dessa. Durand-Guerrier et al. (2012) skriver att det är viktigt att elever får komplexa matematiska problem för att eleverna ska kunna ta till sig bevis och bevisföring. Uppgifter är ofta för enkelt uppbyggda. Därför är det bra när uppgifterna består av att upptäcka mönster, skapa hypoteser, ifrågasätta hypoteser och att bevisa. Vi upplever att det finns en uppfattning om att ett bevis är något mycket formellt som är svårt att förstå och utföra själv. Lin et al. (2012) skriver att i en traditionell klassrumsmiljö kan elever få den felaktiga uppfattningen att bevis är något de måste memorera. Om eleverna själva får prova att bevisa blir denna uppfattning svagare och bevis något betydligt intressantare att hålla på med. Om elever får utföra bevis själva kan formaliteten i bevisen diskuteras och eleverna får förhoppningsvis en förståelse att ett bevis inte alls behöver vara strikt formellt. Matematiska resonemang som bygger på intuition är också något slags bevis. Därför är bevisföringsuppgifter mycket betydande för undervisningen. Det är dock väldigt viktigt att bevisen utförs på en nivå som är förståelig för eleverna. Se A. Stylianides (2007) definition, där det

påpekas att resonemangen och representationsformerna för ett bevis måste vara kända och lämpliga i den miljö där beviset utförs, det vill säga klassrummet. Om bevisen inte anpassas till elevernas matematiska kunskapsnivå finns risken att bevisen förblir ouppnåeliga och de didaktiska möjligheterna med bevis och bevisföring uteblir. Även den motivationshöjande effekten som att förstå ett bevis och att se den matematiska strukturen den kan ha, uteblir.

Ju mer läroböcker och lärare synliggör bevis och bevisföring i undervisningen desto större möjligheter har elever att: förstå den vetenskapliga matematikens uppbyggnad och struktur, få djupare förståelse för matematiken, bli bättre på att resonera matematiskt, förstå att bevis inte är eller behöver vara något formellt som måste memoreras och bli bättre på att lösa problem. Detta stöds av den forskning som bland annat Hemmi (2006) och Durand-Guerrier et al. (2012) bedrivit. Ett exempel på en lärobok som synliggör bevis och bevisföring tidigt är *Tal och rum* skriven för den tidigare ämnesplanen. Där behandlas satser och bevis tidigt, redan i A kursen, i ett kapitel kallat *Vad är matematik?*.

Under denna studie har vi gjort ett antal val som kan ha påverkat resultatet i studien. Till att börja med sammanfogade vi några av de kategorierna som G. Stylianides (2009) använde i sitt ramverk. Empiriskt argument och exemplifiering är egentligen två skilda saker men utifrån vår och A. Stylianides (2007) definition av bevis blev kategorin rationale överflödigt varpå vi bestämde att även sammanfoga empiriskt argument och exemplifiering, vilket har påverkat resultaten. Sammanfogningen av kategorierna verifiering och falsifiering har vi redan skrivit lite om men det är också värt att poängtera att en uppgift där eleven ska "visa att någonting är falskt" kan skilja sig avsevärt från en uppgift där eleven ska "visa att någonting är sant". I det första fallet räcker det med att eleven presenterar ett fall eller exempel där påståendet är falskt, medan det i det andra fallet krävs att eleven bevisar att påståendet är sant för samtliga fall. Ytterligare en tolkning vi gjorde var att inte räkna uppgifter av typen "Visa att x är en lösning till differentialekvationen y " som bevisföringsuppgifter. Detta har utan tvekan påverkat resultaten. Om dessa skulle räknats med (vilket de gjorts i till exempel Hemmis (2006) doktorsavhandling) skulle andelen bevisföringsuppgifter i ämnesområdet differentialekvationer varit betydligt större. Detta skulle givetvis även ha påverkat det totala antalet bevisföringsuppgifter.

Vi har studerat hur läroböckerna hanterar bevis. När vi läst böckerna har vi ibland funderat på varför läroböckerna väljer att hantera bevisen på ett visst sätt. Det vore intressant att få veta mer om författarnas motiv till varför läroboken ser ut som den gör. Är det didaktiska ställningstaganden eller måhända tradition som motiverar deras val? Hur tolkar läroboksförfattarna kursplanerna? Hur ser de på bevisens och bevisföringens betydelse i läroböckerna, inom matematiken och inom skolmatematiken i synnerhet?

