Matematikundervisning genom problemlösning

En studie om lärares möjligheter att förändra sin undervisning

Teaching mathematics through problem solving
A study about teacher's possibilities to change their teaching

Alma Gullbrand

Estetisk-filosofiska fakulteten
Utbildningsvetenskap
Avancerad nivå 15 hp
Handledare: Yvonne Liljekvist
Examinators namn: Ann-Britt Enochsson
Datum: 14 juni 2012
Löpnummer

Abstract

The purpose of this study was to explore and give examples of teaching mathematics through problem solving and to investigate the impact of research in the field of teachers' practice. The investigation included interviews and lesson observations with three teachers which systematically use problem solving in their teaching. The results of my investigation showed that problem solving can be used in different ways and with different purposes in the mathematics education. They also showed that there are both common and distinctive aspects in the observed practices of teaching and in the teachers' approach to problem solving. In addition, the results suggest some connection between the teachers' teaching and the research findings reported in the literature. However, the results also indicate that each teacher has developed a personalized form of teaching according to their individual circumstances and that their practice may in some aspects differ from those results reported about teaching through problem solving.

Keywords: mathematics, problem solving, teaching.

Sammanfattning

Syftet med denna studie var att undersöka och visa flera sätt att undervisa i matematik genom problemlösning samt att undersöka vilken inverkan forskning inom området har i praktiken. I undersökningen ingick intervjuer och lektionsobservationer hos tre lärare som systematiskt använder sig av problemlösning i sin undervisning. Resultaten från undersökningen visar att problemlösning kan användas på olika sätt och med olika syfte i matematikundervisningen. De visar också att det finns både gemensamma och särskiljande aspekter mellan de observerade lektionerna samt mellan lärarnas synsätt på problemlösning. Dessutom tyder resultaten på en viss sammankoppling mellan lärarnas undervisning och de forskningsresultat som finns rapporterade i litteraturen. Samtidigt indikerar resultaten att varje lärare har utvecklat en personlig undervisningsform utifrån sina egna förutsättningar som i några aspekter inte överensstämmer med de rapporterade resultaten inom området.

Nyckelord: Matematik, problemlösning, undervisning.

Förord

Jag vill tacka min handledare Yvonne Liljekvist för hennes förtroende i mitt arbete och hennes konstruktiva kritik. Jag vill också tacka de tre lärare som öppnade sina klassrum för min undersökning. Jag fick då lära mig hur undervisning i matematik kan genomföras på ett mycket konstruktivt sätt.

Innehåll

Inledning

1.1 Bakgrund

Under de senaste decennierna har problemlösning i matematikundervisningen varit ett område som har fått en stor internationell uppmärksamhet inom forskning om skolmatematik[1] (Lester, 1994; Cai, 2003). Att kunna lösa problem anses vara en viktig beståndsdel av en individs kompetens i matematik (Kilpatrick et al., 2001) och numera råder samstämmighet om att undervisningen bör ske genom problemlösning för att hjälpa eleverna att utveckla nya kunskaper (Cai, 2003; Lester & Lambdin, 2007).

Att problemlösning bör spela en framträdande roll i läroplanen har alltså länge varit en allmänt spridd tanke. Hur man ska gå tillväga för att problemlösning ska bli en integrerad del av undervisningen finns det däremot ingen allmängiltig lösning på. I detta avseende menar Schoenfeld (1992) att mycket av det teoretiska arbetet redan har gjorts och att de återstående frågorna ligger mer på det praktiska och på genomförandenivån.

Under min arbetstid som vikarie och under mina VFU-perioder har jag konstaterat att matematikundervisning genom problemlösning förekommer endast undantagsvis i skolorna. Även om både den utgående och den nya läroplanen i matematik betonar vikten av att utveckla elevernas förmåga att lösa problem syftar undervisningen vanligtvis till att träna procedurfärdigheter, framför allt genom enskilt arbete med läroboken. En studie utförd av Wyndhamn (2000) visade att lärarcentrerad klassundervisning med en inledande genomgång åtföljd av eget arbete egentligen är den vanligaste pedagogiska modellen i svenska grundskolor. Lester och Lambdin (2007) hävdar att konsekvensen av en sådan undervisning är att ”eleverna i bästa fall lämnar skolan med bara en uppsättning av fakta, procedurer och formler som förstås på ett ytlig och osammanhängande sätt” (s. 97).

Vad behöver lärare för att förändra sin undervisning och börja arbeta med problemlösning? Flera artiklar, rapporter och böcker som har publicerats de senaste åren har bidragit till att skapa en allmän vision om hur undervisning i matematik bör genomföras (Sowder, 2007). Däremot finns det lite forskning tillgänglig om hur en lärare kan undervisa genom problemlösning (Cai, 2003; Lester & Lambdin, 2007). Det finns inga forskningsbaserade

[1] Detta diskuteras mer ingående i avsnitt *2.1 Problemlösning i matematikundervisning – varför?* i litteraturgenomgången.

riktlinjer för arbetet med problemlösning och troligen kommer de aldrig att kunna finnas, åtminstone inte av en generell karaktär (Lester och Lambdin, 2007). Enligt Ball and Bass (2000) behöver en lärare både specifika idéer och konkreta exempel som kan vägleda honom eller henne i praktiken. Det behöver åskådliggöras hur arbetet sker i praktiken och detta kan göras bland annat genom att ”dokumentera hur undervisningen genom problemlösning kan se ut, hur lämpliga matematiska problem kan väljas och hur klassrumskommunikationen och hur samtalen kan organiseras för att på ett lämpligt sätt engagera elever i matematikproblem” (Lester och Lambdin, 2007 s. 103).

Med mitt arbete vill jag därför undersöka hur lärare kan arbeta med undervisning genom problemlösning. Dessutom vill jag undersöka om forskningen som finns tillgänglig inom området verkligen bidrar till en reform av matematikundervisningen i praktiken. Avsikten med studien är att presentera olika tillvägagångssätt att undervisa genom problemlösning som kan fungera som inspiration och utgångspunkt för lärare som vill förändra den ”traditionella” undervisningsformen i matematik.

1.2 Syfte och frågeställningar

Syftet med mitt examensarbete är att undersöka och dokumentera olika tillvägagångssätt att undervisa matematik genom problemlösning mot bakgrund av de forskningsresultat som finns inom området. Dessutom är syftet med undersökningen att ta reda på hur en sådan undervisning kan utvecklas. Avsikten med arbetet är alltså att presentera olika vägar för att utveckla och bedriva undervisning i matematik genom problemlösning.

För att uppnå syftet ska jag med undersökningen försöka svara på följande frågor:

1. Hur går en lektion genom problemlösning till?
2. Vilken/vilka roll/roller har läraren i undervisningen?
3. Hur kan läraren börja med och utveckla arbetet med problemlösning?
4. Hur blir problemlösning en integrerad del av lärarens undervisning?
5. Vilka faktorer anser lärarna vara viktigast att ta hänsyn till när man undervisar genom problemlösning?
6. Hur är forskningresultaten i området anknutna till lärarnas arbete i praktiken?

1.3 Disposition

Examensarbetet består av fem kapitel. Det första kapitlet innehåller arbetets bakgrund som motiverar den undersökning som presenteras senare. Kapitel två innehåller en litteraturgenomgång som sammanfattar den forskning jag finner mest relevant för mitt arbete. I det tredje kapitlet redogör jag för val och egenskaper hos de metoder som används i arbetet. I kapitel fyra redovisar och analyserar jag resultaten. Det femte och sista kapitlet innehåller en diskussion mot bakgrund av litteraturundersökningen och resultaten av studien samt förslag för fortsätt forskning.

2 Litteraturgenomgång

2.1 Problemlösning i matematikundervisning – varför?

Schoenfeld (1992) anser att elevernas primära erfarenhet med matematik, som är den grund de bygger sin förståelse av ämnet på, är den matematiken som behandlas i klassrummet (s. 26). Under flera år har matematikinlärning setts traditionell som en successiv process att skaffa sig, memorera och ackumulera fakta och färdigheter för att sedan tillämpa dessa för att lösa rutinmässiga uppgifter (Boesen et al, 2006, s. 1; Cai, 2003 s. 16). Men synen på undervisning som överföring av kunskap är i strid med den sorts prestationer som nu förväntas av barn (Sowder 2007 s. 160). Den traditionella matematiken som lärs i skolan, med betoning på träning av färdigheter, anses inte vara den sorts kunskap som eleverna behöver för livet efter skolan (Lesh & Zawojewski, 2007 s. 764). Det är därför synen på matematikundervisning har förändrats i de flesta länder och matematiklärande ses nu som ”en process att konstruera kunnande och att förklara, skapa och anpassa detta till komplexa system i vår omvärld” (Boesen et al, 2006, s. 1).

Insikten att matematik handlar om problemlösning har å andra sidan vuxit med tiden. Under de senaste 20 åren har forskningen och övriga intressen satt problemlösning i centrum i skolmatematiken (Lester & Lambdin, 2006 s. 95). Redan i början av 1980-talet, en period som kallades för ”problemlösningsårtionde”, hävdade matematikern Paul Halmos att problemlösning var ”matematikens hjärta” och att eleverna bör engagera sig i att lösa problem som kunde förbereda dem för de utmaningar som kan förekomma i det verkliga livet

> I do believe that problems are the heart of mathematics, and I hope that as teachers, in the classroom, in seminars, and in the books and articles we write, we will emphasize them more and more, and that we will train our students to be better problem-posers and problem solvers than we are (refererad till i Schoenfeld, 1992 s. 16).

Att kunna lösa och hantera problem ses i dagens pedagogiska diskussioner som något eftersträvansvärt eftersom det anses ge upphov till reflektion och sökande efter ny kunskap (Wyndhamn, 2000). Att se på barnet som en aktivt kunskapssökande individ är en tanke som Dewey förespråkade redan i början av 1900-talet. Den grundläggande tanken i Deweys kunskapsteori är att vi tillägnar oss kunskap och utvidgar den när vi löser nya, meningsfulla problem (Dewey, 1933).

Forskningen på området har dessutom visat att eleverna lär sig bäst när de deltar i utmanande arbete som fokuserar på användning av förnuft och problemlösning samt färdighetsbyggnad (Kilpatrick, 2001). Därtill anser Lester och Lambdin att lärande genom problemlösning utvecklar förståelse eftersom eleverna försätts i ett mentalt tillstånd där de måste kunna förstå hur man kopplar ihop olika sorts kunskaper (Lester och Lambdin, 2007 s. 98). Å andra sidan för att kunna lösa problem måste eleverna ha en djup begreppslig förståelse av den matematiken de lär sig (Lester och Lambdin, 2007 s. 98). I enlighet med detta hävdar Franke m fl. (2007) att utvecklingen av matematisk förståelse kräver att eleverna har möjligheten att presentera olika problemlösningar, göra gissningar, prata om olika matematiska representationer, förklara deras lösningsprocesser, bevisa varför lösningar fungerar och att tydliggöra generaliseringar (s. 230). Dessutom anser Wyndhamn (2000) att rätt utformad problemlösning kan väcka intressen och skapa motivation hos eleverna (s. 142).

2.2 Vad menas med problemlösning i matematikundervisningen?

Begreppet problem har varit en del av skolmatematiken sedan antiken, däremot är begreppet problemlösning relativt nytt (Schoenfeld, 1992 s. 9). George Pólyas bok *How to solve it* (1945/1990) anses vara det arbetet som startade rörelsen om problemlösning som blomstrade under 1980-talet. För Pólya (1945) betydde problemlösning att anstränga sig med nya och obekanta uppgifter, där de relevanta lösningsmetoderna inte är kända.

Därefter har, enligt Stanic och Kilpatrick (1989), begreppet problemlösning med tiden blivit ”ett slagord som omfattar olika uppfattningar om vad utbildning är, vad skolan är, vad matematik är, och varför vi bör lära ut matematik i allmänhet och problemlösning i synnerhet” (citat i Schoenfeld, 1992 s. 9).

Således finns det i litteraturen olika definitioner på problem och problemlösning. Efter en noggrann undersökning av relevant matematikdidaktisk litteratur har Barkatsas och Huntinghar (1996) formulerat följande definition på problem och problemlösning:

> We define a mathematical problem as a task posed to an individual or group, who will attempt to decipher the task and obtain a mathematical acceptable solution by not initially having access to a method which completely determines the solution. The extent to which the task would be a problem or not for a particular individual or group is a function of mathematical knowledge (general and task specific), executive control mechanisms, memory, capacity, automation of appropriate skills, mathematical ability, utilisation of potential heuristics[2], and the mathematical maturity and creativity of the given individual or group. Problem solving can therefore be defined as the set of actions taken to perform a task, assuming that there exists a desire on the part of the individual or group to perform the task (refererad till i Wyndhamn, 2000 s. 298).

Sammanfattningsvis är problemlösning det man utför för att finna och uppnå en godtagbar och önskvärd lösning på ett problem, när det till en början saknas en given metod och där sökandet av lösningen också förutsätter motivation och engagemang (Wyndhamn, 2000 s. 298; Van de Walle, 2007 s. 37).

Med hänsyn till de nya och framväxande aspekterna av problemlösning har Lesh och Zawojewski (2007) omdefinierad problemlösning som

> The process of interpreting a situation mathematically, which usually involves several iterative cycles of expressing, testing and revising mathematical interpretations and of sorting out, integrating, modifying, revising or refining clusters of mathematical concepts from various topics within and beyond mathematics (s. 782).

Problemlösning handlar alltså inte bara om att använda regler, metoder eller färdigheter på ett skickligt sätt utan även att se (tolka, beskriva, förklara) situationer matematiskt (Lesh & Zawojewski, 2007 s. 782).

2.3 Att undervisa i matematik genom problemlösning - vad säger forskningen?

Synen på hur problemlösning bör användas i matematikundervisningen har förändrats med tiden, vilket har avspeglats i utvecklingen av den svenska läroplanen (Lester och Lambdin, 2007; Wyndhamn et al, 2000; Taflin, 2007). I Lgr 69 och tidigare läroplaner var synsättet att undervisa *för* problemlösning, vilket innebar att lära sig matematik för att kunna lösa problem. Senare i Lgr 80 infördes problemlösning som huvudmoment och målet blev att undervisa *om*

[2] Heuristiken hänvisar till empiriska problemlösningsstrategier. Begreppet behandlas senare i texten (jfr 12).

problemlösning, där det gällde att välja den rätta strategin för att lösa olika slags problem. Vidare i både Lpo94 och Lgr11 betraktas problemlösning som ett medel för att skaffa ny kunskap, undervisningen bör alltså ske *genom* problemlösning (Wyndhamn et al, 2000; Taflin, 2007). Med grunden framförallt på teoretiska perspektiv och empiriska resultat finns numera en växande konsensus bland forskare, matematikutbildare och lärare om att undervisning genom problemlösning kan ge det bästa inlärningsresultatet (Cai, 2003 s. 16; Lester & Lambdin, 2007 s. 100).

I undervisningen genom problemlösning är lösning av problem en integrerad del av undervisningen så att inlärning sker medan elever anstränger sig för att lösa problem där relevanta matematiska begrepp och färdigheter är inbäddade (Lester & Cai, 2010). Lester och Cai (2010) anser att

> The learning environment of teaching through problem solving provides a natural setting for students to present various solutions to their group or class and learn mathematics through social interactions, meaning negotiation, and reaching shared understanding. Such activities help students clarify their ideas and acquire different perspectives of the concept or idea they are learning (s. 3).

Dessutom har det visats empiriskt att under processen för att lösa problem utveckar eleverna ett sammanhängande och komplext system av kunskap i stället för att förvärva enstaka begrepp och idéer (Cai, 2003). Detta sker genom att förfina, kombinera och modifiera olika sorts kunskap som de har lärt sig tidigare (Lester & Cai, 2010 s. 3).

Eftersom undervisning genom problemlösning är ett relativt nytt begrepp, finns det inte mycket forskning på området som kan vägleda läraren om hur denna undervisningsform kan utformas och sättas in i praktiken (Cai, 2003; Lester & Lambdin, 2007). Enligt Cai (2003) har flera aspekter förknippade med detta tillvägagångssätt fått betydande empiriskt stöd men mycket kvarstår som behöver vidare forskning.

Nedan presenteras en sammanfattning av de forskningsresultat som kan anses fungera som utgångspunkt och stöd för införandet av arbetet med problemlösning i praktiken.

2.3.1 Systematisk undervisning genom problemlösning

Med grunden i sin egen och andras forskning har Lester (1989, 1996) dragit slutsatsen att undervisning genom problemlösning blir mest effektivt för de flesta elever när den ges på ett systematiskt och organiserat sätt under ledning av läraren. Han anser att läraren alltså behöver utforma en särskild, välplanerad uppläggning grundad i effektiva arbetssätt (Lester, 1996 s. 89).”Olyckligtvis”, fortsätter han, ”har vi inte några idiotsäkra metoder som är lätta att följa och genomföra” (s. 87).

Flera forskare anser emellertid att undervisning genom problemlösning bör börja med ett problem (Hiebert, 1996; Cai, 2003; Van de Walle, 2007). Genom att problematisera den matematik som behandlas under lektionen låter läraren eleverna utforska, leta och hitta på en lösning (Hiebert et al, 1996, Cai, 2003). På så sätt blir eleverna deltagare i skapandet av kunskap snarare än passiva mottagare av regler och metoder, de blir aktiva i sitt eget lärande (Cai, 2003). Några studier har påvisat att även elever i låg- och mellanstadiet kan utforska problem och hitta olika lösningar (Cai, 2003). Med problem menar man inte ”kluringar” utan problem som innefattar den matematik som ska behandlas under lektionen (Lester & Lambdin, 2007). Det krävs också att problemet bygger på det eleverna vet och kan samt stimulerar deras tänkande och resonemang (Lester & Lambdin, 2007; Franke, 2007; Cai & Lester, 2010; Kilpatrick, 2001). Franke (2007) understryker att genom att börja med en kognitivt krävande uppgift, alltså en uppgift som kräver tankeverksamhet, resonemang och en höggradig diskussion om olika matematiska begrepp och idéer för att kunna lösa den, kan läraren engagera eleverna i att dela sitt tänkande, att jämföra olika metoder, göra gissningar och generalisera (s. 234).

Enligt några forskare kan lektionen sedan genomföras i olika faser uppbyggda kring endast ett problem (Lester, 1984; Eriksson, 1991; Shimizu, 1999; Van de Walle, 2007; Löfwall, 2010). Prototypen var under en lång tid Pólyas (1945) klassiska schema med fyra steg för problemlösning: (1) att förstå problemet, (2) att göra en plan (hitta en lösningsmetod), (3) att genomföra planen och (4) att se tillbaka (utvärdering) (Pólya, 1945). Silver (1985) har dock påpekat att Pólyas heuristiska tillvägagångssätt inte är grundat i någon undervisningsteori och därför gäller den *problemlösning* men inte *undervisning i problemlösning* (s. 249). I enlighet med detta hävdar Lester (1984) att Pólyas fyra faser kan fungera som ett medel för att identifiera en mångfald av heuristiska metoder som kan understödja lösning av problem, men hur eleverna kan utveckla sitt tänkande och resonemang genom faserna är bara implicit (s. 9).

Därför är det inte självklart att Pólyas schema är den bästa möjliga utgångspunkten för systematisk undervisning genom problemlösning (Björkqvist, 2001).

Under en studie om metakognitionens[3] roll i problemlösning utvecklade Lester m.fl. (1989) en undervisningsstrategi för lösning av problem i klassrummet. Lektionen bestod av tre faser: före, under och efter elevernas arbete med problemet. Faserna är grundade i Pólyas schema men de är utvidgade så att såväl metodiska som metakognitiva och affektiva aspekter uppmärksammas och läraraktiviteter i varje fas betonas. Fasen *före* omfattar framförallt förståelse av problemet. *Under* arbetet med problemet handleder lärare eleverna genom att ”observera, fråga och nödvändigt ge idéer”. *Efter* elevernas arbete kan en diskussion om olika lösningsstrategier genomföras i klassen (Lester, 1989 ss. 25-26). Varje fas har alltså ett särskilt syfte men det som sker under faserna för att uppnå syftet kan läraren bestämma beroende på klassen, själva problemet och lektionens ändamål (Van de Walle, 2007).

2.3.2 Lärarens roll

I en undervisning genom problemlösning anser forskarna att läraren har två väsentliga roller: att välja lämpliga arbetsuppgifter och att organisera klassrummets diskurs (Hiebert, 1996; Cai, 2003; Lester & Cai, 2010).

Att välja ett lämpligt problem är ingen lätt uppgift. Problemet som ska behandlas under lektioner måste utformas eller väljas varje dag med hänsyn till elevernas nuvarande förståelse och erfarenhet så att eleverna kan se relevansen i de färdigheter och begrepp de redan har lärt sig (Van de Walle, 2007 s.39; Hiebert, 1996 s. 16). Problemet bör också uppmuntra eleverna att anstränga sig med nya och viktiga matematiska idéer eller begrepp (Hiebert, 1996 s. 16) och dessutom uppfylla kraven i läroplanen (Van de Walle, 2007 s.39). I enlighet med detta menar Lester och Cai (2010) att “the role of teachers is to revise, select and develop tasks that are likely to foster the development of understandings and mastery of procedures in a way that also promotes the development of abilities to solve problems and reason and communicate mathematically” (s. 2). Därtill lyfter Ulin (1996) fram vikten av att välja uppgifter med

[3] Metakognition hänvisar till ens kunskap om de egna kognitiva eller mentala processerna. Begreppet behandlas senare i texten (jfr 13).

lämplig svårighetsgrad så att alla elever kan arbeta med samma uppgift och ta för sig så mycket av uppgiften som passar dem (s. 40).

Därefter är lärarens uppgift att förvalta diskursen kring den matematiska uppgiften. Med diskurs menar man det sätt att representera, tänka, prata och argumentera som lärare och elever använder sig av för att engagera sig i klassrumsarbetet (Lester & Cai, 2010 s. 3). Enligt Wyndhamn (2000) behöver läraren bli en aktiv och viktig samtalspartner som kan hjälpa eleven vidare i arbetet med problemet:

> Som aktiv ledare av det matematiska samtalet i klassrummet kan läraren anses ha – idealt sett – två huvuduppgifter: att vara moderator i ett socialt växelspel och att vara mediator av matematisk kunskap. Som sakkunnig samtalsledare förväntas läraren bland annat i) stimulera eleverna så att de skiftar mellan att uttala sig och att lyssna på läraren och kamraterna, ii) ifrågasätta och modifiera vad eleverna säger och iii) fördela ordet så att de flesta eleverna deltar i diskussioner. Som förmedlare förväntas läraren i) introducera och ge sammanhang åt ett matematiskt innehåll, ii) ge förklarande exempel och iii) startaresonemang i syftet att ge eleverna tillgång till matematiska instrument (s. 309).

Dessutom visar forskning på vikten av att eleverna får tillräckligt med tid för att skapa och diskutera sina idéer (Franke, 2007; Lester & Cai, 2010). Under tiden får också läraren möjligheten att lyssna på elevernas matematiska tankar och bygga vidare på dem (Franke, 2007 s. 230). Flera studier har visat att när lärarna lär sig att se och höra elevernas arbete under en lektion och använda den informationen för att forma sin undervisning, blir deras undervisning tydligare, mer fokuserad och mer effektiv (Kilpatrick, 2001 s. 350). Läraren behöver förvisso stödja elevernas resonemang för att hjälpa dem att komma till insikt och gå vidare med problemet utan att för den delen överta elevernas tankeprocess (Wyndhamn, 2000; Lester & Cai, 2010). Det är vanligt att läraren i själva verket löser uppgiften åt eleven genom att i tanken hela tiden ligga ett stege före, vilket oftast kallas för lotsning (Wyndhamn, 1991 s. 59).

Emellertid finns det inga specifika, forskningsbaserade riktlinjer som läraren kan använda för att uppnå en lämplig balans i sin handledning och forskningen kommer troligen inte att kunna ge några sådana riktlinjer (Cai, 2003 s. 9). Kilpatrick (2001) anser därför att hantering av klassrummets diskurs är både en av de mest komplexa uppgifterna i undervisningen och en av de minst grundligt utforskade (s. 345). Det behövs forskning som kan synliggöra lärarnas överväganden medan de hanterar klassrummets diskurs och konsekvenserna av sina handlingar för elevernas lärande (Kilpatrick, 2001 s. 345).

2.3.3 Klassrumsmiljö

Flera forskare anser att för att kunna införa problemlösning som en regelbunden och konsekvent del av sin undervisning behöver läraren utveckla en problemlösande kultur i klassrummet så att eleverna uppfattar vikten av att delta i en utmanande verksamhet (Lester & Cai, 2010 s. 4). Bland annat visade en studie utförd av Hiebert m.fl. (1996) att eleverna kan engageras i att intensivt lösa problem i en kultur där elevernas frihet och ansvar för att utveckla sina egna metoder för lösning har etablerats i klassrummet. Det behöver då, enligt Hiebert, inte nödvändigtvis finnas ett särskilt intresse i problemets kontext.

Jaworski (1996) hävdar att många klassrum inte erbjuder en matematisk miljö, såsom ”klassrum där det visas liten respekt för enskilda uppfattningar eller idéer; där matematiken är rutinmässig, med litet utrymme för kreativitet; där det krävs av eleverna att de mestadels arbetar tyst med litet utrymme för matematisk kommunikation” (s. 99). Hon lyfter vidare fram att läraren behöver skapa en matematisk miljö i klassrummet ”där verksamhet i matematik kan äga rum och där alla personers tankar respekteras” (s. 100). I enlighet med detta fann Silver m.fl. (1995) under sitt arbete med QUASAR projektet[4] att en atmosfär av förtroende och ömsesidig respekt var avgörande för utvecklingen av en matematisk miljö. Särskilt framhölls att det är viktigt att fokusera på att respektera varandras idéer i stället för att kritisera när eleverna delar sina tankar och diskuterar varandras lösningar och förklaringar (se Franke, 2007 s. 241). Jaworski (1996) anser dessutom att lärarens personliga filosofi om matematiken är det som mest påverkar stämningen i klassrummet (s. 99). I enlighet med detta påstår Schoenfeld (1992) att “a teacher´s sense of the mathematical enterprise determines the nature of the classroom environment that the teacher creates; that environment, in turn, shapes students´ beliefs about the nature of mathematics” (s. 71).

Emellertid hävdar Franke (2007) att det är en utmaning för läraren att skapa ett bra klimat i klassrummet:

[4] QUASAR projektet var ett amerikanskt matematikundervisningsprogram inriktat mot att hjälpa eleverna att utveckla en meningsfull förståelse av matematiska idéer genom utmanande matematiska uppgifter.

> We have evidence that creating the norms that expect students to share their mathematical thinking, challenge and test ideas publicly and work to make sense of one another´s ideas is not easy; it involves issues of power and positionality as well as issues of identity that develop both inside and outside the classroom and are shaped by the societal, community and school structures (s. 249).

Varje lärare behöver alltså arbeta för att skapa en matematisk miljö utifrån de förutsättningar som finns både innanför och utanför klassrummet, inklusive de sociala regler som styr både skolan och samhället i skolans omgivning.

2.3.4 Om heuristik och metakognition

Heuristik

Diskussioner om problemlösningsstrategier eller heuristik måste börja med Pólya. Heuristiken, vars spår man kan finna hos de gamla grekerna, är studien av metoder och regler för upptäckt och uppfinning (Pólya, 1945). I boken *How to solve it* introducerade George Pólya begreppet ”modern heuristik”. ”Modern heuristik”, skriver Pólya, ”försöker att förstå processen att lösa problem, speciellt de tankeoperationer som normalt är användbara under denna process”. Pólya (1945) beskrev i sin bok en lista över mentala operationer, som senare kallades för heuristiska tillvägagångssätt, typiskt användbara för att lösa problem (s. 130). Bland dessa problemlösningsstrategier ingår att rita en figur, att arbeta baklänges och att skriva ner en ekvation.

Forskningresultaten om undervisning om och med användning av heuristiska tillvägagångssätt i problemlösning är delvis motstridiga (Björkvist, 2001 s.123). Å ena sidan anser Eriksson (1991) att det är viktigt att eleverna har tillgång till ett antal strategier för att kunna planera ett målmedvetet problemlösningsarbete (s. 104). I enlighet med detta anser Lester (1996) att ett program för undervisning genom problemlösning bör innehålla en systematisk undervisning i hur man använder olika strategier (s. 88).

Å andra sidan anser Wistedt och Johansson (1991) att ”även problemlösning kan mekaniseras till exempel om eleverna sätts att öva in strategier för att lösa vissa typer av problem” (s.21). Dessutom påpekar Björkvist (2001) att ”tillvägagångssätt som i undervisningssyfte gjorts fullt beskrivbara blir nästan algoritmiska och förlorar något av sin heuristiska natur” (s. 123).

Vidare, från sin undersökning om det matematiska tänkandet drog Schoenfeld (1992) slutsatsen att försöken att lära eleverna att använda allmänna problemlösningsstrategier i allmänhet inte har varit framgångsrika. Han menade att bättre resultat kan uppnås genom att utveckla och lära mer specifika problemlösningsstrategier som tydligare hänger ihop med olika slags problem (Schoenfeld, 1992).

Metakognition

Intresset för metakognitiva aspekter i samband med problemlösning har ökat under de senaste åren (Lester, 1996). De flesta forskare har beskrivit metakognition i problemlösnings-sammanhang som en medveten kontroll (att vara medveten om hur och varför man gör något) och reglering (att välja att göra något eller besluta att göra ändringar) av våra mentala eller kognitiva processer medan vi löser ett problem (Schoenfeld, 1992; Lester, 1989; Van de Walle, 2007). Det finns några studier som visar att framgångsrika problemlösare är bättre på att kontrollera sina handlingar än icke framgångsrika (Lester, 1996, s. 86). Bra problemlösare kontrollerar regelbundet och automatiskt sitt tänkande och på så sätt gör de medvetna beslut när de byter strategier, tänker över problemet, söker efter kunskap som kan hjälpa eller helt enkelt börja om på nytt (Van de Walle, 2007 s. 58).

Ett metakognitivt beteende kan dessutom läras ut (Schoenfeld, 1992; Lester, 1989; Van de Walle, 2007). Schoenfeld (1992) menar att läraren i sin handledning under problemlösningsprocessen kan hjälpa eleverna att bli medvetna om sitt tänkande genom att kontinuerligt fråga vad de gör, varför de gör det och hur det ska hjälpa dem. Genom att svara på dessa eller liknande frågor kan eleverna själva reflektera över sina matematiska tankar medan de löser ett problem (Van de Walle, 2007 s. 58).

2.3.5 Problematik med problemlösning i undervisningen

Enligt Wyndhamn (2000) har begreppet problemlösning med tiden fått ett stort symbolvärde och en pragmatisk status. Enligt honom har problemlösning blivit en metafor, ett ord som låter välbekant men som för de flesta förblir abstrakt och på så sätt inte utvecklas i praktiken (s. 61). Således är problemlösning inte något entydigt begrepp i lärarnas sätt att uttala sig om undervisningen i matematik och betecknar ofta en aktivitet som upptar en viss tid på schemat

(Wyndhamn, 2000 s. 169). I detta avseende hävdar Schoenfeld (1992) att problemlösning inte anses vara ett mål i sig självt utan ett medel för att uppnå målet och därför har tolkats så enkelt som ”working the tasks that have been set before you” (s. 13). Hiebert (1996) anser därför att införandet av en undervisning genom problemlösning kräver att hela systemet förändras. Det handlar inte om att lägga till problemlösning i hopkoket av pågående klassrumsaktiviteter, hävdar han, utan det handlar om att titta på undervisningsmålet från ett annat perspektiv (Hiebert et al, 1996 s. 19). I enlighet med detta står det i de senaste *Principles and standards for school mathematics* publicerad 2000 av USAs National Council of Teachers of Mathematics (NCMT) att

> Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so […] Problem solving is an integral part of all mathematics learning, and so it should not be an isolated part of the mathematics program (s. 52).

Hiebert (1996) anser vidare att för att kunna integrera problemlösning i undervisningen behöver kulturen i klassrummet förändras och att denna typ av förändring börjar med läraren (s. 19).

Men att ändra den traditionella undervisningsformen i matematik har visat sig vara en utmaning, särskilt när det krävs en förändring i lärares sätt att engagera sig i undervisningen (Franke, 2007 s. 229). Taplin och Chan (2001) har lyft fram flera anledningar till lärarnas motvilja att förändra sin undervisning:

> One is that the teachers may lack the pedagogical skills and/or confidence to overcome obstacles to changes. In many cases teachers believe that these obstacles are insurmountable. Many feel unable to be innovative because they are effectively isolated in a sink-or-swim atmosphere in which they are subject to accountability pressures. [It has] also suggested that teachers simply lack understanding of what they are supposed to do (s. 285).

Taplin och Chan fäster uppmärksamheten vid att när den nyexaminerade läraren i verkligheten upplever komplexiteten av arbetet blir det mycket svårt (ibland omöjligt) att implementera undervisningsidéer och metoder som de skapade och kom att tro på under utbildningen (Taplin & Chan, 2001 s. 286). Dessutom hävdar Wyndhamn (2000) att flera lärare känner sig osäkra på vad som faktiskt står i styrdokumenten och vad som krävs av dem i dagens skolsituation och det känns därför tryggt att luta sig mot tidiga erfarenheter och ett aktuellt läromedel (s. 161).

Förutom de problemställningar som nämnts ovan finns det andra hinder som kan uppstå när en lärare vill börja undervisa genom problemlösning. Dessa hinder har framförallt att göra med elevernas attityder och vanor samt skolverksamheten (Cai, 2003; Lester och Lambdin, 2007). Detta kommer inte att behandlas djupare här eftersom fokus ligger på lärarens praktiska arbete.

2.3.6 Slutsats

I ovanstående stycken har jag sammanfattat några tillgängliga forskningsresultat som ger viktig information om hur undervisning genom problemlösning kan utformas och bedrivas samt vilka problem som kan uppstå när läraren vill införa denna undervisningsform. Jag har framförallt redovisat de forskningresultat som är relevanta för lärarens praktiska arbete eftersom det är det som är av intresse för mitt examensarbete.

Emellertid är det viktigt att påpeka att det inte finns någon regel eller formel som garanterar framgång. I enlighet med detta hävdar Frank (2007) följande:

> Teaching mathematics in classrooms, no matter what the level, engages students, teachers, administrators, and schools in contexts that vary from day to day in ways that make it difficult to create a formula, a set of guidelines, or even a set of practices that all teachers should engage in (s. 226).

Forskningen försöker alltså inte att hitta eller utforma en undervisningsmall eller ett ideal utan syftar till att lyfta fram de aspekter som är viktiga att ta hänsyn till när man undervisar genom problemlösning.

2.4 Hur ser det ut i praktiken?

De forskningsresultat som har presenterats ovan har samlats in under de senaste decennierna, då problemlösning har varit i fokus inom skolmatematiken[5] och de är framförallt resultat från empiriska studier, alltså studier där forskarna har designat undervisningen. Men vilken inverkan har dessa resultat haft i praktiken? Hur mycket av den undervisning i matematik som bedrivs, både i Sverige och i andra länder, sker numera genom problemlösning? Nedan sammanfattar jag en del av den information som finns om matematikundervisning runt om i världen.

2.4.1 Problemlösning i olika länder

1999 TIMSS[6] videostudie beskrev hur undervisning i matematik bedrivs i flera länder som har fått bra resultat i TIMSS undersökningar: Japan, Australia, Tjeckien, Hong Kong SAR, Nederländerna, Schweiz, Japan och USA (NCES, 2003). Studien visade att i alla dessa länder bedrivs undervisningen framförallt genom problemlösning (NCES, 2003 s. 65). Studien visade också att det finns skillnader mellan länderna i olika avseenden, såsom lektionens syfte och dess matematiska innehåll, lektionens disposition, lärarens och elevernas roll och vikten som läggs vid olika moment och vid olika typer av arbete (NCES, 2003).

Undersökning och uppvisandet av alternativa lösningsmetoder under lektionen inte var en vanlig aktivitet i någon av länderna (NCES, 2003 s. 116). Däremot var de problem som behandlades under lektionerna i Hong Kong oftare utformade på ett sätt som betonade tillämpningen av olika metoder (s. 116). Dessutom visade studien att i alla länder var det läraren som pratade mest under lektionerna (s. 117).

Ett särskilt fall bland de länder som deltog i 1999 TIMSS[7] videostudie var Japan. Till skillnad från alla de andra länderna lade de japanska lärarna fokus på att presentera ett nytt innehåll genom att lösa några få problem, framförallt i helklass (NCES, 2003 s. 65). Dessutom var de problem som behandlades under de japanska lektionerna av högre procedurell komplexitet,

[5] Med skolmatematiken menar jag den matematik som ingår i det formella utbildningssystemet från förskola till och med gymnasieskola.
[6] TIMSS står för Trends in International Mathematics and Science Study. TIMSS undersöker kunskaper i matematik och NO hos elever i årskurs 4 och årskurs 8.
[7] De japanska lektionerna som användades i denna studie var inspelade under en tidigare TIMSS videostudie som genomfördes 1995.

omfattade oftare bevis och de relaterade till varandra oftare på ett matematiskt betydelsefullt sätt (NCES, 2003 s. 81).

2007 publicerade tidskriften ZDM The International Journal on Mathematics Education femton artiklar i en och samma volym där forskare och specialister i området summerade problemlösningens tillstånd inom forskning, undervisning och politik i olika länder från Europa, Asien och Amerika samt Australien[8] (Törner, 2007). Från artiklarna framgick tydligt att matematikundervisning och forskning om matematiskt tänkande, undervisning och inlärning i hög grad är kulturella frågor. Således har begreppet problemlösning olika betydelse i olika länder (Törner, 2007). Dessutom har problemlösningens karaktär och funktion i undervisningen successivt förändrats med åren i alla länder, med undantag för Kina och Singapore (Cai & Nie, 2007; Fan & Zhu, 2007; se också till exempel Boero & Dapueto, 2007; Clark, Merrilyn & Morony, 2007 och Hino, 2007).

Artiklarna visade också att i alla länder har problemlösning under en lång tid fått en betydande roll i kursplanen. Däremot blev det också påtagligt att de flesta länder inte har lyckats med att införa problemlösning i praktiken (se till exempel Boero & Dapueto, 2007; Clark m.fl., 2007; Schoenfeld, 2007). Undantagen var de asiatiska länderna Kina, Singapore och Japan där en kultur om undervisning genom problemlösning är väletablerad (Cai & Nie, 2007; Fan & Zhu, 2007; Hino, 2007).

Emellertid, i enlighet med vad som 1999 TIMSS videostudie visade, finns det skillnader i hur undervisningen utövas i dessa tre länder. Lärarna i Kina, liksom i Hong Kong (NCES, 2003 s. 65), lär eleverna huvudsakligen metoder som kan överföras och tillämpas på andra problem (Cai & Nie, 2007). Däremot betonas i Japan utvecklingen av det matematiska tänkandet (Hino, 2007). Det framgick också att medan de japanska eleverna alltid fick tid för att själva tänka ut olika lösningar, hände det sällan i Singapore att lärarna uppmuntrade eleverna att dela med sig av sina egna funderingar eller idéer (Fan & Zhu, 2007).

På samma sätt, i enlighet med de internationella riktlinjerna, är problemlösning i Sverige en viktig beståndsdel i den gällande läroplanen för grundskolan, Lgr11. Ett övergripande kunskapsmål i grundskolan är att ”eleven kan lösa problem och omsätta idéer i handling på ett kreativt sätt”.

[8] De deltagande länder förutom Australien var Brasilien, Kina, Frankrike, Ungern, Israel, Italien, Japan, Mexiko, Portugal, Singapore, Holland, Tyskland, Storbritannien och USA.

I kursplanen för matematik står att ”matematisk verksamhet är till sin art en kreativ, reflekterande och problemlösande aktivitet som är nära kopplad till den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen”. Vidare står att syftet med undervisningen i matematik är att ”bidra till att eleverna utvecklar kunskaper för att kunna formulera och lösa problem samt reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat”.

Dessutom är problemlösning en gemensam del av det centrala innehållet för alla årskurser. Således fastställs i kursplanen att ”genom undervisningen i ämnet matematik ska eleverna sammanfattningsvis ges förutsättningar att utveckla sin förmåga att formulera och lösa problem med hjälp av matematik samt värdera valda strategier och metoder”.

Däremot avspeglas styrdokumentens riktlinjer inte i praktiken. Regeringens utredning *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens* (SOU 2004:97) visade att ”trots kursplanernas betoning på problemlösning, kommunikation och argumentation så är matematik i praktiken grundskolans tystaste ämne” och att ” i allt högre grad får elever under lektionerna i matematik ägna sig åt att enskilt lösa lärobokens uppgifter” (s. 89). Samma utredning lyfter fram att många elever uppfattar matematik som ett pluggämne, ”ett svårt och tråkigt ämne uppbyggt av osammanhängande formler och obegripliga manipulationer” (SOU 2004:97 s. 88).

På samma sätt noterade Wyndhamn m.fl. (2000) i sina studier av de svenska styrdokumenten och klassrumsverksamheten i matematik- och teknikundervisningen att det finns en stor skillnad mellan den normativa användningen av begreppet problemlösning i läro- och kursplaner och den mer deskriptiva som man möter i klassrummet (s. 319). ”Problemlösning är för det stora flertalet lärare det tillfälle då man löser uppgifter med text från läroboken vad som än sägs i olika styrdokument” påpekar han (Wyndhamn, 2000 s. 319).

Dessutom visade Skolinspektionen (2009) i sin senaste kvalitetsgranskning av undervisning i matematik att:

> Elever får endast undervisning i begränsade delar av ämnet och de får därmed inte förutsättningar att utveckla olika förmågor såsom problemlösning, förmåga att se samband, resonera och uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt eller hantera matematiska algoritmer (s. 8).

I Skolinspektionens rapport står också att det tydligaste resultatet från analysen av klassrumsobservationerna är att eleverna tränar mestadels räkning efter givna regler eller procedurer, framförallt genom arbete med läroboken som upptar 90 procent av tiden i skolår 4-9 (s. 17).