Att studera hur elever och lärare ser på hur läroböckerna hanterar bevis hade också varit intressant. Gör de samma iakttagelser som vi? Vad tycker elever och lärare om läroböckerna? Hur viktiga är läroböckerna för elever och lärare i undervisningen?

Det vore också intressant att veta om ett utökat fokus på bevis och bevisföring i läroböcker leder till bättre resultat för elever på grundskolan och gymnasiet. Många av de studier vi studerat tyder på att så vore fallet, men ingen studie har verkligen visat att det ger resultat.

Denna studie har gett oss en djupare förståelse för bevis och bevisföring och vilken betydelse den kan ha i undervisningen. Genom att studera läroböcker har vi också sett hur de använder sig av bevis och bevisföring och insett att den matematiska strukturen inte behandlas konsekvent och att bevis ofta är osynliga i böckerna. Vi har också lärt oss att bevis och bevisföring kan vara ett didaktiskt redskap. Använt på rätt sätt kan bevis och bevisföring verkligen bidra till att ge eleverna större förståelse för matematikens vetenskapliga uppbyggnad och människans sätt att logiskt resonera allmänt. Avslutningsvis kan ett matematiskt bevis också ge en estetisk upplevelse och en intellektuell utmaning och vi vill att fler elever ska se det vackra i ett bevis och inse spänningen i att kunna bevisa något.

Referenser

- Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P., & Heikne, H. (2013). *Matematik 5000 4*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Bourbaki, N. (1968). *Elements of Mathematics: Theory of Sets*. Berlin: Springer Verlag.
- Brandell, G., Hemmi, K., & Thunberg, H. (2008). The Widening Gap – A Swedish Perspective. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 38-56.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB.
- Davis, J. D. (2012). An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units. *Mathematics Education Research Journal*, 24(4), 467-491.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (s. 443-452). Berlin: Springer Science+Business Media B.V.
- Encyclopaedia Britannica. (2014). *proof*. Hämtat 2014-04-15 från <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/478848/proof>
- Gennow, S., Gustafsson, I.-M., & Silborn, B. (2013). *Matematik för gymnasiet – Exponent 4*. Malmö: Gleerups Utbildning AB.
- Grenier, D. (2000), *Learning proof and modelling. Inventory of teaching practice and new problems*, En artikel presenterad vid Proof and Proving in Mathematics Education: ICME 9, Tokyo, Japan.
- Gärdenfors, P. & Prawitz, D. (u.å.) Axiom. I *Nationalencyklopedin*. Hämtad 2014-04-15 från <http://www.ne.se/lang/axiom>
- Hanna, G., & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts. *Ontario Mathematics Gazette*, 37(4), 23-29.
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N. & Yevdokimov, O. (2012). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education: Discussion Document. I G. Hanna & M. de Villiers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (s. 443-452). Berlin: Springer Science+Business Media B.V.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice* (Doktorsavhandling, ISBN 91-7155-307-X). Stockholm: US-AB. Hämtad 2014-04-15 från <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:189608/FULLTEXT01.pdf>
- Hemmi, K. (2009). Bevis – en osynlig del av matematikundervisningen?. I Brandel et al. (red.), *Matematikdidaktiska frågor: resultat från en forskarskola* (s. 92-104). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

- Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. & Stylianides, G. (2012). ICMI Study 19: Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. I G. Hanna & M. de Villiers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (s. 305-326). Berlin: Springer Science+Business Media B.V.
- Nordström, K., & Löfwall, C. (2005). *Proof in Swedish Upper Secondary School Mathematics Textbooks – The Issue of Transparency*. En artikel presenterad vid Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Spain.
- Palm, T., Bergqvist, E., Eriksson, I., Hellström, T. & Häggström, C.-M. (2004). *En tolkning av målen med den svenska gymnasiematematiken och tolkningens konsekvenser för uppgiftskonstruktion*. (Pm, 199). Umeå: Umeå universitet.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica*. 3(7), 5-41.
- Roginskaya, M. (u.å.). *Om bevis*. Hämtad 2014-04-15 från http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tma660/1112/Om_bevis.pdf
- Sjunnesson, J., Holmström, M., & Smedhamre, E. (2013). *Matematik M4*. Stockholm: Liber AB.
- Skolverket. (1994). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf94*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskola 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011). *Ämnesplan för matematik 4*. Hämtad 2014-01-27 från http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/gymnasieutbildning/gymnasieskola/mat?tos=gy&subjectCode=MAT&lang=sv&courseCode=MATMATo4#anchor_MATMATo4
- Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288.
- Velleman, D. (2006). *How to Prove It*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