2.4.3 Slutledning

De refererade rapporterna visar en nedstämd bild av hur matematikundervisning bedrivs i praktiken, något jag tyvärr kunde bekräfta själv under mina VFU-perioder på svenska högstadieskolor. I de flesta klasser arbetade eleverna huvudsakligen med uppgifter i läroboken eller med arbetsblad från lärobokens kopieringsunderlag. Lärarens roll var att svara på elevernas frågor och i de flesta fall lotsade läraren eleverna till lösningen av uppgiften Samtidigt hade jag också möjligheten att träffa lärare som arbetar för att förändra den traditionella undervisningsformen i matematik och som använder sig av problemlösning.

I min litteraturundersökning presenterade jag en sammanfattning av en del av den forskning som finns tillgänglig och som kan fungera som stöd och utgångspunkt. Emellertid är flera forskare eniga om att läraren behöver både specifika idéer och konkreta exempel på hur en undervisning genom problemlösning kan ske i praktiken (Ball & Bass, 2000; Cai, 2003; Lester och Lambdin, 2007). Det är därför jag blev intresserad av att undersöka hur de lärare som använder sig av problemlösning i sin undervisning planerar och utför sina dagliga lektioner. Dessutom är jag intresserad av att veta om de forskningsresultat som finns i området har fungerat som stöd för lärarna i utvecklingen av deras undervisning och om de avspeglas i praktiken.

3 Metod

Undersökningen lades upp som en fallstudie, eftersom jag ville undersöka processer och förändringar (Patel & Davidson, 2003). Dessutom avsåg jag att fördjupa mig i en avgränsad aspekt av ett problem under en begränsad tid (Bell, 2006 s. 20). Nackdelen med detta tillvägagångssätt är att en generalisering av resultaten i vanlig mening inte kan göras (Bell, 2006 s. 21).

3.1 Urval

Genom internet letade jag efter lärare i matematik, antigen på högstadiet eller gymnasiet, som hade uppmärksammats i media för sin undervisning genom problemlösning. Vid urvalet av personer för undersökningen var faktorer som ålder, kön, erfarenhet eller utbildningsbakgrund inte avgörande.

Fem lärare, fyra högstadie- och en gymnasielärare, utsågs som lämpliga kandidater för undersökningen utifrån den utgivna beskrivningen om lärarnas arbete. Samtliga dessa lärare tillfrågades om de ville delta i undersökningen. Tre av dem svarade positivt. Undersökningsgruppen bestod alltså av tre lärare i matematik som undervisar på olika högstadieskolor i olika orter[9]:

- Camilla är lärare i matematik och naturorienterande ämnen (NO) med 16 års erfarenhet. Hon jobbar på en fristående skola som ligger centralt i en stor stad. Skolan har cirka 630 elever i årskurserna förskoleklass till årskurs nio 9 (F-9).
- Felicia arbetar på en kommunal grundskola som har cirka 300 elever i årskurserna F-9. Skolan ligger i en jordbruksbygd i utkanten av en mellanstor stad. Hon har 11 års erfarenhet som lärare i matematik och NO ämnen.
- Hasse har 35 års erfarenhet som lärare i matematik och NO ämnen. Numera jobbar han också som lärarutbildare på högskolan. Hasse arbetar på en kommunal högstadieskola i utkanten av en mellanstor stad. Skolan har cirka 300 elever i årskurserna 7-9.

[9] Lärarnas namn är påhittat.

3.2 Datainsamlingsmetod

Enligt Patel & Davidson (2003) är det tillrådlig att använda flera undersökningsmetoder för att ge en så heltäckande bild som möjligt av ett fall. I den här undersökningen användes därför både observationer och intervjuer.

3.2.1 Observationer

För att kunna ge svar på en del av arbetets frågor bestämde jag mig att utföra observationer. Observationer är användbara då information önskas om beteende och skeenden i naturliga situationer (Patel & Davidson, 2011). ”Beteende” i detta sammanhang innefattar fysiska handlingar, verbal kommunikation, relationer mellan individer i gruppen och känslouttryck. Man bör dock räkna med att oväntade händelser kan inträffa som kan påverka resultaten (Patel & Davidson, 2011). Observation lämpar sig även för att kunna koppla ihop teori och praktik (Kihlström, 2007 s. 30). Genom att observera hur undervisningen bedrivs hos de olika lärarna och koppla samman observationerna till aktuell forskning kan man få ny kunskap om hur undervisning genom problemlösning kan utvecklas (Kihlström, 2007 s. 30). Däremot ville jag inte begränsa mina observationer till det som forskningresultaten visar. Jag håller med Kihlström (2007) om att observation handlar om ”att se med nya ögon på något redan bekant” (s. 31) och därför ville jag också hålla ögonen öppna för det nya och oväntade som kunde förekomma hos varje lärare.

Observationerna dokumenterades i form av ett löpande protokoll som innebär att försöka skriva så mycket som möjligt om skeenden eller processen som observeras (Johansson & Svedner, 2006). Jag håller med Kihlström (2007) om att det i ett klassrum händer mycket runt omkring och att det är omöjligt att se och dokumentera allt, därför var det lämpligt att bestämma i förväg vad som skulle registreras. I klassrummet verkade allt intressant men eftersom min undersökning framförallt hade lärarens arbete i fokus begränsade jag mina observationer till lärarens handlingar. Emellertid kan observationer av elevers beteende, särskilt om det handlar om att beskriva relationen lärare-elev, inkluderas.

Observationerna gjordes på matematiklektioner under en skoldag hos varje lärare. Jag observerade och registrerade lärarens arbete innan, under och efter några lektioner i matematik. Vid observationerna innan och efter lektionerna ställdes frågor till läraren med syfte att tydliggöra hans eller hennes arbete (se bilaga 1a). Emellertid kunde följdfrågor uppstå beroende på varje lärares svar.

Som en känd icke-deltagande observatör var jag närvarande i klassrummet men deltog inte i undervisningen (Patel & Davidson, 2003). Jag satt i bakgrunden och antecknade det som hände under lektionen. Min närvaro kunde dock ha påverkat hur individerna i klassrummet betedde sig, eftersom de inte hade tid att vänja sig vid att jag fanns där (Patel & Davidson, 2011).

För att kunna fånga samtalet mellan läraren och eleverna hade läraren en mikrofon på sig. Samtalet mellan lärare och elever analyserades inte ordaggrant, inspelning fungerade snarare som ett dataminne av lektionens förlopp.

Eftersom observationstiden hos varje lärare var mycket kort var det endast ett urval aspekter som registrerades. Bilaga 1a innehåller en förteckning över de utvalda aspekter som registrerades under observationerna.

3.2.2 Intervjuer

För att kunna få en bredare inblick i lärarens arbete kompletterades observationerna med intervjuer. På det viset kunde följdfrågor ställas och svaren kunde utvecklas och fördjupas (Bell, 2006 s. 158). I undersökningen genomfördes kvalitativa intervjuer med varje lärare. Intervjuerna hade alltså inte fasta frågor men frågeområdena var bestämda (se bilaga 1b) och frågorna anpassades vid varje intervju beroende på hur den intervjuade svarade (Johansson, 2006 s. 43). På så sätt hade intervjupersonen möjligheten att prata omkring frågorna och om de övriga tankar som väcktes (Bell, 2006 s.162). Alla intervjuer spelades in på band för att kunna analyseras ordagrant vid ett senare tillfälle.

När man ska genomföra intervjuer är det viktigt att göra noggranna förberedelser. Intervjuaren bör bland annat förbereda innehållet i intervjun, utprova frågorna och träna intervjuteknik (Patel & Davidson, 2011). Innehållet i intervjun bestämde jag i förväg (bilaga 1b) men jag anser att min intervjuteknik kunde ha blivit bättre om jag hade gjort en pilotstudie.

Nackdelar med intervjuer är att samtalet alltid kan påverkas av olika faktorer som individernas kön, ålder, social bakgrund eller etnisk tillhörighet. Dessutom pratar de intervjuade mindre spontant när de vet att de spelas in (Patel & Davidson, 2011).

3.3 Etiska överväganden

Undersökningen följde de fyra övergripande etikregler som vetenskapsrådet har formulerats (Vetenskapsrådet, 2011). Dessa fyra huvudkraven är följande (Patel, 2011 s. 63):

I. Informationskravet. Samtliga lärare som valdes för undersökningen fick ett brev med information om undersökningen. I brevet stod syftet med undersökningen, vad lärarnas medverkan innebar, hur undersökning skulle genomföras samt hur hantering av data skulle ske. I brevet framgick också att deras medverkan var frivillig.

II. Samtyckeskravet. Med brevet bifogades en lapp där lärarna kunde underteckna sitt samtycke till att delta i undersökningen. Ett samtycke från rektorn eller elevernas föräldrar behövdes inte enligt de tre deltagande lärarna.

III. Konfidentialitetskravet. Deltagande personer var informerade om att alla uppgifter skulle behandlas konfidentiellt. Det innebar att materialet som samlades på skolorna var endast tillgängligt till arbetets huvudansvariga. Dessutom innebar det att namnet på skolan och lärare inte skulle visas i den slutliga rapporten.

IV. Nyttjandekravet. Informationen som insamlades användes endast för forskningsändamål. Deltagarna i undersökningen informerades om att den insamlade information skulle användas till en uppsats som senare skulle offentliggöras.

3.4 Reliabilitet och validitet

Litteraturbakgrunden utgjorde den teoretiska ramen för formuleringen av observationsinstrumentet och intervjuformulären. Under undersökningen och i rapporten av resultaten, analysen och diskussionen följde jag huvudsakligen de riktlinjer och avgränsningar som finns i instrumentet och formulären. Däremot, som tidigare nämnts, ville jag inte begränsa mina observationer till det som finns i litteraturen och därför höll jag ögonen öppna för det nya och oväntade som kunde förekomma hos varje lärare.

För att i möjligaste mån säkra studiens validitet triangulerade jag undersökningen genom att använda två olika tekniker: observationer och intervjuer (Kihlström, 2007; Patel, 2011). Informationen från varje metod sammanfogades sedan i resultaten och analysen.

Enligt Patel (2011) är undersökningens reliabiliteten, när man använder strukturerade intervjuer eller observationer, i hög grad relaterad till intervjuarens och observatörens förmåga (s. 104). Under observationerna var jag den enda observatören. För att säkra undersökningens tillförlitlighet bestämde jag mig därför för att spela in lektionerna för att senare kunna jämföra mina anteckningar med det som fanns på bandet. Dessutom försökte jag att inte lägga in personliga bedömningar medan jag antecknade. På samma sätt spelade jag in intervjuer som senare transkriberades ordagrant. På så sätt undvek jag att missa delar av lärarens svar. Att videoinspela lektionerna skulle ha varit ett alternativ, men det var svårare och mycket tidskrävande att få tillstånd för det.

4 Resultat

Nedan presenterar jag resultaten från undersökningen. Resultaten från de tre fallen presenteras var för sig eftersom syftet med arbetet inte är att jämföra arbetssätt mellan lärarna utan att redogöra för olika möjliga sätt att undervisa genom problemlösning. Sammanfattningen av lektionernas förlopp gjordes i enlighet med de parametrar angivna i protokollet för observationerna.

Under skildringen av lektionens förlopp inkluderade jag delar av information som kom fram i intervjun. Avsikten med detta är att förtydliga det som observerades i klassrummet. Därefter sammanfattar jag resterande av informationen från intervjun.

4.1 Camilla

Hos Camilla observerades två lektioner, en med en klass i årskurs sex och en med elever i årskurs nio. Klassen i årskurs sex bestod av 26 elever och eleverna i årskurs nio var 24 stycken. Camilla tycker att klasserna är för stora och att hon skulle kunna arbeta bättre om de varit lite mindre.

4.1.1 Före lektionen

Camilla hade redan funderat på vilka problem som skulle behandlas under lektionerna med de båda klasserna. Problemen som hon väljer för en lektion bör enligt henne ha ett samband med det matematiska området eleverna arbetar med och med syftet för lektionen.

Lektionen med eleverna i årskurs sex

Eleverna i årskurs sex hade arbetat med bråk och procent och läraren hade två problem som behandlade båda begreppen. Problemen kom från en bok med en samling av problem som Camilla själv har publicerat i samarbete med en kollega. Hon använder ofta problem från sin egen bok men också från andra liknande böcker. För lektionen med eleverna i årskurs sex bestämde hon sig att använda problemet ”Pengar” (se bilaga 2a) från sin egen bok, för att hon tyckte att det var roligare att redovisa i efterhand.

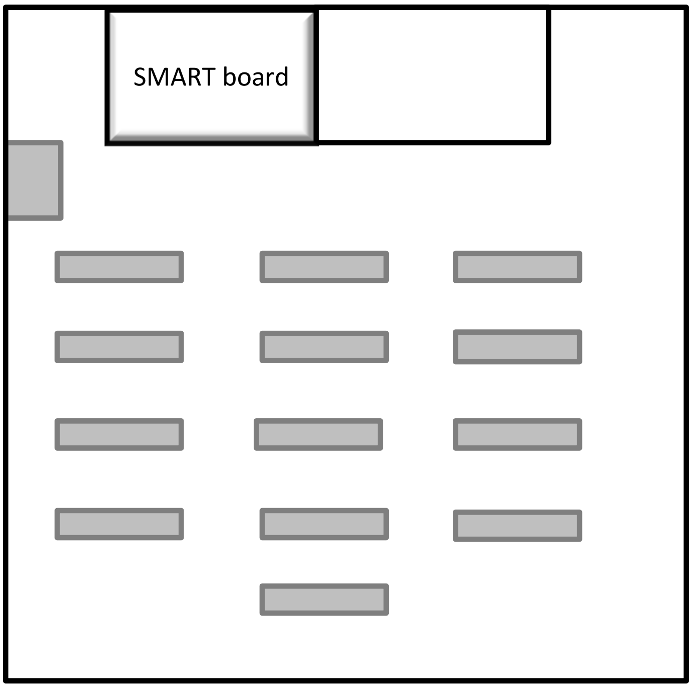
Lektionen med eleverna i årskurs nio

Eleverna i årskurs nio hade förberedelse inför nationella provet. Problemet som behandlades under lektionen kom därför från ett gammalt nationellt prov och hette ”Trixa med tärning” (se bilaga 2b).

Inför varje lektion kopierade Camilla uppgiften för att kunna dela ut dem till eleverna.

4.1.2 Under lektionen

Klassrummens planlösning var likadan för båda klasserna (fig.1). Två elever satt vid varje skolbänk. Längst fram i varje klassrum fanns en SMART board (interaktiv skrivtavla) och en vit tavla. Bredvid dessa fanns ett litet bord där Camilla ställde sin dator. Eleverna är vanligen placerade enligt figuren under Camillas lektioner. Ibland kan någon gruppering förekomma, beroende på uppgiften som eleverna ska jobba med, men Camilla gillar framförallt att arbeta med hela klassen.



Figur 1. Camillas klassrum

Lektionen med eleverna i årskurs sex

När Camilla började prata blev det tyst i klassrummet. Camilla tycker att det är viktig att ha ordning i klassen annars tappar man värdefull tid. Dessutom är det bra om alla elever är fokuserade och har med sig det material som behövs för lektionen.

De första tio minuterna av lektionen användes till att tydliggöra en läxa som eleverna hade fått tidigare. Efter den inledande delen började arbetet med dagens problem. Först visades problemet på den interaktiva tavlan och läraren läste upp det högt medan eleverna lyssnade under tystnad. När hon hade läst färdigt frågade hon eleverna om de hade någon fråga om problemet, om vad det handlade om. Därefter delade Camilla ut en kopia av problemet till varje elev. Eleverna klistrade in kopian av uppgiften i sin problemlösningsbok, som är ett anteckningsblock där de samlar sitt arbete med problemlösning under ett läsår (se bilaga 2c).

När alla hade klistrat in problemet i sin problemlösningsbok fick eleverna fem minuter med självständigt tyst arbete. Camilla ställde in en klocka som visades på skärmen. Hon säger att de brukar arbeta enskilt under fem minuter, men tiden kan variera beroende på problemet. Under den tiden funderar eleverna på hur de kan lösa problemet.

Eleverna arbetade helt tysta med problemet medan läraren gick runt och tittade på vad de gjorde. Camilla anser att det måste vara lugnt och tyst i klassrummet för att man ska kunna tänka på egen hand. Hon ställde ingen fråga till eleverna medan hon gick runt i klassrummet under dessa fem minuter. Hon säger att det här är något som hon har lärt sig att göra, att titta men att inte säga någonting. ”Man behöver ge eleverna mer tid att tänka utan att blanda sig i, i hur de tänker”, säger hon.

När klockan ringde började eleverna diskutera med kamraten bredvid. Det blev en livlig diskussion när varje elev försökte förklara för sin kamrat hur den egna lösning var. Medan eleverna diskuterade gick Camilla runt och tittade på elevernas arbete samtidigt som hon höll ordning i klassen. Hon frågade eleverna om deras lösningar och uppmanade dem att förklara sig tydligt. Hon svarade inte på direkta frågor om problemets lösning och uppmanade eleverna att i stället fråga sin kamrat. Efter tio minuters diskussion bestämde läraren att de skulle redovisa olika lösningar. Camilla plockade upp tre olika problemlösningsböcker. Hon tycker att det är viktigt att läraren snabbt ska kunna värdera elevernas lösningar för att visa de som är lämpligast för varje klass vid varje lektion. Detta är en förmåga som hon har utvecklat med tiden.

Camilla visar den första lösningen på den interaktiva tavlan direkt från en av de tre problemlösningsböcker. Hon har använt den sorts tavla för sina lektioner sedan sex år tillbaka. Hon tycker att det tar för lång tid för eleverna att själva skriva sina lösningar på tavlan. Hon anser därför att användning av en interaktiv tavla underlättar uppvisningen av elevernas arbete och på så sätt sparas värdefull tid. Dessutom uppmuntras eleverna att skriva sina lösningar tydligt, eftersom de vet att deras anteckningar kan visas på skärmen och då kan de andra i klassen lättare förstå hur de tänkte. Hon menar att eleverna behöver skriva sina lösningar både med tydligt skrivstil och på ett sätt där man kan tydligt följa den röda tråden. Camilla anser att eleverna behöver träna mycket på detta.

För denna lektion presenterade Camilla först en elevs lösning som var felaktig, med syfte att starta en diskussion med hela klassen. Så småningom visades ytterligare en felaktig lösning och till sist en som var korrekt löst. Eleverna vars lösning visades på tavlan försökte förklara för de andra hur de hade tänkt när de löste problemet. Läraren uppmanade dem att förklara sig tydligt. Eleverna i klassen var mycket engagerade, många ville förklara varför de tyckte att lösningen var fel eller rätt. När någon får ordet från läraren blir de andra tysta och lyssnar på sin kamrat. Camilla tycker att det är mycket viktigt att läraren skapar en miljö i klassrummet där alla känner sig bekväma med att prata. Hon anser att läraren måste vara tydlig och sträng för att skapa en sådan miljö.

Läraren lät eleverna prata fritt men påpekade samtidigt på olika aspekter som var viktiga att komma ihåg. Hon pekade till exempel på att det saknades en kontroll (utvärdering) i två av lösningarna. Hon anmärkte också på att en elev hade glömt att skriva enheterna och påminde dem om vikten av att veta vad problemet handlar om (i detta problem handlade det om pengar, alltså enheten kronor).

Efter tjugo minuter av diskussion blev eleverna överens om varför lösningarna var rätt eller fel. Camilla förklarade inte vidare. Under tiden som diskussionen pågick var det eleverna som pratade mest medan läraren höll ordning, uppmanade dem att lyssna och tydliggjorde några detaljer i lösningarna. Hela arbetet med problemet i klassen årskurs sex tog cirka 35 minuter. De sista minuterna spelade eleverna matematiska utmaningar på sina egna datorer för att färdighetsträna. De brukar spela på en webbsida skapad för skolarbete där de kan träna med olika räkneoperationer[10].

[10] www.mangahigh.com

Lektionen med eleverna i årskurs nio

Med eleverna i årskurs nio använde Camilla de första 40 minuterna till att redovisa två problem som de hade försökt lösa under tidigare lektioner. Camilla ville förklara hur man får information från ett problems text och hur man formulerar ett bra bevis som blir godkänt på de nationella proven.

Därefter började arbetet med dagens problem. Camilla följde samma tillvägagångssätt som med klassen i årskurs sex. Hon tycker att det är bra att ha en viss struktur på lektionerna så att eleverna vet vad de gör, i vilken fas de befinner sig. Först visades problemet på den interaktiva tavlan och läraren läste upp det högt. Sedan frågade hon eleverna om de hade någon fråga om problemet och därefter delade Camilla ut en kopia av problemet till varje elev. Eleverna klistrade in kopian av uppgiften i sin problemlösningsbok (bilaga 2c).

När alla hade klistrat in problemet i sin problemlösningsbok fick eleverna fem minuter för enskilt och tyst arbete. Camilla ställde in klockan som visades på skärmen. Efter fem minuter fick eleverna välja att fortsätta arbeta enskilt eller diskutera med kamrater bredvid. De flesta elever ville fortsätta arbeta enskilt. Inför det nationella provet ville de försöka lösa problemet själva utan att diskutera med kamraterna.

Camilla gick runt och svarade kort på några frågor medan hon uppmanade eleverna att förklara sig med ord och med matematiska uttryck. Efter femton minuter började eleverna diskutera mer med varandra och flera ville ha Camillas hjälp. Hon gick till några av dem medan hon sade till andra att fråga sin kamrat. Men hon sa inte så mycket till eleverna, hon uppmanade dem i stället att fortsätta tänka:

> Mitt motto som lärare är ”förklara aldrig för eleverna någonting som de själva kan komma på”. När de frågar någonting, det som hjälper mest är att fråga ”har du läst?” och sen ”kan du läsa högt för mig?” eller ”kan du förklara frågan för mig?”. När de läser högt brukar de själva förstå sin fråga. Ibland kan man ge tips, ibland säger man bara ”du behöver tänka fortfarande”. Men säg aldrig svaret! Ibland, när de är trötta är det bättre att fortsätta nästa dag. Eleverna har också lärt sig att innan de frågar mig, måste de fråga sin kamrat. Det är väldigt bra också för kamraten att kunna förklara och jag sparar en del frågor. Det är viktigt att lära eleverna att fråga varandra och hjälpa varandra.

(*Lärare Camilla*)

Efter ytterligare några minuter upptäckte Camilla att de flesta elever hade fastnat på samma del av problemet. Hon ställde sig längst fram och föreslog för dem att gå tillbaka till början och kontrollera allt de hade gjort. När lektionen var slut fortsatte Camilla att handleda några elever. Det var svårt för dem att sluta, de ville lösa problemet. Camilla tycker att det är synd att tiden ibland inte räcker till. ”De [eleverna i årskurs nio] var väldigt nära nu och då måste vi lämna det tills imorgon, det vore mycket roligare om man kunde göra klart nu” menar hon. Men att fortsätta nästa dag med samma problem är ingenting ovanligt, ibland arbetar en klass med samma problem en hel vecka. ”Och då är de superöverlyckliga när de klarar det” säger Camilla.

4.1.3 Efter lektionen

Camilla tyckte att det matematiska problemet i årskurs sex kanske var lite för enkelt för merparten elever i årskurs sex. Enligt Camilla blev det då inte en utmaning för dessa elever, de visste alltså hur de kunde gå tillväga för att lösa det från början. Hon ville senare fortsätta med andra problem som behandlar bråk och procent, men som möjligtvis kunde vara lite svårare.

Eleverna i årskurs nio skulle fortsätta nästa lektion med samma problem och senare med likadana problem inför det nationella provet. Det hade fortfarande svårt att formulera ett bevis och att generalisera sina resultat.

4.1.4 Från intervjun

Vad betyder problemlösning i Camillas undervisning?

För Camilla betyder problemlösning att arbeta med ett problem där man inte vet hur man gör för att lösa det. Om man vet hur man gör handlar det om en uppgift och inte om ett problem, anser hon. Hon anser vidare att det är bra för eleverna att veta att det är svårt att lösa ett problem och att det ska ta tid. Hon brukar berätta det för eleverna när de ska lösa ett problem för första gången:

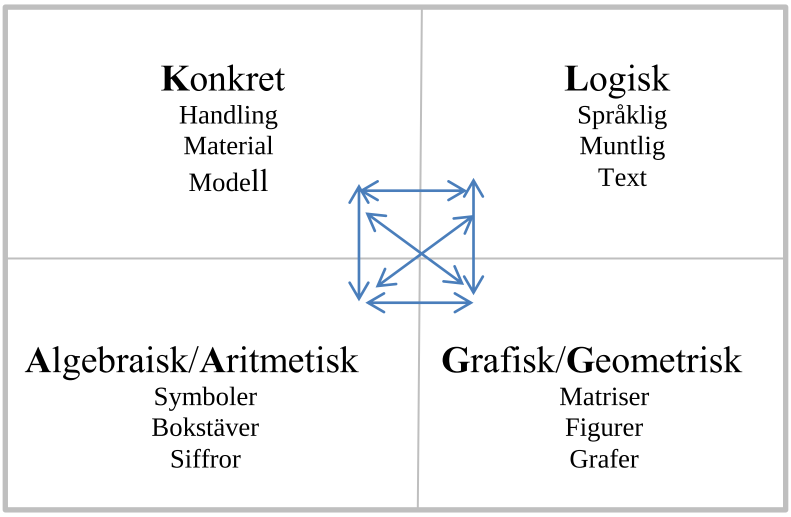
> Det jag brukar göra, jag ritar, alltid med sexan och sjuan, jag ritar fem olika ansikten, ett glatt ansikte, som är början på problemet, alla börjar glada, sen ett litet förvirrat ansikte för att de säger

alltid ”oj, jag kommer inte ihåg hur man gör”. Men det ska man aldrig komma ihåg för att ett problem är det som man inte vet hur man gör. Sen nästa ansikte är helt förvirrat och börjar bli nästan ledsen, men man går vidare att tänka, tänka. Sen kommer nästa ansikte, en som är ”det finns hopp, jag ser ett ljus”, jag är inte säker men jag börjar. Och sen kanske man går genom den här fasen flera gånger: jag ser ett ljus, jag kanske ska lösa det, gå tillbaka, jag provar, nej det funkar inte, förvirrat, en gång till, ett hopp, och till sist löser man uppgiften och så är man överlycklig.

(*Lärare Camilla*)

Hur lär sig eleverna olika strategier för att lösa problem?

I sin problemlösningsbok har alla elever klistrat in en så kallad KLAG matris, som Camilla lärde sig om under kursen i problemlösning[11] (fig. 2). Med hjälp av matrisen förklarar Camilla för eleverna de olika representationsformer[12] som kan användas för att lösa problem. Det handlar inte om att skapa en lista av olika strategier utan att eleverna ska kunna formulera sina lösningar på olika matematiska sätt. När de löser ett problem i klassrummet kan eleverna se olika lösningar från sina kamrater och ibland också från Camilla, när hon vill visa ett annorlunda sätt att lösa problemet. På så sätt får de se ett brett utbud av olika typer av lösningar och alla, även Camilla, lär sig andra sätt att tänka.



Figur 2. Representationsformer/Uttrycksformer **KLAG** matrisen

[11] För ytterligare förklaring om KLAG matrisen se boken Hagland K. m.fl. (2005) *Rika matematiska problem*. Stockholm: Liber.

[12] Enligt Hagland m.fl. kan de begrepp och procedurer som kommer till användning när man löser ett problem representeras på olika sätt, det vill säga man kan använda sig av olika uttrycksformer eller representationsformer (*Rika matematiska problem*, s. 32)

Hur utvecklades Camillas undervisning?

I början av sin lärarkarriär arbetade Camilla endast med läroboken. Senare började hon lösa problem med klasserna som ett sorts evenemang, för att göra något kul. Men hon insåg att hon inte visste hur man använder problemlösning i undervisningen, vilket problem hon skulle välja och varför. Hon visste inte att problemlösning har ett syfte. Därför bestämde hon sig att läsa en kurs om problemlösning[13]. Camilla anser att hon genom kursen fick en verktygslåda för att arbeta med problemlösning, efter kursen visste hon vad hon behövde göra och hur hon skulle göra det.

Förutom kursen har Camilla läst mycket om den forskning som finns om problemlösning. Hon har också träffat andra lärare för att lära sig andra sätt att undervisa. ”Läraren måste läsa och leta information” anser hon.

Efter kursen började hon att arbeta med problem i sin undervisning. Men eleverna var inte vana vid att använda en hel lektion eller flera lektioner för att lösa endast ett problem och Camilla själv visste inte om det var lämpligt att ägna så mycket tid till att lösa ett problem. Med tiden insåg hon att det var bra att ägna mycket tid åt problemlösning och att hon ändå hinner täcka alla områden i kursplanen. ”Det som man måste göra är att verkligen använda varje lektion maximalt”, säger hon.

Camilla diskuterade också kursen med övriga lärare och skolans rektor som övertygades om att alla lärare i matematik som jobbade på skolan skulle läsa kursen. Numera jobbar alla lärare på skolan på samma sätt och det har underlättat Camillas arbete. När eleverna kommer till högstadiet är de redan vana vid att arbeta med problemlösning. De har lärt sig att samarbeta, lyssna på varandra och att ge och ta positiv och negativ kritik.

Camilla har lärt sig att använda problemlösning som ett undervisningsredskap som kräver ha mycket tålamod under lektionerna för att ge eleverna tid för egen tankeverksamhet. Hon betraktar sig fortfarande som en katederlärare eftersom hon tycker om att stå framför klassen och berätta. Men tidigare var det hon som pratade mest och eleverna som jobbade under tystnad. Nu däremot gör alla i klassrummet lektionen tillsammans och de lär sig av varandra.

Camilla undervisar inte alltid utifrån ett problem utan ”kanske en gång i veckan”, säger hon. De andra lektionerna undervisar hon om teorin eftersom hon tycker att eleverna behöver det

[13] Camilla läste kursen ”Matematisk problemlösning i skolan” vid Högskolan i Dalarna.

för att senare kunna lösa problem. ”[Genom problemlösning] Man lär sig ingenting helt nytt, matematiskt”, anser Camilla, ”men man lär sig att behärska det man kan”. Hon går därför igenom ett område, där eleverna lär sig något nytt enligt henne, och senare arbetar alla tillsammans under lektionen med dessa uppgifter från läroboken som hon anser att eleverna kan ha svårt med att lösa. Hemma arbetar eleverna med några andra uppgifter som finns i läroboken. Enligt Camilla är dessa uppgifter lättare och bra för att träna färdigheter[14].

Vilka faktorer är de viktigaste att ta hänsyn till när man vill börja undervisa genom problemlösning?

Camilla tycker att det är svårt för en nyexaminerad lärare att börja arbeta med problemlösning i sin undervisning eftersom arbetet kräver mycket från läraren. I början finns det mycket i en lärares arbete som är nytt och som man måste förstå och bli bekväm med. Hon anser därför att läraren under de första åren bör lära känna sig själv i sin roll som lärare och att ”överleva” i klassrummet. Hon hade själv jobbat i tio år när hon började med problemlösning. ”Jag tror att jag var mogen för det”, säger hon.

När man ska börja med problemlösning anser hon att ordning i klassrummet är av stor betydelse. Det tar tid innan eleverna gör som läraren säger, framförallt när eleverna är vana att endast räkna i läroboken och att inte fokusera på det som görs under lektionen. Att skapa en bra miljö där alla kan prata fritt är också viktigt.

Dessutom måste läraren förstå syftet med problemlösning i undervisningen. Det är viktigt för läraren att kunna se det matematiska innehållet i ett problem och att ha klart för sig vad man vill uppnå med problemet. ”Jag visste inte att det fanns ett mål, mer att det var kul att göra”, säger hon, ”jag vet nu att det är ett undervisningsredskap också”.

[14] Att träna färdigheter innebar för alla tre lärare i undersökningen att arbeta med uppgifter där eleverna inte behöver resonera eller argumentera för att kunna komma till lösningen. Eleverna behöver bara följa en beräkningsprocedur. Denna sort uppgifter finns enligt lärarna i läroboken.

4.2 Felicia

Hos Felicia observerade jag undervisningen med två olika klasser, en i årskurs åtta och en liten klass med elever i årskurs nio som läste matematik som tillvalsämne[15]. Klasserna i årskurs åtta och nio bestod av tolv respektive åtta elever. Felicia berättar att hennes klasser vanligtvis är små men ibland har hon större klasser med ungefär 25 elever.

4.2.1 Före lektionen

Lektionen med eleverna i årskurs åtta

För eleverna i årskurs åtta hade Felicia planerat ett prov. Provet bestod av två delar, en som eleverna skulle svara enskilt och en som skulle svaras i grupp. Resultat från mina observationer har som fokus gruppuppgiften eftersom jag ansåg att den var mest relevant för mitt arbete. Bilagan 3a visar gruppuppgiften.

Lektionen med eleverna i årskurs nio

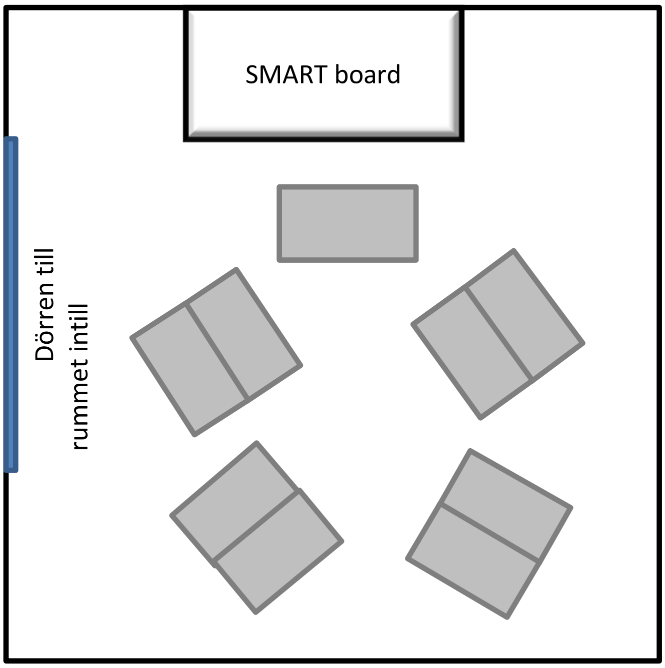
För eleverna i årskurs nio hade hon ett problem som behandlade begreppet procent (bilaga 3b). Hon har ofta ett fokus område och eleverna arbetar kring det genom olika aktiviteter i klassrummet. Problemet ”godispåsen” hade tre frågor med stigande svårighetsgrad samt en fråga där eleverna skulle sammanfatta sitt arbete med problemet. Felicia brukar välja problem med olika svårighetsgrader. På så sätt anser hon att de svaga eleverna blir motiverade när de kan lösa åtminstone en del av problemet, samtidigt som de skickliga eleverna kan ha en utmaning i samma problem. Men hon tycker att det är svårt att hitta sådana problem i litteraturen. ”Det har blivit min utmaning”, säger hon, ”att försöka hitta uppgifter som passar alla typer elever”.

[15] Skolan bjuder på det som kallas ”Elevernas val”. Alla elever i årskurs nio väljer ett ämne som de vill fördjupa sig i. Eleverna brukar ha ett par lektioner i sitt tillvalsämne varje vecka.

4.2.2 Under lektionen

Båda klasserna hade sin lektion i matematik i samma klassrum, rummets planlösning visas i figur 3. Vid varje bord kunde fyra elever sitta tillsammans. Eleverna sitter alltid i små grupper eftersom Felicia tycker att arbete i små grupper är det som mest främjar elevernas lärande. ”Min filosofi är att för att lära sig matte behöver man prata matte”, fortsätter hon vidare, ”man måste sätta ord på det man kan, och genom att prata med kompisarna, som är ungefär på samma nivå, kan man driva diskussionen framåt”.

Framtill i rummet fanns ett skrivbord där Felicia ställde sin dator och längst fram fanns en stor interaktiv tavla. Intill rummet fanns ett annat rum med två avlånga bord där eleverna också kunde sitta senare om de ville.



Figur 3. Felicias klassrum

Lektionen med eleverna i årskurs åtta

Provet började med delen för enskilt arbete. Eleverna arbetade med den delen under 30 minuter. Därefter hade de en tio minuter lång paus. När de kom tillbaka till klassrummet satte de sig i grupper med tre elever enligt en lista som Felicia hade gjort i förväg för arbetet med gruppuppgiften. Hon tycker att det är svårt att utforma grupper som verkligen fungerar bra.

Ibland sätter hon elever tillsammans som hon anser har samma nivå, ibland blandar hon svaga elever med skickliga elever. Hon tycker att hon har blivit bättre på att bedöma elevernas kunskapsnivå och det hjälper när hon ska utforma grupper. Det viktigaste är att alla som är i gruppen har möjligheten att bidra till att lösa uppgiften, anser hon.

Därefter visade Felicia problemet på tavlans skärm. Eleverna fick då tre minuter för att enskilt läsa det. Felicia uppmanade dem att läsa noggrant och att fundera på hur de kunde lösa uppgiften.

Efter tre minuter kunde eleverna börja med diskussionen i sin grupp. Medan de diskuterade gick Frida runt, ibland satte hon sig bredvid en grupp men lät dem diskutera fritt utan att blanda sig i diskussionen.

Efter tio minuter finns det några elever som kände sig frustrerade för att de inte visste hur de kunde svara på uppgiftens frågor. Felicia satte sig vid de olika grupperna och försökte hjälpa dem att fortsätta vidare. Hon tycker att hon med tiden har utvecklat sin förmåga att ställa frågor till eleverna och att inte lotsa dem när de löser ett problem. Felicia berättade också att hon inte har jobbat länge med klassen och att eleverna fortfarande inte är vana vid hennes arbetsmetod. De är vana vid att sitta och räkna uppgifter i läroboken under tystnad, att diskutera och motivera sina lösningar var fortfarande svårt för dem. Enligt henne tar det ungefär en hel termin för eleverna att bli vana vid hennes sätt att undervisa.

Diskussionen med gruppuppgiften pågick under 30 minuter. Eftersom det handlade om ett prov gjorde Felicia ingen sammanfattning i slutet. De ska redovisa uppgiften tillsammans senare, när eleverna får tillbaka resultatet från provet.

Lektionen med eleverna i årskurs nio

I början av lektionen med eleverna i årskurs nio berättade Frida för dem att de skulle arbeta med ett problem som handlade om procent (bilaga 3b). Hon delade ut en kopia av problemet till varje elev samt en liten ask med godis. De skulle arbeta i par och Felicia påminde dem om att motivera sina lösningar. ”Jag är noga med att det ska diskuteras och antecknas under tiden de jobbar”, säger hon.

Eleverna började arbeta omedelbart med problemet. I vanliga fall börjar Felicia med en kort introduktion av dagens problem eller uppgift. Det här var en särskild klass som har valt att ha extra lektioner i matematik och som vanligen har en annan lärare. Medan eleverna arbetade med uppgiften gick läraren runt, tittade på deras arbete och svarade på frågor. Men hon uppmanade alltid att i stället fråga kamraten bredvid. Hon tycker att genom att arbeta med problem har hon utvecklat sin förmåga att inte lotsa eleverna:

> Jag försöker att låta eleverna komma till tals lite mer och uttrycka sina tankar och hur de funderar, i stället för att komma fram och säga ”så här gör man”. Jag tror att jag har blivit bättre, jag har mycket kvar, men jag har blivit bättre.
>
> *(Lärare Felicia)*

Det är svårt för Felicia att definiera sin roll som lärare under lektionen, men hon tycker att det finns en stor skillnad mot det hon gjorde tidigare:

> Jag upplever att jag samtalar mer med eleverna om matte. Jag försöker hitta ett samspel på något sätt att jag kan möta eleverna på rätt nivå, för att jag sitter inne med mer matematisk kunskap än vad mina elever oftast gör, vilken orsakar en obalans i diskussionen. Det är deras kunskap som har blivit fokus i stället, det är inte jag som förmedlar mina kunskaper utan tillsammans bygger vi kunskapen på något sätt.
>
> *(Lärare Felicia)*

Medan eleverna löser problemet tittar Felicia på deras arbete. Hon påpekar för de flesta att de inte hade skrivit ner sina resonemang om lösningen (se till exempel bilaga 3c). Hon uppmanade dem att förklara skriftligt, med ord, sina lösningar. Hon visar för några elever hur man kan skriva en tydlig sammanfattning av arbetet, där man uttrycker sig matematiskt och har en logisk ordningsföljd. Felicia berättar att hon undervisar lite om hur man kan gå tillväga i problemlösning. Hon pratar mycket om hur man kan redovisa en lösning. Hon anser emellertid att hon behöver undervisa mer om det så att eleverna kan ha ett funktionellt verktyg när de löser olika problem.

Under 30 minuter diskuterade eleverna uppgifter med varandra. Under tiden blev flera elever frustrerade när de inte kunde hitta lösningen på alla frågor i problemet. Det blev många frågor för Felicia.

Därefter ville Felicia sammanfatta arbetet de hade gjort under lektionen. Hon frågar eleverna om deras lösningar och hon skriver ner dem på tavlan. Hon skriver inte ner beräkningar, alltså siffror, utan i stället uttryck med ord som förklarar hur man beräknar procent för att kunna svara på uppgiftens frågor. Hon påpekar under tiden att en annorlunda lösning inte alltid är felaktig. ”Jag försöker ha ett klimat i klassrummet där man inte känner sig utsatt när man får en fråga och svarar fel på det”, säger hon. Ofta frågar hon de svaga eleverna för att hon tycker att alla kan lära sig något från andras misstag.

I slutet gjorde hon en sammanfattning om det de hade lärt sig av uppgiften. Felicia tycker att det är viktigt att kolla av vad eleverna fick med sig från arbetet. ”Kanske har det kommit fram grejer som jag inte hade tänkt på, så det är bra att lyfta dem med hela klassen”, säger hon, ”eller missuppfattningar som har uppstått, man måste plocka bort dem”. Under sammanfattningen uppmanade läraren eleverna att lägga upp bra bevis, förklaringar och resonemang i sina lösningar genom att använda en korrekt matematisk terminologi.

Felicia har alltså vanligtvis en viss struktur på lektionen där det först finns det en kort introduktion av problemet, därefter självständigt arbete i små grupper och till sist en sammanfattning. Men ibland har problemet ett annat syfte och då förändras lektionens mönster:

> Jag har några problem där egentligen handlar om att just tänka efter hur man löser problem, man börjar med att fundera vad behöver jag veta för att kunna lösa problemet? Hur ska jag gå tillväga? Vilka beräkningar behöver jag genomföra innan själva lösandet, så att man liksom strukturerar det först.
>
> *(Lärare Felicia)*

4.2.3 Efter lektionen

Felicia skulle senare titta på proven från klassen i årskurs åtta. Hon räknar inte poäng på provet utan ser efter vilka begrepp eleverna har förstått och vilka färdigheter de har klarat. På så sätt kan hon senare bestämma hur klassen ska fortsätta.

Eleverna i klassen som har matematik som till tillvalsämne fick en ny gruppgift att arbeta med tills nästa lektion. Det handlade också om procent, om shopping och reapriser.

4.2.4 Från intervjun

Vad innebär problemlösning i Felicias undervisning?

Felicia tycker att mycket av hennes undervisning handlar om att lösa matematiska problem. Hon använder inte bara problem där det gäller att hitta, diskutera och beräkna en lösning, utan också aktiviteter, såsom laborationer, där eleverna kan utforska och upptäcka en matematisk idé. ”Det är också lite problemlösning kan jag tycka”, säger hon. Men det som hon gillar mest att arbeta med är öppna problem, där det inte finns några färdiga villkor. ”Det är det bästa som finns”, säger hon, ”att jag ger eleverna förutsättningarna och de kan själva skapa problemet”.

Hur utvecklades Felicias undervisning?

”Jag började väldigt traditionellt”, säger hon, ”med mycket genomgångar och mycket läroboksräknande”. Hon lade mycket fokus och tid på sin undervisning i NO, som ställde höga krav på henne. Men efter ett tag kände hon att det var undervisning i matematik som hon var mest intresserad av och att det hon gjorde i klassrummet inte var det hon hade tänkt sig när hon blev lärare. Hon funderade mycket på det men kunde inte riktigt sätta någonting i verket.

2005 träffade hon Anna[16], en annan lärare som hade jobbat på en skola med en hög andel barn med utländsk bakgrund. Anna hade varit tvungen att konkretisera mycket i sin undervisning i matematik för att kunna nå dessa barn. Felicia och Anna blev ansvariga för ämnet matematik och började arbeta tillsammans. De började fundera på hur de tydligare kunde föra fram till eleverna vad som är uttryckt i kursplanen, för att göra dem medvetna om vad de lär sig i skolan. Så småningom fick de idén att de behövde konkretisera mer i undervisningen. ”Vi hade bara liksom någon känsla av det vi ville göra”, säger Felicia.

De fick ett stipendium och bestämde sig för att jobba med att skapa ett varierat arbetssätt i matematik. Men enligt Felicia var det svårt för dem att hitta bra uppgifter riktade mot högstadielever. ”Jag hittade mängder av dem men de hade ingen röd tråd”, berättar hon, ”det var bara liksom en samling av övningar och vi var mer inne på att varje övning ska ha ett tydligt syfte annars kan vi strunta i det”. Hon tycker att det finns många som i sin

[16] Namnet är påhittat.

undervisning använder sig av problemlösning eller laborationer som tillfälliga händelser utan att ha en tydlig pedagogisk tanke.

Därför bestämde de sig att utforma ett eget läromedel med uppgifter av olika slag, bland annat laborationer, problem och färdighetsträning. Under processen läste de en del av den litteraturen som finns i området, men Felicia tycker att det hjälpte bara lite grann. Enligt henne var det svårt att definiera vad de egentligen letade efter och dessutom anser hon att det finns för lite svensk forskning.

Felicia började med att använda en av deras egen utformade uppgifterna en gång i veckan i stället för läroboken. De lade stor vikt vid att få eleverna att förstå att dessa tillfälliga lektioner var lika värdefulla som de andra, när de arbetade med läroboken. Successivt började Felicia använda sina uppgifter som grund för sin undervisning och läroboken som ett komplement. Idag använder hon ingen lärobok utan i stället letar hon upp uppgifter som passar med området som eleverna arbetar med. Framförallt använder hon uppgifter från sitt eget läromedel.

Felicia anser att hon också behöver ha genomgångar, alltså undervisa i vissa delar så att eleverna får verktyg för att kunna lösa problem. Ibland förekommer hennes genomgångar efter en laboration där hon sammanfattar det som de lärde sig med det praktiska arbetet. Hon anser att genom en laboration kan eleverna skaffa sig en större förståelse för ett matematiskt begrepp. Senare kan eleverna använda den kunskapen för att lösa problem.

Under utvecklingen av sin arbetsmetod möte Felicia och Anna olika hinder. Ett stort hinder var traditionen i matematikundervisning:

> Det finns en stark tradition som är bunden till att man jobbar i läroboken, att det handlar om att arbeta sida efter sida. Man har mycket att kämpa för att det är förankrat både hos elever och hos föräldrar. Och det är den generella idén i samhället om hur det måste gå i matteundervisning.
>
> *(Lärare Felicia)*

Tiden var också ett hinder. De fick ingen extra tid för att arbeta med projektet. De hade extra tid för planeringen eftersom de var ansvariga för ämnet och bestämde sig för att prioritera projektet när de träffades. ”Det är inte alltid att man har den chansen i sitt schema att sitta tillsammans med en kollega tre timmar i veckan för att göra något pedagogiskt utvecklande", säger hon.

Dessutom saknar hon en drivande delaktighet från skolledningen. Hon tycker att skolledningen brukar ge klartecken för utvecklingen av ett projekt, men sedan ger de inga förutsättningar för att genomföra det.

Vilka faktorer är de viktigaste att ta hänsyn till när man vill börja undervisa genom problemlösning?

Felicias grundläggande tanke är att utgå från kursplanen och bestämma de mål man ska undervisa för. Därefter tycker hon att det är lämplig att titta på vilka läromedel som finns och som kan stötta undervisningen. Senare är det bra att leta efter laborativa lektioner och att fokusera på elevernas aktiva arbete.

Om man är osäker på vad det är man vill göra, kan man börja med att inte arbeta med läroboken en gång i veckan. På så sätt kan man upptäcka många olika alternativa undervisningsformer. Felicia tycker inte att läromedel är något dåligt men det ska inte styra undervisningen. "Lägg upp undervisningen från dina mål", säger hon, "i stället för att titta i läroboken och följa vad står i den".

4.3 Hasse

Hos Hasse observerade jag under två lektioner, en med en klass i årskurs sju och en med elever i årskurs nio. Klassen i årskurs sju bestod av 20 elever. Eleverna i årskurs nio var 23 stycken.

4.3.1 Före lektionen

Hasse visste redan vilka problem som skulle behandlas vid varje lektion. Syftet med lektionen var inte samma för de båda klasserna så Hasse använde sig av olika slags problem.

Lektionen med eleverna i årskurs sju

Eleverna i årskurs sju skulle ha prov två dagar efter mitt besök. Därför var uppgiften som de skulle arbeta med, enligt Hasse, en repetitionsuppgift. Eleverna hade arbetat med procent och Hasse ville arbeta vidare för att stärka elevernas ”känsla” för när man använder procent. De hade arbetat med konkreta situationer och under denna lektion skulle de arbeta med ett mer abstrakt exempel (uppgiften visas senare i delen *Under lektionen*). Hasse skapade själv uppgiften för den här klassen och den här lektionen. Han tycker att en viktig del av sin roll som lärare är att formulera bra problem som fungerar optimalt i klassrummet. I det vanliga vardagarbetet skapar han ofta själv uppgifterna utifrån den nivå som han anser att eleverna befinner sig i sin utveckling:

> Det är inte lätt att hitta i böckerna ett bra exempel som problematiserar precis det som just min grupp nu, den här veckan, befinner sig. Jag kan inte hämta en uppgift från någon annanstans för att det inte fungerar, inte med de begrepp jag håller på med.
>
> *(Lärare Hasse)*

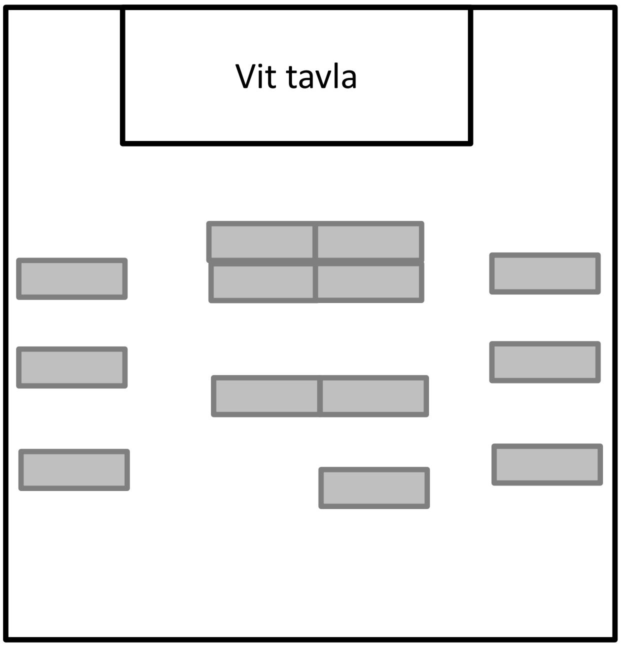
Lektionen med eleverna i årskurs nio

Eleverna i årskurs nio skulle börja med ett nytt område som i läroboken heter *Samband*. Enligt Hasse handlar området mycket om att tolka grafer. Därför valde han ett exempel där eleverna skulle tolka ett diagram (bilaga 4b). För sina lektioner väljer han problem som i första hand ger förståelse för ett begrepp. Han tänkte därför att eleverna kunde upptäcka och förstå nya saker om grafer genom att själva förklara det som visades i diagrammet. ”Det betyder inte att hela klassen kommer att se samma sak, de ska komma olika långt”, säger han, ”problemet är bara för att börja se den information som finns i en graf”. Uppgiften var kopierad från en bok och Hasse har använt den förut med andra klasser. Han anser att uppgiften fungerar bra som ”inkörsport” till det nya området. Den sorts problem som kan användas som utgångspunkt för alla elever i en klass kan Hasse hitta i läromedel och övriga böcker för undervisning i matematik. ”Alla börjar från scratch” säger han.

4.3.2 Under lektionen

Lektionen med eleverna i årskurs sju

Möbleringen i klassrummet där eleverna i årskurs sju hade sin lektion visas i figur 4. Vid varje bänk satt två elever och vid de långa borden kunde fyra elever sitta tillsammans. Läraren ställde sina saker vid långbordet längst fram.



Figur 4. Hasses klassrum med klassen i årskurs sju

När alla elever var på plats sa Hasse till eleverna att de skulle arbeta med en ny uppgift och att de först skulle arbeta enskilt med den. Hasse skrev på tavlan:

Ny lön

25 500 kr $\longrightarrow$ 26300 kr

21 700 kr $\longrightarrow$ 22 400 kr Vem har störst löneförhöjning?

Eleverna skrev ner uppgiften i sina anteckningsblock. Medan han skrev förklarade Hasse för eleverna att uppgiften handlade om två personer som hade fått löneförhöjning. Eleverna skulle bestämma vem som hade fått den största höjningen. Syftet med uppgiften var enligt Hasse att eleverna skulle se andelen av det totala och kunna skriva det som procent för att göra en jämförelse.

Eleverna arbetade enskilt under tystnad i fem minuter. Därefter började de diskutera med kamraten bredvid. De flesta arbetade parvis men det fanns också två grupper med tre elever. Cirka tre minuter efter att de hade börjat arbeta tillsammans lyfte två elever handen för att visa att de var färdiga med uppgiften. Hasse gick fram till dem och bad dem lösa uppgiften på ett annorlunda sätt.

Medan eleverna arbetade gick Hasse runt i klassrummet, tittade på elevernas arbete och svarade kort på frågor. Han tycker att läraren behöver vara medveten om att inte lotsa eleverna. Om de fastnar i arbetet kan man ställa motfrågor som gör att eleverna tänker själva, att de kommer igång, anser han. Han tycker också att läraren måste kunna avgöra vad som är lämpligast i varje fall. ”Det finns vissa elever som behöver mer hjälp”, säger han, ”annars tappar de sitt självförtroende”.

Efter fem minuters diskussion får varje grupp med två elever komma fram och skriva sin lösning på tavlan. Det vanligaste är att Hasse väljer ut endast några elever som har olika lösningar för att komma fram. Han tycker att det är bra att ha ett visst tempo på lektionerna och att det är hans uppdrag att hålla den på ett sätt så att eleverna inte tappar fokus. Medan de skriver, till exempel, vet han att tempot går ner. Om det tar för lång tid att skriva på tavlan så kan några elever tappa fokus, anser han. För den här lektionen tyckte han att alla lösningar såg olika ut och att det fanns ett värde i att skriva alla på tavlan. Det tog cirka sex minuter att skriva alla nio lösningar.

Eleverna tvekade inte när de tillfrågades om att komma fram. Hasse tycker att det är viktigt att ha en tillåtande miljö i klassrummet där alla vågar komma fram. Han säger att hans elever gör det vid varje lektion och att det har blivit en vana.

När eleverna var på plats igen kom Hasse fram till tavlan för att börja med redovisningen av de olika lösningarna. Han anser att i den här fasen måste han kunna synliggöra elevernas tankar. Han frågade eleverna om deras lösningar och de förklarade hur de tänkte. Eleverna verkade också vana vid att prata inför andra. Hasse bad strängt några elever att vara tysta, som hade fortsatt att prata när en annan elev skulle förklara sin lösning.

Klassen gick igenom alla lösningar. Inte alla var helt korrekta. Hasse säger att han tillåter alla sorts lösningsstrategier, han är noga med att inte diskvalificera någon. ”Man måste arbeta med problem där alla kan lyckas, där man kan jobba på olika nivå”, anser han. Däremot vet han också vilka strategier som måste förklaras tydligare och vilka som inte är värda att fördjupa sig i:

> När man jobbar med problemlösning öppnar man för olika tankar och då kan några lösningar komma fram som inte alla i klassen är mogna för. Då sparar jag lösningen i minnet och tar det fram den senare.
>
> *(Lärare Hasse)*

Dessutom tycker han att några lösningar kan vara lite knepiga och att försöka fördjupa sig i dem kan förstöra syftet med lektionen.

Efter elevernas förklaring tydliggjorde Hasse i varje fall elevernas tankar, han uttryckte sig med matematiska termer. Hasse gick fram och tillbaka bland lösningarna för att jämföra dem. Han pekade på de lösningar som hade samma grundtanke och lyfte fram hur procent framkom i vissa lösningar. Redovisningen pågick under cirka 10 minuter.

Senare berättade Hasse för mig att han upplevde att han hade misslyckats med den första uppgiften, att han inte kunde fånga tillräckligt många elever. Han trodde att det berodde på att talen i uppgiften var för stora och på så sätt svåra för några elever. Hasse skrev därför ett annat problem med mindre tal på tavlan där det dessutom enligt honom var lättare att se skillnaden mellan talen:

$$600 \longrightarrow 5\,500$$

$$60\,000 \longrightarrow 59\,500$$

Han frågade några elever hur de kunde lösa det här problemet. I förklaringen av detta exempel var det Hasse som pratade mest medan eleverna svarade konkret på hans frågor. Eleverna hade svårt att uttrycka procent och Hasse fortsatte att fråga och förklara under fem minuter. Sedan frågade Hasse eleverna varför man använder procent. En elev svarade att det var för att jämföra. Hasse kom då tillbaka till de både exemplen och visade hur man kunde jämföra de olika lönerna med procent.

Sedan skrev läraren en tredje uppgift på tavlan:

Målvakt A) 17 räddningar på 25 skott

B) 13 räddningar på 20 skott

Frågan var vilken målvakt som var bäst, A eller B. Eleverna hade arbetat med likadana uppgifter tidigare men flera visste inte hur de kunde lösa den. De arbetade tysta med uppgiften under ett par minuter och därefter parvis. Efter fem minuter valde Hasse en elev som skulle komma fram och skriva sin lösning på tavlan (elevens lösning på hennes anteckningsblock visas i bilaga 4a). Eleven förklarade sin lösning och Hasse tydliggjorde vad hon hade gjort, han påpekade att lösningen handlade om att se andelen räddningar från det totala antalet skott.

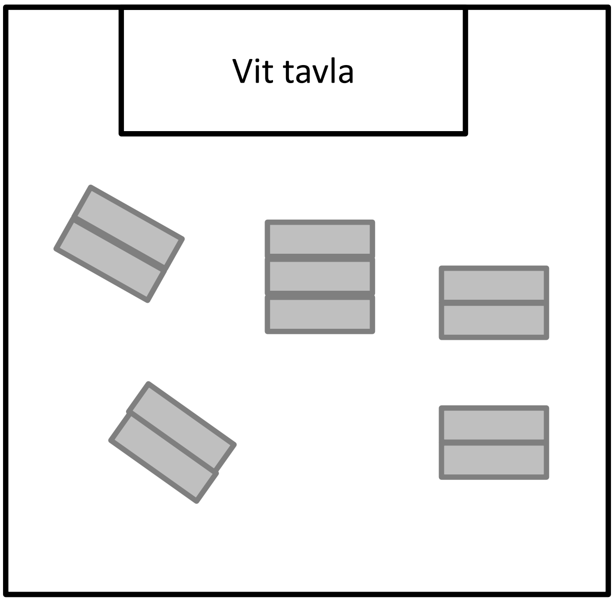
Hasse kom då tillbaka till den första uppgiften om lönförhöjning och bad eleverna att lösa den med hjälp av det de hade lärt sig från de efterföljande uppgifterna. Hasse berättade att det inte är ovanligt att en klass löser flera problem i rad för att tydliggöra det som ska läras under lektionen.

Medan en elev förklarar skriver Hasse lösningen på tavlan. Han fortsätter vidare att förklara hur procent kommer fram ur alla problem genom att se andelen av det totala och hur man senare använder procent för att jämföra. Till slut frågade Hasse eleverna ”hur stor andel av klassen är sjuk idag?”. Eleverna började med att se efter vilka som var frånvarande och efter en kort stund kan de flesta svara på frågan.

Det var ett par minuter kvar av lektionen och eleverna fick sluta. När de hinner brukar eleverna arbeta med läroboken efter arbetet med problemlösning. Enligt Hasse är läroboken bra för att träna färdigheter. Och det måste göra de anser han. Han säger att många elever inte orkar färdighetsträna och att de då senare får problem på provet. ”De har egentligen inga kognitiva svårigheter men det (kunskapen) blir så dåligt befäst att det inte hinner sjunka in innan det är dags för prov” menar han.

Lektionen med eleverna i årskurs sju

Planlösningen i klassrummet där eleverna i årskurs nio hade sin lektion visas i figur 5. Eleverna satte sig i grupper med tre, fyra, sex eller sju stycken tillsammans. Hasses klassrum brukar inte ha den här planlösningen men några elever i den här klassen har problem med att fokusera och samarbeta. Han tycker att om dessa elever sitter tillsammans med andra kan de dras med i arbetet på ett naturligt sätt.



Figur 5. Hasses klassrum med klassen i årskurs nio

När alla har satt sig delade Hasse ut en kopia av dagens problem (bilaga 4b) till varje elev. Sedan läste han problemet högt och förklarade kort för eleverna vad de skulle göra medan han hastigt ritade problemets graf på tavlan. Därefter arbetade eleverna enskilt under ett par minuter och började sedan diskutera i små grupper. Eleverna grupperade sig själva i grupper med två, tre eller fyra stycken i varje. Hasse tycker att fyra elever i en grupp är för mycket, alla har då inte samma möjlighet att bidra till diskussionen. Emellertid tillåter han grupper med fyra elever om han vet att gruppen arbetar bra.

Det blev en livlig diskussion i klassrummet när eleverna försökte förklara diagrammet för varandra. Hasse gick runt och tittade på elevernas arbete. Han stannade hos de elever som hade problem med att tolka grafen och ställde några frågor för att hjälpa dem med att fortsätta vidare. Hasse stannade också hos elever som hade arbetat bra med uppgiften och bad dem att förklara sina beskrivningar för honom (se bilaga 4c).

Efter tio minuters diskussion kom Hasse fram och sa att de skulle redovisa resultaten. Han bad en elev förklara sin beskrivning av en av kurvorna (hon valde Martins kurva, se bilaga 4b). Medan eleven förklarade ställde läraren frågor för att tydliggöra vad hon sa (han frågar till exempel ”är det vad du menar?”) och för att komma till de matematiska idéerna bakom elevens beskrivning. ”Att synliggöra elevernas tankar är mycket viktigt”, anser han.

Hasse anser att eleverna kan lära sig nya saker genom att lösa problem, åtminstone kan de få en matematisk insikt om saker de pratar om i vardagen. Han anser vidare att det som eleverna har lärt sig tidigare var underlaget till det som behandlades idag. Och ”det som de lär sig nytt idag bygger på det som de ska lära sig senare” anser han.

Hasse fortsatte ett resonemang med eleverna där han frågade om olika aspekter i uppgiftens graf. Han ställde frågor till eleverna så att de kunde se aspekter i kurvorna såsom lutning och sambandet med grafens axlar. Eleverna hade olika tolkningar om vad kurvorna innebar, till exempel varför de lutade på olika sätt. Hasse försökte binda samman elevernas idéer och ge dem en matematisk förklaring.

Hasse sammanfattade vad eleverna hade lärt sig från den första kurvan som beskrevs. Läraren pratade om begreppet hastighet och enheten kilometer per timme. Lektionen fortsatte på samma sätt med de andra två kurvorna (Amandas och Elins i bilaga 4b). Läraren frågade olika elever vad varje del av diagrammet innebar, vad hände vid varje moment. Han frågade till exempel ”Var rör sig barnen snabbast? Var rör de sig långsammast?” Eleverna svarade och läraren kompletterade sina idéer. Hasse anser att läraren måste akta sig för att inte berätta det som eleverna själva kan komma på. ”Jag bollar frågan till dem”, säger han, ”och då får vi större variation i svaret”.

Sedan bad Hasse klassen att fundera över hur en kurva skulle se ut om någon skulle vilja springa fort men inte orkar hela vägen. Eleverna arbetade med frågan i små grupper under cirka tre minuter. Sedan kom en elev från varje grupp fram till tavlan för att rita sin kurva. Därefter förklarade eleverna vad deras grafer förställde, alla hade olika idéer om hur grafen kunde se ut och vad den innebar. När en elev pratade var de andra tysta. Medan eleverna förklarade sina kurvor ställde Hasse frågor för att hjälpa dem att förklara vidare. Den sista diskussionen pågick under fem minuter, efter det var lektionen slut.

4.3.3 Efter lektionen

”Erfarenheten från dagens lektion gör det möjligt att utforma nästa lektion” säger Hasse. Han tyckte att han misslyckades med uppgiften för eleverna i årskurs sju. ”Jag ville gå upp en nivå till i deras känsla för andelen, men de var kanske inte riktigt mogna för det” funderade han. Han kommer att förändra uppgiften inför nästa lektion, men bara lite grann eftersom han ville gå vidare med sitt mål att göra eleverna medvetna om hur, när och varför man använder procent. ”Men det är inte säkert att jag kommer att lyckas nästa gång” säger han.

Med eleverna i årskurs nio kommer han att fortsätta med en annan uppgift som kan hjälpa dem med att tolka en graf. ”De arbetade bra idag, de kom långt i sin tolkning av diagrammet” ansåg han.

4.3.4 Från intervjun

Vad betyder problemlösning i Hasses undervisning?

För Hasse är problemlösning i klassrummet ett arbete där alla lyckas med någonting, där man kan tänka på olika sätt, där man kan granska vad som händer. Dessutom är problemlösning för Hasse ett sätt att få begreppsförståelse på ett djupare plan.

Enligt Hasse handlar problemlösning om att problematisera det matematiska innehållet som ska behandlas i varje lektion. Det innebär att han introducerar det matematiska innehållet genom ett problem. Han benämner sin undervisning som problemformulerande för att skilja den från uppläggningen problembaserat lärande (PBL). ”PBL är ett väldigt ambitiöst upplägg”, anser han, ”för stort för att genomföra det på grundskola”.

När Hasse pratar om sin undervisning genom problemlösning i klassrummet refererar han till styrdokumenten. Efter riktlinjerna i kursplanen har lärare på skolan utformat en matris med kriterierna för bedömning av kunnande i matematik (bilaga 4d). Hasse anser att när eleverna löser problem utvecklar de förmågor som visas i matrisen:

> Kom ihåg problemlösning som ett sätt att överväga begrepp på ett djupare plan (*begreppsförståelse)*, så när jag har en problemlösningssituation som jag hade idag, i klassrummet, då lär sig eleverna att bli problemlösare (*problemlösningsförmåga*), de lär sig i alla fall att reasonera ganska mycket (*resonemangsförmåga*), de lär sig både muntligt men också skriftligt, på tavlan (*kommunikationsförmåga*). Den procedurförmågan blir typiskt en färdighetsträning. De får räkna i boken sen då.
>
> (*Lärare Hasse*)

Matrisen finns på väggen i klassrummen. ”Vid jämna mellanrum går vi dit och tittar på det de har gjort idag och hur vi bedömer det” säger Hasse.

Hur lär sig eleverna olika strategier för att lösa problem?

Hasse anser att genom att arbeta med ett problem synliggörs olika strategier. Han introducerar inte de olika strategierna för eleverna, utan han väljer eller utformar ett problem så att de lösningar han vill synliggöra kan komma fram. Dessutom försöker han välja olika sorters strategier som ska skrivas på tavlan. Ibland sätter han en ”etikett” på varje lösning, en sorts beteckning, så att eleverna kan komma ihåg dem senare. Däremot menade han inte att eleverna skulle skapa en lista av användbara lösningsstrategier, som Pólyas välkända heuristiska tillvägångasätt (Pólya, 1945). Snarare handlade det för eleverna om att lära sig att angripa ett problem på olika matematiska sätt och nivåer.

Under redovisningen av de olika lösningarna tydliggör Hasse elevernas förklaringar så att så många som möjligt kan förstå vad de andra tänkte. ”Om de inte förstår andra lösningar fortsätter de bara använda samma strategi” anser han. Han brukar låta de olika lösningarna vara kvar på tavlan och senare ge ett nytt problem till eleverna och fråga dem vilken strategi de skulle välja. ”De har så småningom flera strategier med olika nivå att välja på” menar han.

Hur utvecklades Hasses undervisning?

Hasse berättade att hans undervisning i matematik förändrades för cirka femton år sedan, när han kontrasterade sin undervisning i naturorienterande ämnen (NO) mot sin undervisning i matematik:

> Det kom insikten att, när jag tittade på min undervisning i NO var det ju en problemformulerande undervisning, där man började med en hypotes, och sen undersökning och sen slutsatsen. Och i matte var det tvärtom, jag började med slutsatsen, med alla genomgångar. Det fanns ingen möjlighet för eleverna att undersöka, att upptäcka. Jag förstod på nåt vis att jag var två sorters lärare, en konstruktivistisk i NO och en behavioristisk i matte.
>
> (*Lärare Hasse*)

Således började han arbeta med problem. Han följde framförallt modellen som lärare i Japan använder i sin undervisning i matematik[17]. Han läste också en del av litteraturen i området, särskilt om metodiken som kan användas i klassrummet. Men han säger att han inte undervisar efter någon struktur eller plan.

Hasse håller med den amerikanska forskaren Frank Lester om att eleverna blir duktiga problemlösare genom att lösa problem kontinuerligt och att det tar tid att utveckla problemlösningsförmågan. Därför arbetar han med åtminstone ett problem varje lektion. Han slutade med att ha genomgångar på innehållet för att det förknippas traditionellt med att läraren berättar vad eleverna måste göra. ”Jag aktar mig för att bara gå och berätta saker som i stället kan formuleras som en fråga” säger han.

Vilka faktorer är de viktigaste att ta hänsyn till när man vill börja undervisa genom problemlösning?

För att kunna arbeta med problemlösning anser Hasse att läraren måste kunna sitt ämne men också kunna lära ut ämnet. Läraren måste vara didaktiskt skicklig för att kunna möta elevernas tankar. Hasse anser att en viktig förmåga hos läraren är att kunna en mångfald av olika förklaringsmodeller. ”För att föra ett resonemang med eleverna om ett innehåll måste man kunna synliggöra innehållet på olika sätt” menar han.

Dessutom anser Hasse att det är grundläggande för läraren att vara medveten om uppdraget, om vad som står i styrdokumenten. ”Man får lära sig tolka vad som står i kursplaner” säger han, ”en lärare som har en genomgång och sen färdighetsträning har inte förstått vad som står i kursplanen”. Därtill anser han att läraren behöver vara engagerad för att i sin tur kunna engagera eleverna i arbetet.

[17] En japansk lektion i matematik består vanligen av fyra segment: presentation av ett problem, individuell problemlösning, hela klassen diskussion och lärarens sammanfattning. Se till exempel Shimizu, 1999.

Enligt Hasse, när en lärare är väl medveten om sitt uppdrag och vet vad han/hon vill göra, är det viktigt att försöka jobba tillsammans med en kollega. ”Man kan inte vara en ensamvarg, man måste kunna föra en pedagogisk debatt”, anser han.

5 Analys och diskussion

Syftet med mitt examensarbete var att undersöka och dokumentera olika tillvägagångssätt att undervisa matematik genom problemlösning mot bakgrund av de forskningsresultat som finns inom området. Det var också av intresse att få veta hur en sådan undervisning kan utvecklas.

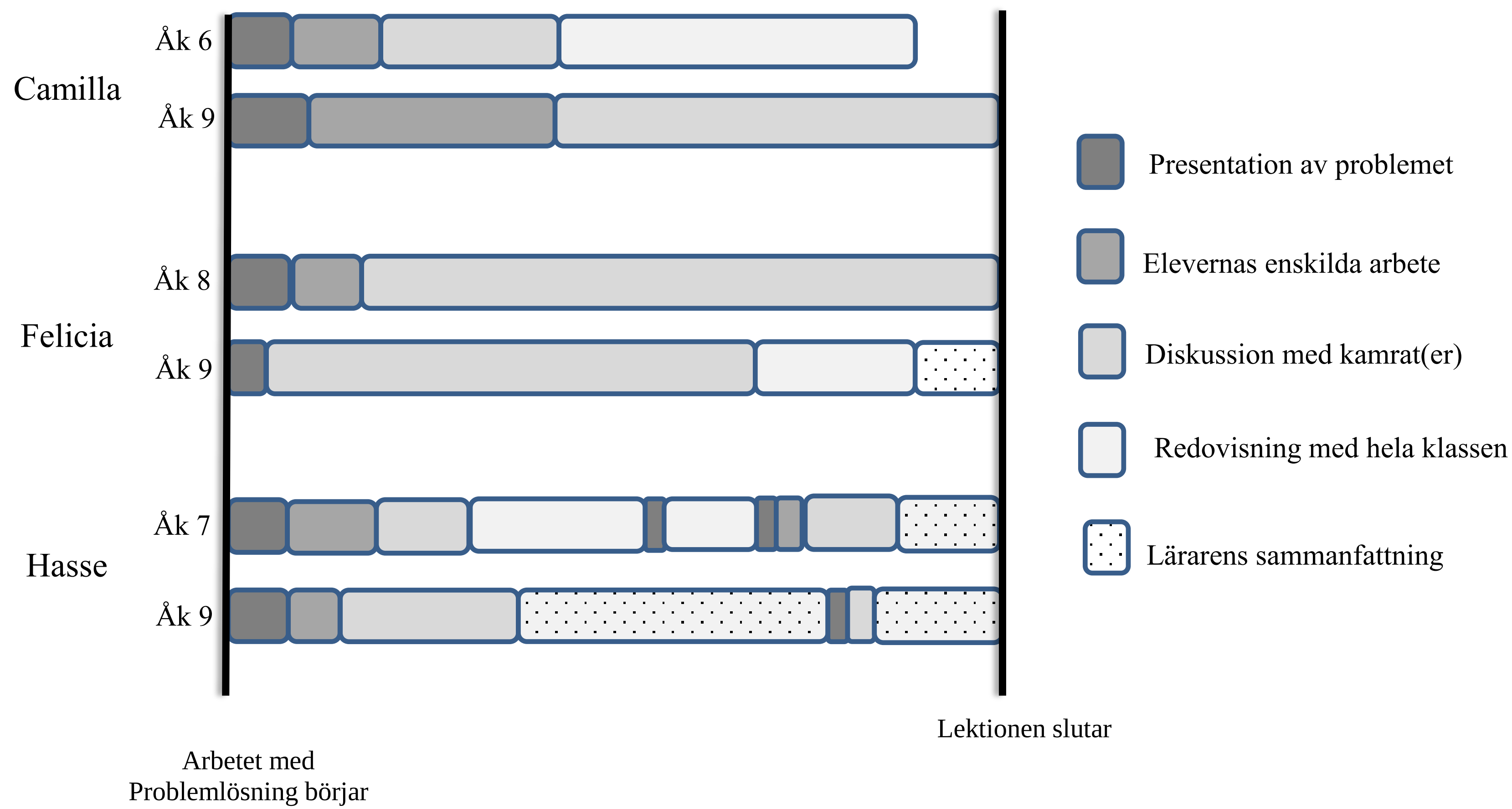
Nedan presenterar jag en genomgripande analys av resultaten från undersökningen. Analysen genomfördes med utgångspunkt i arbetets syfte och frågeställningar.

5.1 Lektionens förlopp

Som tidigare nämnts, finns det inga forskningsbaserade riktlinjer för hur undervisningen genom problemlösning kan genomföras i praktiken och flera forskare hävdar att en generell metod aldrig kommer att finnas (Lester och Lambdin, 2007; Frank, 2007; Lester, 1996). Däremot finns det några generella aspekter som empiriskt har visats främja arbetet med problemlösning (se till exempel Cai, 2003). Under mina observationer försökte jag lägga märke till såväl rapporterade som egna handlingssätt i undervisningen hos de tre lärare som deltog i undersökningen.

Mina resultat visar att arbetet med problemlösning i klassrummet inte bara skiljde sig åt mellan lärarna utan också mellan de två observerade lektionerna med samma lärare. Lektionens disposition berodde på syftet med lektionen. Figur 6 visar en jämförelse mellan dispositionerna för de observerade lektionerna. Figuren visar att varje lektion hade en viss struktur där olika faser kunde urskiljas, vilket överensstämmer med vad som har rapporterats i litteraturen (Lester, 1984; Van de Walle, 2007). Man kan urskilja fem faser som förekom under de olika lektionerna:

- ***Introduktion till problemet.*** Enligt Lester (1984) omfattar denna fas framförallt förståelse av problemet. I nästan alla lektioner som jag observerade var den här fasen mycket kort. I samtliga fall läste läraren först uppgiften högt och förklarade sedan kortfattat vad uppgiften handlade om. Även om läraren frågade eleverna om de hade förstått uppgiften, tycker jag att det var svårt att faktiskt veta om alla elever hade förstått innan de började arbeta med uppgiften. Jag tror att en klass sällan är homogen, det finns alltid elever som förstår lättare än andra och inte alla vågar fråga läraren inför hela klassen.



Figur 6. Figuren visar fördelningen av tiden mellan de olika faserna i arbetet med problemlösning. Längden av rektanglarna avspeglar inte den verkliga tiden som ägnades till varje fas utan det tidsmässiga förhållandet mellan dem.

- ***Elevernas enskilda arbete***. Den här fasen förekom vid nästan alla lektioner som jag observerade, undantagen var Felicias lektion med eleverna i årskurs nio (fig. 6). Fasen med enskilt arbete var också kort, mellan två och fem minuter. Även om denna fas vanligen nämns i litteraturen finns det inga forskningresultat som tydligt pekar på att enskilt och tyst arbete stödjer arbetet med problemlösning. Däremot enas flera forskare om att arbete i små grupper är det som ger de bästa resultaten (Lester, 1996; Jaworski, 1996; Ahlberg, 1996). Felicia delar denna uppfattning. Hon låter sällan sina elever arbeta enskilt, de arbetar vanligen i grupp (se till exempel fig. 6, Felicias lektion med eleverna i årskurs nio). Camilla och Hasse kommenterade inte vikten av denna fas. Dock, elevens inledande enskilda arbete kan ha betydelse för elevens metakognition, något som i problemlösningssammanhang anses vara en medveten kontroll och reglering av våra mentala eller kognitiva processer medan vi löser ett problem (Schoenfeld, 1992; Lester, 1989; Van de Walle, 2007). Genom det inledande enskilda arbetet kan eleverna bli medvetna om sina egna mentala och kognitiva processer medan de arbetar ostört, innan de börjar diskutera med andra.
- ***Elevernas diskussion med kamraterna.*** Den här fasen förekom under alla lektioner som observerades, i några fall upptog den större delen av lektionens tid (se fig. 6). Under tiden som eleverna diskuterade med varandra gick de tre lärarna runt i klassrummet och ställde några frågor utan att blanda sig i diskussionen. Vid intervjun lyfte alla tre lärare fram vikten av att ge eleverna tid att tänka och inte förklara någonting som eleverna själva kan komma på. Forskning har pekat på vikten av att eleverna får tillräckligt med tid för att skapa och diskutera sina idéer (Franke, 2007 s. 233; Lester & Cai, 2010). Enligt Lester handleder lärare eleverna under den här fasen genom att ”observera, fråga och om nödvändigt ge idéer”, vilket överensstämmer med mina observationer.
- ***Redovisning och diskussion med hela klassen.*** Den här fasen fanns i de flesta lektioner med undantag av provtillfället hos Felicia och Camillas lektion med eleverna i årskurs nio (enligt lärarna skulle en redovisning i båda fallen förekoma senare) (fig. 6). I samtliga fall var läraren mer aktiv under den här fasen än under de tidigare faserna. Se nedan avsnittet *Lärarens roll*.
- ***Lärares sammanfattning***. Lärares sammanfattning är en vanlig del av en japansk lektion i matematik (Shimizu, 1999) som Hasse valde som utgångspunkt för sin undervisning genom problemlösning. Hos Felicia kunde den här fasen tydligt urskiljas endast i hennes lektion med årskurs nio, medan Hasse sammanfattade under redovisningsfasen förlopp

under båda sina lektioner. Camilla gjorde ingen sammanfattning vid de lektioner som jag observerade, vilket inte utesluter att hon gör det vid andra lektioner. Lärarens sammanfattning ger eleverna möjligheten att se syftet med lektionen. Det har visats att under processen för att lösa problem utveckar eleverna ett sammanhängande och komplext system av kunskap (Cai, 2003). Eleverna förfinar, kombinerar och modifierar olika sorts kunskap som de har lärt sig tidigare för att kunna lösa ett problem (Lester & Cai, 2010). Följaktligen kan under en lektion många olika idéer förekomma samtidigt, så att eleverna kan bli förvirrade och till slut tappa bort det som är viktigast att ta med sig från lektionen. Enligt Wyndhamn (2000) är det därför en viktig uppgift för läraren att ge sammanhang åt det matematiskt innehåll som framträder under diskussionerna i klassrummet.

Tiden som ägnades åt varje fas var olika vid varje lektion. Lärarens och elevernas arbete varierade med varje fas men det var också olika under samma fas i de olika lektionerna. I enlighet med Van de Walle (2007) hade alltså varje fas ett särskilt syfte men det som skedde under faserna för att uppnå syftet bestämde läraren beroende på klassen, själva problemet och lektionens ändamål.

Några forskare anser dessutom att arbetet i en undervisning genom problemlösning bör börja med och vara uppbyggd kring endast ett problem (Lester, 1994; Hiebert, 1996; Cai, 2003; Van de Walle, 2007). Detta var fallet hos Camilla och Felicia som använde långa problem som eleverna löste under nästan hela lektionen (fig. 6). En avvikelse från detta fanns hos Hasse som i stället använde flera korta problem under sin lektion med elever i årskurs sju. Han skapade problemen själv med anpassning till vad som hände under lektionen. Även under lektionen med årskurs nio, där eleverna arbetade med ett stor problem i början, skapade han ett kort problem i slutet av lektionen. Arbetet med varje kort problem bestod ändå i samtliga fall av några av de beskrivna faserna (fig. 6). Enligt Hasse är det vanligt att hans elever löser flera problem under samma lektion med avsikten att tydliggöra det som ska läras under lektionen.

5.2 Lärarens roll

En väsentlig del av lärarens arbete med problemlösning är att välja lämpliga uppgifter (Hiebert, 1996; Cai, 2003; Lester & Cai, 2010). I enlighet med detta pekade de tre lärare som deltog i undersökningen på vikten av att välja en lämplig uppgift för sina lektioner. Uppgiften måste enligt samtliga lärare ha ett samband med det matematiska området de arbetar med och med syftet för lektionen. Dessutom föredrar Felicia att arbeta med uppgifter med olika svårighetsgrad. I enlighet med Ulin (1996) anser hon att på så sätt kan alla elever arbeta med samma uppgift.

I enlighet med bland annat Van de Walle (2007) pekar samtliga lärare på att det är svårt att hitta färdigt utformade problem som uppfyller de egenskaper som krävs vid varje lektion. Därför utformar ofta lärarna själva de problem som användes i undervisningen. Camilla och Felicia kopierar ofta problem från sina egna läromedel och Hasse, som tidigare nämnts, utformar vanligen själv sina problem, ibland under lektionens gång.

På frågan om deras nuvarande roll lyfte också lärarna fram sin funktion som ledare och samtalspartner i diskussionen kring matematisken i problemet. I de observerade lektionerna var det också under redovisningsfasen som lärarna var mest aktiva. Lärarna hade olika uppgifter under den här fasen, bland annat att starta resonemangen, att fördela ordet mellan eleverna, att synliggöra och tydliggöra elevernas tankar och att introducera och ge sammanhang åt det matematiska innehållet, vilket även stämmer med Wyndhams (2000) iakttagelser. Redovisningens förlopp berodde på lektionens syfte. Av de tre lärarna var det Hasse som samtalade mest under den här fasen. Syftet med hans lektioner var att introducera nya matematiska idéer och därför var det viktigt för honom att tydligt knyta ihop elevernas tankar och föra fram det matematiska innehållet, samtidigt som han sammanfattade vad de hade lärt sig vid varje moment under lektionen innan de fortsatte. Syftet med Camillas lektion i årskurs sex var att förankra något som de hade lärt sig tidigare och redovisningen inriktades mest till problemlösningsmetodiken. Felicias elever i årskurs nio hade också tidigare arbetat med området och ville fördjupa sig i det. Redovisningen inriktade då in sig både mot metodiken och mot den matematiska idén bakom lösningarna.

I den matematiska diskursen som finns under redovisningsfasen är det grundläggande att eleverna vågar föra fram sina tankar. På det sättet anser flera forskare att en viktig uppgift för läraren är att skapa en problemlösande kultur och en matematisk miljö i klassrummet där eleverna engagerar sig i arbetet och alla tankar och idéer respekteras (Hiebert, 1996; Jaworski, 1996; Lester & Cai, 2010). Resultaten från mina observationer visar att en sådan tillåtande miljö fanns tydligt märkbar i Camillas och Hasses lektioner och lite mindre i Felicias lektion med eleverna i årskurs nio. I samtliga fallen var eleverna engagerade i problemlösningsarbete och tvekade inte när de tillfrågades om att förklara sina lösningar. De accepterade men också vågade ifrågasätta andras tankar. Enligt Camilla måste läraren vara tydlig och sträng för att skapa en sådan miljö, vilket tyder på en viss kontroll av elevernas beteende, inte nödvändigtvis på ett negativt sätt.

Vikten av att skapa en bra miljö i klassrummet var påtaglig för Felicias provuppgift med eleverna i årskurs åtta. Eleverna i denna klass var inte så villiga att diskutera, resonera och lösa uppgiften. Många blev frustrerade och krävde mycket hjälp av läraren. Enligt Felicia hade hon inte arbetat länge med klassen och hade därför inte helt och hållet hunnit skapa den atmosfär som behövs för att kunna arbeta med problemlösning.

På frågan om ordning i klassen var det endast Camilla som lyfte det fram som en grundläggande förutsättning i klassrummet för att uppnå ett effektivt arbete. Det finns ingenting i litteraturen om ordning och reda i klassrummet i samband med problemlösningsarbete men för Camilla är det en mycket viktig aspekt att ta hänsyn till. Med ordning menade hon en miljö där eleverna följer lärarens instruktioner, arbetar fokuserat, tystnar när lärarna ber om det och kommer till klassrummet med allt material som behövs för lektionen. För Camilla är brist på tid ett hinder när man arbetar med problemlösning och enligt henne tappar man värdefull tid om det inte är ordning i klassrummet.

Slutligen, Jaworski (1996) och Schoenfeld (1992) pekar på att lärarens attityd och personliga filosofi till matematiken i stor utsträckning påverkar stämningen i klassrummet, vilket även bekräftas av den här fallstudien. Den matematiska miljön som jag observerade speglar lärarnas inställning till arbete med problemlösning. Samtliga lärare ser problemlösning som en essentiell del av sin undervisning och de är mycket engagerade i sitt arbete.

5.3 Utveckling av lärarnas undervisning

Under intervjun berättade lärarna hur deras undervisning hade utvecklas med tiden. De tre lärarna undervisade ursprungligen på ett mer traditionellt sätt, alltså med genomgångar följda av enskilt arbete med läroboken. Deras vilja att förändra kom i samtliga fall från en inre insikt om att den traditionella undervisningsformen i matematik inte gynnar elevernas lärande. Dessutom följde denna undervisningsform inte syftet för undervisningen i matematik, så som den uttrycktes i läroplanen.

De tre lärarna fann olika vägar vid utvecklingen av sin undervisning. Camillas läste en kurs som hjälpte henne att komma vidare i utvecklingen av undervisningen. Enligt några studier har kurser som lärare läser ingen större betydelse för utvecklingen av lärarens undervisning (Cai, 2003). Emellertid anser Camilla att utan kursen hade hon inte kunnat förändra sitt sätt att undervisa. I enlighet med några forskningsresultat som pekar på att läraren kan lära sig från sina egna och andras undervisningssituationer (Cai, 2003) tog Hasse sin egen undervisning i NO som modell. För Felicia var det avgörande att träffa en kollega som också ville förändra sitt sätt att undervisa. Flera olika studier visar att kommunikation och samarbete med andra lärare kan ha en positiv och stark påverkan på lärares utveckling (Cai, 2003). Egentligen lyfte alla tre lärare fram att samarbete med och stöd från andra lärare kan underlätta förändringsarbetet.

Generellt pekade lärarna på att det viktigaste för att kunna börja med en förändring är att läraren inser att den traditionella undervisningsformen i matematik är bristfällig och att han/hon har en inre vilja att förändra.

5.4 Hur är problemlösning integrerad i lärarnas undervisning?

Enligt Lester och Cai (2010) innebär undervisningen genom problemlösning lösning av problem som en integrerad del av undervisningen så att inlärning sker medan elever anstränger sig för att lösa problem där relevanta matematiska begrepp och färdigheter är inbäddade. Min undersökning visar att alla tre lärare använder problemlösning i sin undervisning på ett systematiskt och medvetet sätt. Resultaten pekar på att de har ett konstruktivistiskt synsätt på undervisningen. Kortfattat kan man säga att ”konstruktivism bygger på en övertygelse att kunskap skapas av individen, den finns inte färdig någonstans” (Jaworski, 1996). I enlighet med detta anser samtliga lärare i min undersökning att eleverna behöver utforska och upptäcka matematiska frågor, vilket kan göras genom problemlösning eller andra sorters aktiviteter som laborationer. Dessutom lyfte de fram vikten av att låta eleverna tänka själva och att inte berätta det som de själva kan komma på medan de löser problem.

Camilla och Felicia menar dock att eleverna behöver få verktyg för att kunna lösa problem. Således måste lärarna ge dem verktygen genom att undervisa om matematiska idéer och begrepp, vanligen med en genomgång[18]. Under dessa undervisningstillfällen lär sig då elever ”färdig” kunskap som senare kan tillämpas när de löser problem. Hasse har inte samma uppfattning. Han anser att eleverna kan lära sig matematiska idéer och begrepp genom att lösa problem. Enligt honom behöver han inte presentera någon genomgång utan snarare genom att knyta ihop elevernas tankar när de löser problem och uttrycka dem på ett matematiskt sätt.

Mot den bakgrunden anser jag att Hasse undervisar *genom* problemlösning medan Camilla och Felicia gör det *för* problemlösning. Lärarnas synsätt på problemlösning speglas i sin tur i hur de har integrerat det i sin undervisning. För Camilla och Felicia är problemlösning ett arbete som hjälper eleverna att befästa det kunskapen som de lär sig genom andra tillvägagångssätt. På så sätt utgör problemlösning en del av undervisningen som kompletteras med andra metoder. För Hasse är problemlösning ett sätt för eleverna att skaffa sig ny kunskap och befästa det som de har lärt sig tidigare. På så sätt är hela undervisningen baserad på lösning av problem. I samtliga fall har eleverna möjligheten att lösa problem men förekomsten och syftet för tillfällen med problemlösning är inte samma hos alla lärare.

5.6 Sammanfattning

Jag har presenterat och analyserat resultaten från mina observationer och intervjuer hos tre olika lärare som använder sig av problemlösning i sin undervisning. Mina resultat visar att det inte finns en given modell för arbetet med problemlösning i matematikundervisningen. De lärare som medverkade i min undersökning har utvecklat en undervisningsform enligt sina egna förutsättningar såsom personlighet, bakgrund, erfarenhet samt arbetsplatsens villkor. Det finns därför både gemensamma och särskiljande aspekter mellan de observerade undervisningsformerna samt mellan lärarnas synsätt på problemlösning. Mina resultat visar alltså att problemlösning används på olika sätt och med olika syfte i undervisningen. Det kan användas som ett komplement till andra metoder för att hjälpa eleverna att behärska den matematik de har lärt sig. Problemlösning kan också användas som ett medel genom vilket eleverna lär sig matematik. Resultaten tyder på att det finns ett visst samband mellan de forskningsresultat som finns rapporterade i litteraturen och det som observerades i praktiken. Det fanns också metoder i lärarnas undervisning som avviker från det som finns i litteraturen

[18] Med genomgång menar jag en lektion där läraren berättar om matematiska begrepp medan eleverna oftast lyssnar under tystnad.

och som ändå, enligt lärarna, främjar elevernas arbete, exempelvis att bygga lektionen kring flera problem i stället för ett enda, som i Hasses fall.

5.7 Vidare forskning

Som tidigare nämnts är detta en fallstudie. Resultaten från min undersökning har gett insikter i hur lärare i praktiken kan arbeta med problemlösning i sin undervisning. Därtill anser jag att mer forskning behövs inom följande områden:

- En omfattande studie som följer undervisningen hos lärarna under en längre tid, åtminstone en termin, skulle kunna visa mer detaljerat hur problemlösning kan förekomma (om det är fallet) vid de olika momenten. Dessutom kan en sådan studie visa hur en lärare kan variera sin undervisning genom problemlösning.
- Enligt min mening vore det också intressant att veta mer ingående ta reda på hur undervisning genom problemlösning kan utvecklas. Vad kan förhindra och vad kan främja lärares arbete med problemlösning? En studie som följer en lärares undervisning från lärarexamen och under flera år framåt skulle kunna visa hur alla som är inblandade i skolverksamheten, såsom elever, kollegor, föräldrar, skolledare, politiker och samhället i allmänhet, påverkar lärarens utveckling.
- Bedömningen av elevernas kunskap är ett mycket aktuellt ämne. Hur görs bedömning av elevernas kunnande i en undervisning genom problemlösning? Vad bedömer läraren? Hur kan prov utformas?

I förlängningen skulle sådana studier kunna ge fördjupad kunskap om hur undervisning genom problemlösning kan omsättas i praktiken.

Referenser

Ahlberg, A. (1996). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson och R. Ryding (red.) *Problemlösning*, s.85-99. Lund: Studentlitteratur.

Ball, D.L. & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. I J. Boaler (Red.) *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics* (s. 83-104). Westport, CT:Ablex.

Björkvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I Barbro Grevholm (Red.) *Matematik-didaktik, ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Boero, P & Dapueto, C. (2007). Problem solving in mathematics education in Italy: dreams and reality. *ZDM Mathematics Education* 39:383-393.

Boesen, J., Emanuelsson, B., Ryding, R., Wallby A. & Karin Wallby K. (2007). Inspiration för svensk matematikutbildning. I J. Boesen m.fl. (Red.) *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*, s. 1-6. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Clark, D., Merrilyn, G. & Morony, W. (2007). Problem solving and working mathematically: an Australian perspective. *ZDM Mathematics Education* 39:475-490.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. I F. Lester (Red.) *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J. & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 39:459-473.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Eriksson, R. (1991). Från min klass. I G. Emanuelsson, B. Johansson och R. Ryding (Red.) *Problemlösning*, s.101-112. Lund: Studentlitteratur.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM Mathematics Education* 39:491-501.

Franke, M. L., Kazemi, E. & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. I Frank K. Lester, Jr. (Red.) *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* s. 225-256. NC: National Council of teachers of mathematics NCTM.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Human, P. Murray, H., Olivier, A. & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: the case of mathematics. *Educational researcher* 24:12-21.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics education* 39:503-514.

Jaworski, B. (1996). Kan alla elever vara matematiker? I Göran Emanuelsson m.fl. (Red) *Matematik – ett kommunikationsämne,* s. 92-100. Göteborg: NCM/Nämnaren.

Johansson, B. Och Svedner, P. O. (2006). Examensarbete i lärarutbildningen – undersökningsmetoder och språklig utformning. Uppsala: Kunskapsföretaget.

Kihlström, S. (2007). Att observera – vad innebär det? I J. Dimenäs (Red.) *Lära till lärare* s. 30-46. Stockholm: Liber.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.) (2001). *Adding + it up – Helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.

Lesh, R & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I Frank K. Lester, Jr. (Red.) *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning* s. 763-804. National Council of Teachers of Mathematics NCTM.

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. (1989) *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes*. Final report to the National Science Foundation of NSF project MDR 85-50346.

Lester, F. Jr. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematical education* 25: 660-675.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I Göran Emanuelsson m.fl. (Red.) *Matematik – ett kommunikationsämne,* s. 85-91. Göteborg: NCM/Nämnaren

Lester, F.K. & Lambdin, D. (2007). Undervisa genom problemlösning. I J. Boesen et al (Red.) *Lära och undervisa i matematik – internationella perspektiv*, s. 95-108. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Lester, F. & Cai, J. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning?* Research brief i serien Problem solving s. 1-6. National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.

Matematikdelegationen, SOU 2004:97. *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* Stockholm: Utbildningsdepartment.

National Center for Education Statistic NCES, (2003). *Teaching mathematics in seven countries – results from the TIMSS 1999 video study*. Washington: US Department of Education.

Patel, R. & Davidson, B. (2011). *Forskningsmetodikens grunder – Att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. Lund: Studentlitteratur.

Pólya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton: University press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Red.) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, s. 334-370. New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM Mathematics Education* 39:537-551.

Skolinspektionen (2009). *Undervisningen I matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet*. Kvalitetsgranskning rapport 2009:5. Stockholm.

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr11*. Stockholm: Skolverket.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education* 2:107-116.

Silver, E. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some underrepresented themes and needed directions. I Edward A. Silver (Red.) *Teaching* *and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, s. 247-266. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. I Frank K. Lester, Jr. (Red) *Second handbook of research on Mathematics teaching and learning*. National Council of teachers of mathematics NCTM, s. 157- 223.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Doktorsavhandling, Umeå: Umeå universitet.

Taplin, M.; Chan, C. (2001). Developing problem-solving practitioners. *J Math Teacher Educ*, 4: 285-304.

Törner, G., Schoenfeld, A.H. & Reiss, K.M. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 39:353.

Ulin, B. (1996). Att starta med problem. *Nämnaren* 3: 39-43.

Vetenskaprådet (2011). *God Forskningssed*. Vetenskapsrådets rapportserie 1:2011. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Van de Walle, J. (2007). Chapter 4 - Teaching through problem solving. I *Elementary and Middle School Mathematics – teaching developmentally s*. 37-60. Boston: Pearson. Hämtad från http://www.scribd.com/doc/46806653/Van-de-Walle-Chapter-4-Problem-Solving

Wistedt, I. och Johansson, B. (1991). Undervisning om problemlösning – ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson och R. Ryding (Red.) *Problemlösning*, s.13-22. Lund: Studentlitteratur.

Wyndhamn, J. (1991). Problemmiljö och miljöproblem. I G. Emanuelsson, B. Johansson och R. Ryding (Red.) *Problemlösning*, s.51-65. Lund: Studentlitteratur.

Wyndhamn, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Slutrapport, Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.

Bilagor

Bilaga 1a. Observationens instrument

Frågor och aspekter som registrerades innan, under och efter lektionerna.

Frågor innan lektionen

- Hur väljs det problem som ska behandlas under lektionen?
- Hur tänker läraren när den väljer eller formulerar ett problem i förhållande till de lärandemål som är uppsatta för lektionen?

Observation under lektionen

- Hur ser klassrummets planlösning ut?
- Hur ser klassrumsmiljön ut?
- Hur är lektionens kronologiska disposition? Kan olika faser särskiljas? Vad gör läraren vid varje moment (Vilken/vilka är lärarens roll/roller)?
- Hur hanterar läraren samtalet i klassrummet under varje moment?
- Hur handleder läraren eleverna medan de löser problem?
- Lyfter läraren fram användning av olika problemlösningsstrategier? På vilket sätt?
- Hur hanterar läraren elevernas olika förmågor/kunskapsnivå?

Frågor efter lektionen

- Hur använder läraren lektionens utfall i planeringen för nästa lektion?

Bilaga 1b. Intervjuformulär

Frågorna ställdes inte i samma ordning till varje lärare.

- Vad menar man med matematikundervisning genom problemlösning?
- Hur utvecklades din undervisning? Vilka hinder/problem mötte du under utvecklingen? Har du något särskild fortbildning i område? Har annan/andra lärare blivit en förebild eller en inspirationskälla?
- Hur lång tid tar det för en klass att vänja sig vid undervisning genom problemlösning?
- Vilka kriterier ska en matematiklärare uppfylla för att kunna arbeta med en undervisning genom problemlösning?
- Hur skulle du beskriva din roll som lärare när du undervisar genom problemlösning?
- Hur handleder du eleverna när de löser problem?
- Kan du beskriva klassrumsmiljön (både fysisk och social) som du anser gynnar elevernas lärande i en undervisning genom problemlösning?
- Vilka slags problem använder du?
- Vilka är de viktigaste faktorerna att ta hänsyn till när man vill undervisa genom problemlösning?
- Hur behandlas lärandet av olika strategier för att lösa problem under lektionerna?

Bilaga 2a. Problem ”Pengar”

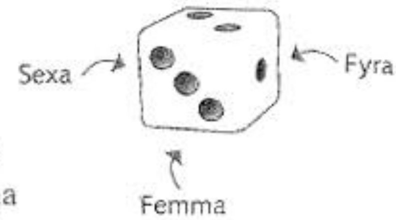
Pengar

Emma köper en klänning för 20% av sina pengar.
Sedan köper hon en bok för $\frac{2}{5}$ av de pengar som är kvar när hon köpt klänningen. När Emma har köpt klänningen och boken har hon 720 kronor kvar.

Hur mycket pengar hade Emma från början?

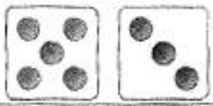
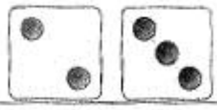
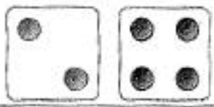
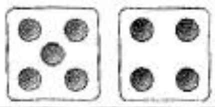
Bilaga 2b. Problem ”Trixa med tärning”

319 Trixa med tärning



På en vanlig sexsidig tärning finns ettan alltid mittemot sexan, tvåan mittemot femman och trean mittemot fyran.

Hanna slår en vit och en grå tärning. Hon multiplicerar antalet prickar på tärningarna (se steg 1 i tabellen). Sedan vänder hon på en tärning i taget och gör beräkningar som tabellen visar.

Steg nr			Produkt
1		Här ser du vad Hannas tärningar visade från början.	$5 \cdot 3 = 15$
2		Här har Hanna vänt på den vita tärningen så att sidan *mittemot* kommer upp.	$2 \cdot 3 = 6$
3		Här har Hanna vänt på den grå tärningen så att sidan *mittemot* kommer upp.	$2 \cdot 4 = 8$
4		Här har Hanna vänt tillbaka den vita tärningen.	$5 \cdot 4 = 20$
5		Slutligen beräknar Hanna summan av produkterna.	$15 + 6 + 8 + 20 = 49$

I Välj själv vad tärningarna visar från början. Följ samma instruktioner som i tabellen. Vilken summa får du?

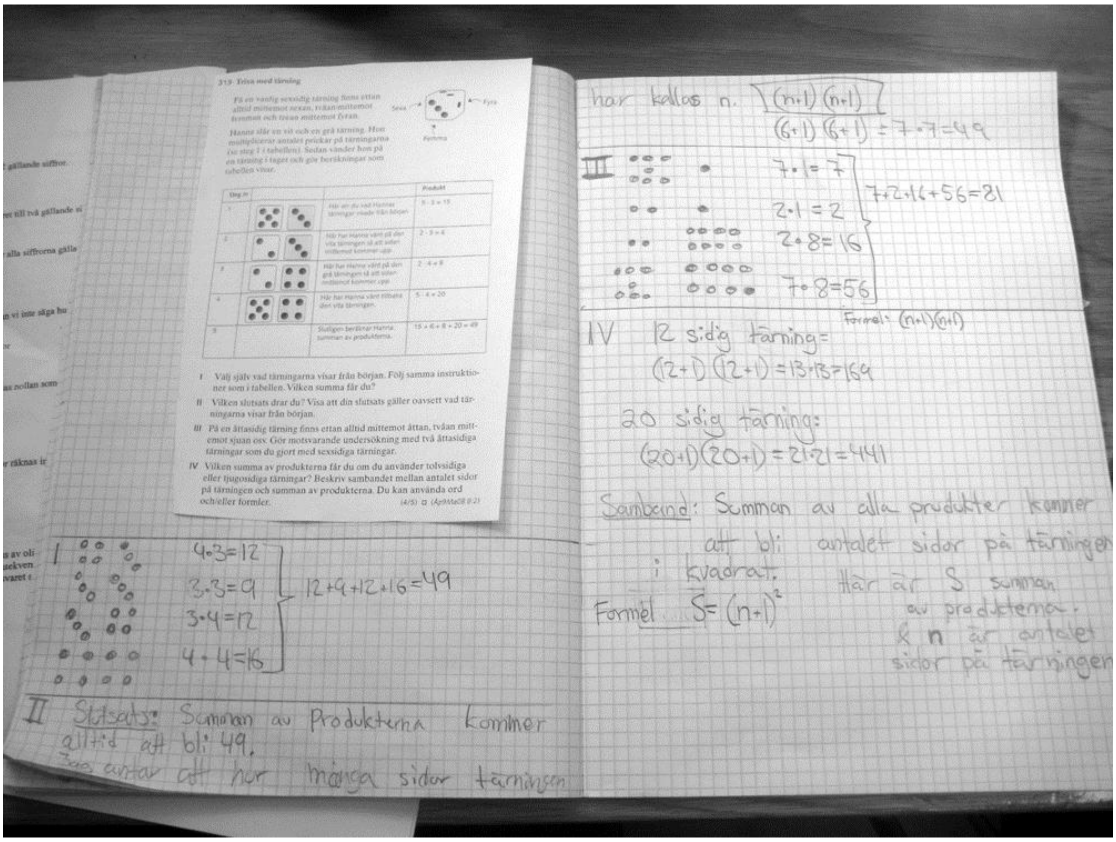
II Vilken slutsats drar du? Visa att din slutsats gäller oavsett vad tärningarna visar från början.

III På en åttasidig tärning finns ettan alltid mittemot åttan, tvåan mittemot sjuan osv. Gör motsvarande undersökning med två åttasidiga tärningar som du gjort med sexsidiga tärningar.

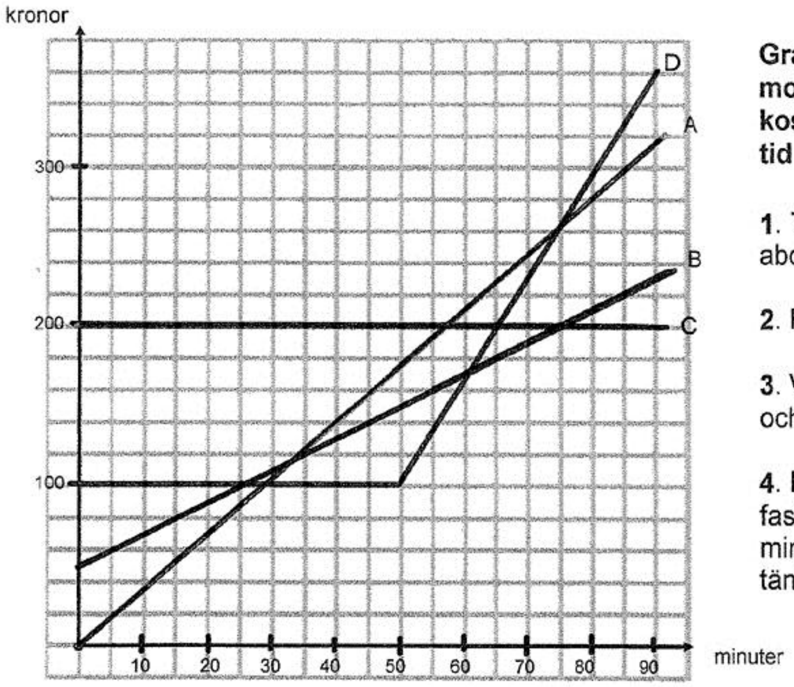
IV Vilken summa av produkterna får du om du använder tolvsidiga eller tjugosidiga tärningar? Beskriv sambandet mellan antalet sidor på tärningen och summan av produkterna. Du kan använda ord och/eller formler.

(4/5) ◻ *(Äp9Ma08 B:2)*

Bilaga 2c. Problemlösningsbok från en av Camillas elever i årskurs nio.



Bilaga 3a. Gruppuppgiften i Felicias prov



Graferna visar olika mobilabonnemang och deras kostnader om man ringer en viss tid under en månad.

1. Teckna en formel för abonnemangen A, B och C

2. Förklara med ord vad graf D visar.

3. Vilket abonnemang skulle ni välja och varför?

4. Rita in en graf som har samma fasta kostnad som B och samma minutkostnad som A. Förklara hur ni tänker.

Bilaga 3b. Problem ”Godispåsen”

Godispåsen

Materiel:

Godispåse/tablettask med godisbitar i minst tre olika färger.

Deltagare:

Enskild uppgift

Utförande:

Uppgifterna ska tydligt redovisas på ett separat papper och lämnas in till din lärare

1. Öppna påsen!

a) Hur många godisbitar finns det av varje färg?

b) Hur många procent av bitarna utgör varje färg?

2. Ät upp tre valfria bitar!

a) Hur många godisbitar finns det nu av varje färg?

b) Hur många procent av bitarna utgör nu varje färg?

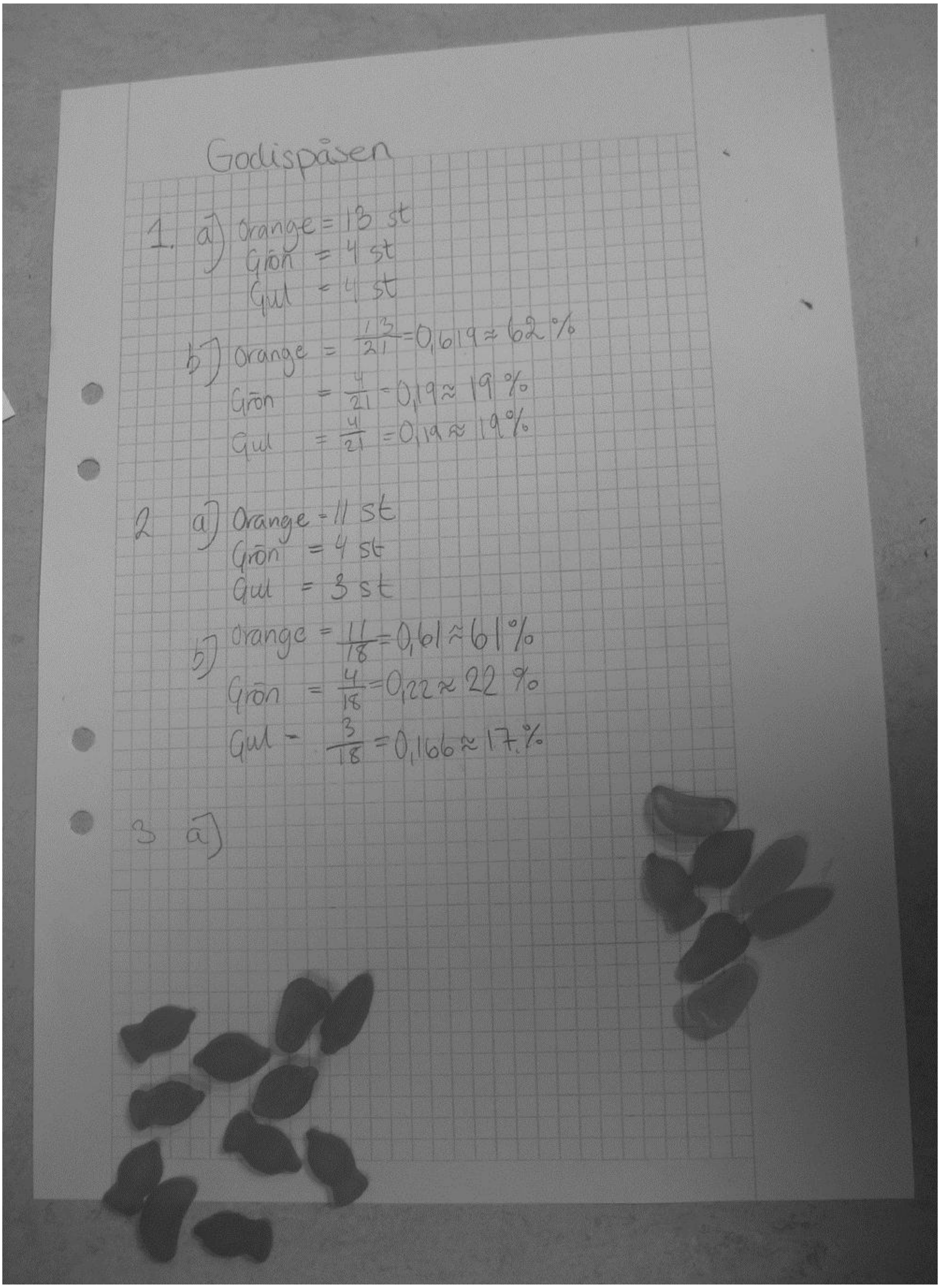
3. a) Ät nu upp så många godisbitar att 40 % av de kvarvarande bitarna har samma färg.

b) Förklara hur du tänkte.

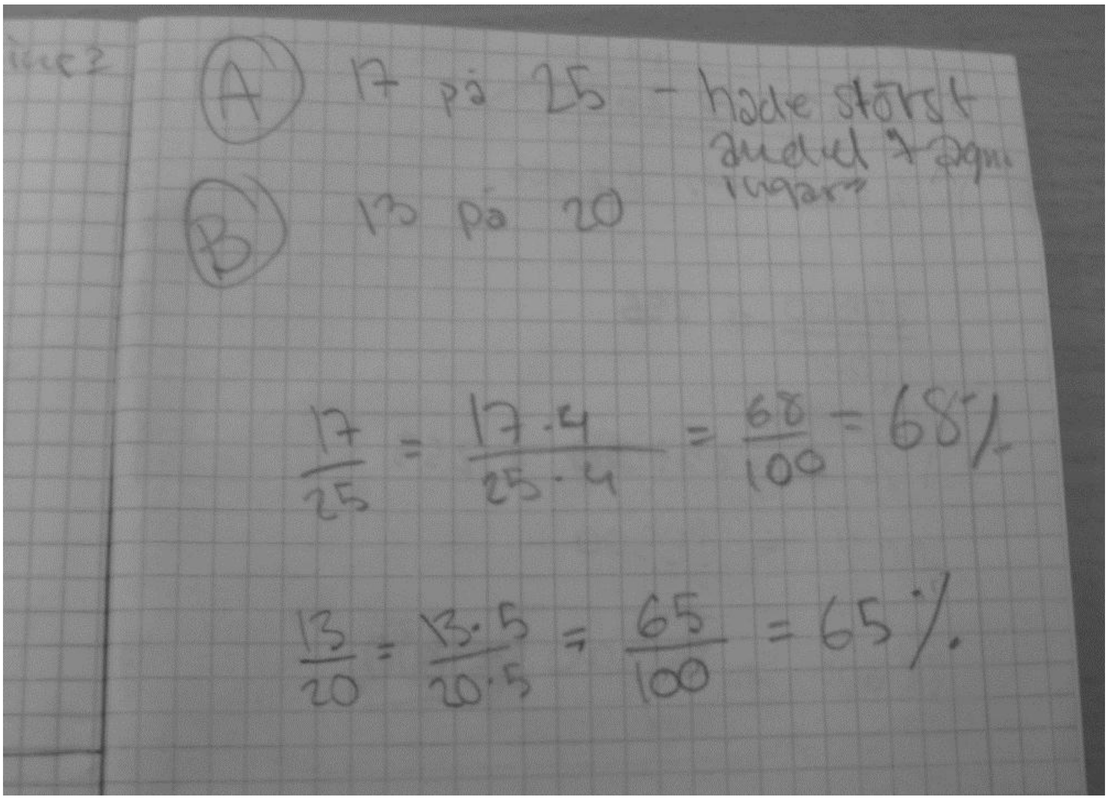
c) Kunde du ha gjort på något annat sätt?

4. Sammanfatta hur du gör för att ta reda på hur många procent en färg utgör.

Bilaga 3c. En elevs lösning till problemet ”Godispåsen”

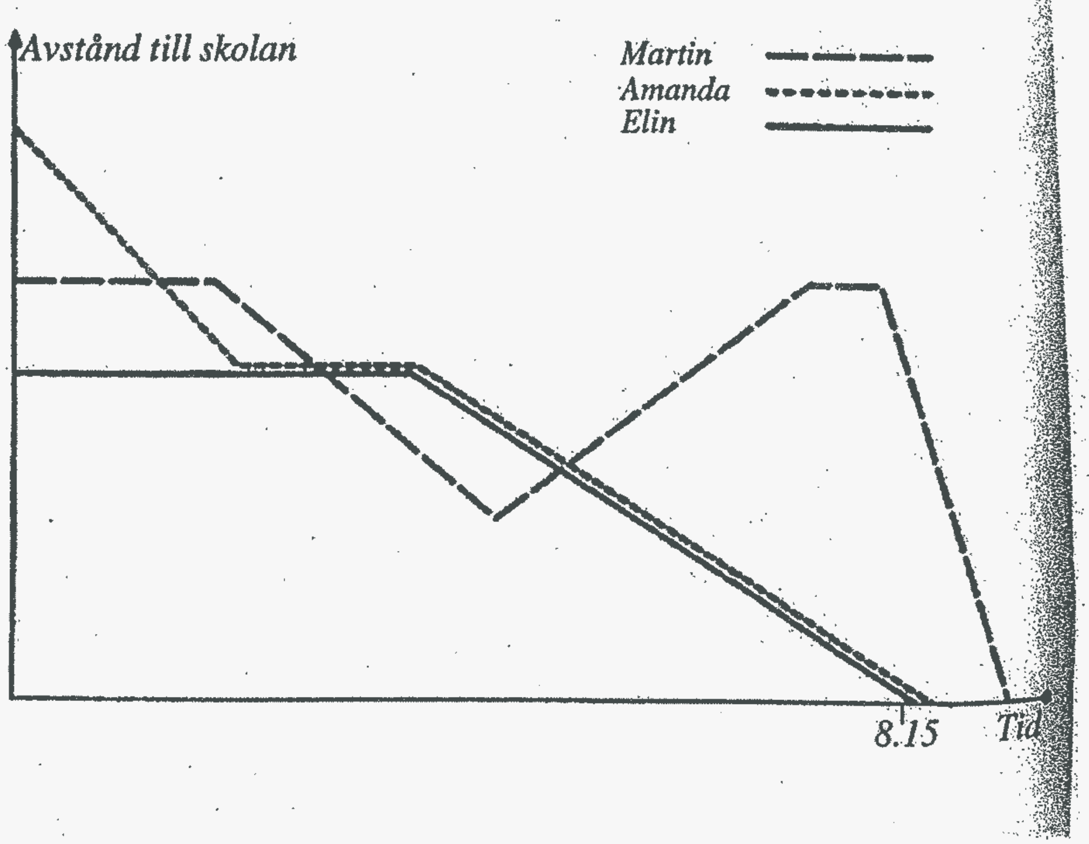


Bilaga 4a. En elevs lösning till Hasses problem om målvaktens räddningar.

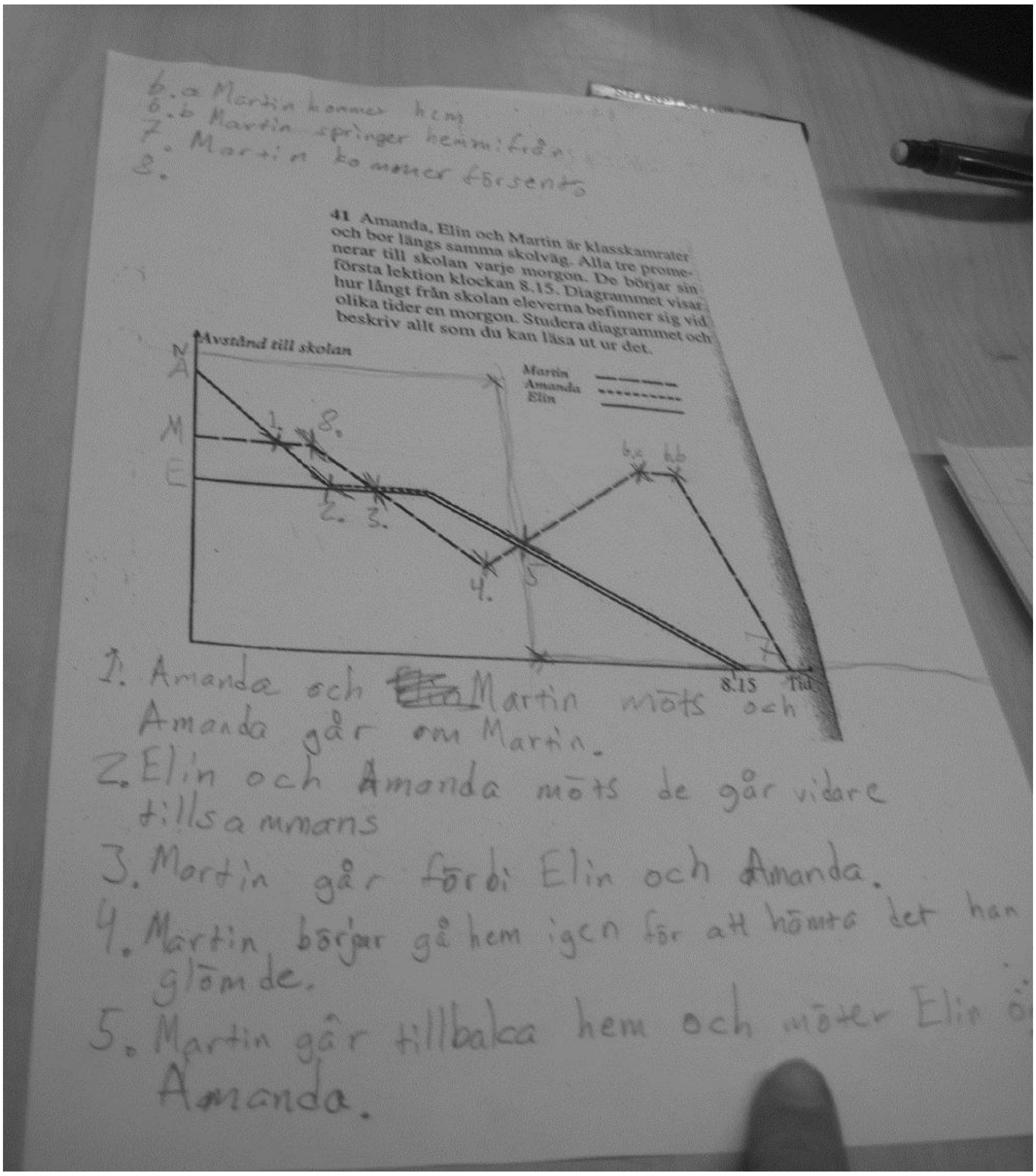


Bilaga 4b. Hasses inledande uppgift

41 Amanda, Elin och Martin är klasskamrater och bor längs samma skolväg. Alla tre promenerar till skolan varje morgon. De börjar sin första lektion klockan 8.15. Diagrammet visar hur långt från skolan eleverna befinner sig vid olika tider en morgon. Studera diagrammet och beskriv allt som du kan läsa ut ur det.



Bilaga 4c. En elevs resonemang om diagrammet



Bilaga 4d. Matris för bedömning i matematik. Matrisen är baserad på kursplanen för matematik i den nya läroplanen för grundskolan, Lgr11.

Kriterier för bedömning av kunnande i matematik

	Betyg E	Betyg C	Betyg A
Problemlösningsförmåga	Löser enkla matematiska problem samt beskriver sin metod. Tolkar enkla vardagliga situationer och formulera dessa med ett matematiskt språk.	Löser sammansatta matematiska problem samt förklarar val av metod. Tolkar bekanta vardagliga situationer och formulerar dessa med ett matematiskt språk.	Löser sammansatta matematiska problem samt kan argumentera för den valda metoden. Tolkar nya situationer och formulerar dessa matematiskt på ett välutvecklat sätt.
Begreppsförståelse	Har grundläggande förståelse av matematiska begrepp och kan använda denna i kända situationer.	Har god förståelse av matematiska begrepp och kan använda denna med säkerhet i bekanta situationer.	Har mycket god förståelse av matematiska begrepp och kan använda denna med stor säkerhet även i nya situationer.
Procedurförmåga	Använder grundläggande metoder vid olika typer av beräkningar på ett korrekt sätt.	Använder metoder vid olika typer av beräkningar på ett säkert och korrekt sätt. Har flera metoder att välja på.	Väljer lämplig metod på ett medvetet sätt beroende på situationen. Visar mycket god säkerhet i beräkningarna.
Resonemangsförmåga	För ett logiskt resonemang vid enkla matematiska sammanhang. Kan även till viss del resonera om val av olika strategier och rimlighet.	För ett logiskt resonemang anpassat till sammanhanget. Resonerar om val av strategier och rimlighet och kan motivera dessa val.	För ett logiskt resonemang väl anpassat till situationen. Resonerar om val av strategier och rimlighet med mycket välgrundade motiveringar samt kan generalisera dessa val.
Kommunikationsförmåga	Använder matematiska uttryckssätt på ett enkelt sätt i tal och skrift. Deltar i regel i matematiska samtal. Den skriftliga redovisningen går att följa.	Använder matematiska uttryckssätt på ett utvecklat sätt i tal och skrift. Deltar i samtal genom att både framföra egna tankar och ta del av andras argument. Redovisar skriftligt på ett tydligt sätt hur beräkningarna gjorts.	Använder matematiska uttryckssätt på ett välutvecklat och nyanserat sätt i tal och skrift. Tar del av andras förklaringar och för diskussionen framåt med nya infallsvinklar. Den skriftliga redovisningen är mycket tydlig och innehåller även generaliserande uttrycksformer.