

KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN

Utveckling av en matematiklaboration på Vetenskapens hus

En tillämpning av gruppteori
på molekylär symmetri

författad av
Tor Liljegen

Examensarbete vid programmet *Civilingenjör och lärare* inom
området Teknik och lärande

vid
Institutionen för matematik
Skolan för teknikvetenskap

Stockholm 2010



KUNGLIGA TEKNISKA HÖGSKOLAN

Abstract

Institutionen för matematik
Skolan för teknikvetenskap

Master of Science in Engineering and of Education

by [Tor Liljegen](#)

This master thesis is the documented work of the construction process and testing of a three hour laboratory session in mathematics aimed at high school level students. The purpose of the thesis was to create an interesting laboratory session for the science education center "The House of Science" that could be used as a part of their regular program directed to schools. The thesis explores the possibilities for how one can construct a laboratory session on the topic "molecular symmetry" as well as the underlying pedagogical theories used to describe learning processes in creative contexts. A model for such a session is proposed, an evaluation is conducted and its results and implications are appropriately discussed. An important review of the mathematical background of symmetries, group theory and linear representations of finite groups was written and can be found in the appendices.

Keywords: science education, laboratory session, molecular symmetry, House of Science.

Innehåll

Abstract	i
1 Inledning	1
1.1 Förord	1
1.1.1 Tack	1
1.1.2 Handledare, examinerator och opponert	1
1.2 Bakgrund	2
1.2.1 Om examensarbetet	2
1.2.2 Vetenskapens Hus	3
1.3 Syfte och mål med examensarbetet	3
1.3.1 Syfte	3
1.3.2 Mål	3
1.4 Frågeställningar	4
1.4.1 Avgränsningar	4
2 Metod	6
2.1 Översikt	6
2.2 Utveckling av laborationen	7
2.2.1 Förarbete	7
2.2.1.1 Vidga perspektiv	7
2.2.1.2 Frågor/mål	8
2.2.1.3 Laborationens matematikinnehåll	8
2.2.1.4 Laborationens form	8
2.2.1.5 Representationsformer	9
2.2.2 Konstruktion	10
2.2.2.1 Molekylbibliotek	10
2.2.2.2 Elevmaterial: laborationsuppgifter	11
2.2.2.3 Assistenthandledning	11
2.2.2.4 Information till läraren	11
2.3 Utvärderingar	12
2.3.1 Första testlaborationen/undersökningen	12
2.3.2 Andra testlaborationen/undersökningen	12
2.3.2.1 Förberedelser	12
2.3.2.2 Utvärderingens utformning	13

3	Litteraturöversikt	14
3.1	Filosofiska begrepp	14
3.1.1	Ontologi	14
3.1.2	Epistemologi	15
3.1.3	Konstruktivism	15
3.1.4	Positivism	16
3.2	Teorier om lärande	17
3.2.1	Sociokulturellt perspektiv	17
3.2.1.1	Språkets roll i lärandet	17
3.2.1.2	Artefakter och mediering	19
3.2.1.3	Tanke och språk	20
3.2.1.4	Ontologi och epistemologi	20
3.2.2	Instrumentell pragmatism	21
3.2.2.1	Pedagogisk metod	21
3.2.2.2	Ontologi och epistemologi	23
3.3	Begreppsbildning och arbetsformer	23
3.3.1	Om att ställa frågor	23
3.3.1.1	Blooms taxonomi	24
3.3.1.2	Relation till kursmål	25
3.3.1.3	Kritik	25
3.3.2	Begreppsbildning i matematikundervisning	26
3.3.2.1	Begreppsbildning och omvärlden	26
3.3.2.2	Begreppsbildning och kursplaner	26
3.3.2.3	En balans	27
3.3.3	Att välja arbetsform	28
3.4	Lärarens roll	29
4	Resultat	30
4.1	Matematiska resultat	30
4.1.1	Teoridel	30
4.1.2	Tillämpningen	30
4.2	Resultat av utvärderingarna	31
4.2.1	Matematikassistenternas utvärdering	31
4.2.2	Testklassernas utvärderingar	32
4.2.2.1	Första gruppen	32
4.2.2.2	Andra gruppen	32
4.3	Den färdiga laborationen	33
5	Diskussion	34
5.1	Laborationens innehåll	34
5.1.1	Laborationsmaterialets roll	34
5.1.2	Val av arbetsform	35
5.1.3	Motivation och lust att lära	36
5.1.4	Assistentens roll i laborationen	37
5.2	Relation till kursmål	38
5.2.1	Matematikämnet	38
5.2.2	Kemiämnet	39

5.3	Reflektion kring testlaborationer och utvärderingar	39
5.3.1	Första testlaborationen	40
5.3.2	Andra testlaborationen	40
5.4	Framtida utveckling	41
5.5	Slutsatser	41
A	Matematisk bakgrund	43
A.1	Introduktion	43
A.1.1	Om grupper	43
A.1.2	Den generella gruppens egenskaper	44
A.1.3	Grupper och ordningar	45
A.1.4	Speciella grupper	48
A.1.5	Delgrupper	49
A.1.6	Homomorfier och isomorfier	53
A.2	Om representationer av grupper	56
A.2.1	Representationsteorins grundtanke	56
A.2.2	Representationer av ändliga grupper	56
A.2.3	Linjära representationer - en generalisering	57
A.2.4	Delrepresentationer	58
A.2.5	Irreducibla representationer	60
A.2.6	Karaktärer	60
A.2.7	Karaktärer och ortogonalitetsrelationer	65
A.2.8	Att finna antalet irreducibla representationer	68
A.3	Om symmetrier	71
A.3.1	Inledning	71
A.3.2	Symmetrielement och -operationer	72
A.4	Vibrationer i en molekyl	75
A.4.1	Definitioner	76
A.4.2	Representationer	79
A.4.3	Karaktärer	81
A.4.4	Basbyte till symmetrianpassad normalsvängningsbas	84
A.4.5	Beräkning av vibrationsfrekvenserna	86
B	Arbetsuppgifter	88
C	Assistenthandledning	89
D	Molekylbibliotek: elevversion	90
E	Molekylbibliotek: assistentversion	91
F	Introduktion, presentationen	92
G	Undersökning, elevsvar	93
H	Text till lärare	94

Litteratur

95

Kapitel 1

Inledning

1.1 Förord

1.1.1 Tack

Jag vill tacka ett antal nyckelpersoner som varit med mig under arbetets gång och gjort detta examensarbete möjligt.

Tack David Eklund för våra givande samtal om matematikens mysterier i allmänhet och om den matematik jag skrivit i synnerhet. Den matematik jag lärt mig i ditt sällskap blev som kronan på verket för denna utbildning.

Tack Gunilla Olofsson för ditt fina stöd under de perioder av osäkerhet som varit. Du har gett mig ovärderliga förslag på litteratur och innehåll samt tips under skrivandeprocessen.

Tack Cecilia Kozma för den säkra handledning jag fått från dig under exjobbets samtliga etapper. Din närvaro och hjälp genom krångliga passager har varit en stor tillgång under arbetets gång.

Tack Hans Thunberg och Leif Hammar för er konstruktiva kritik som höjt kvaliteten på mitt examensarbete.

1.1.2 Handledare, examinerator och opponenter

Huvudhandledning genomfördes av David Eklund vid Institutionen för matematik, Kungliga Tekniska Högskolan.

Biträdande handledning genomfördes av Gunilla Olofsson vid Institutionen för matematikämnet och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholms universitet.

Extern handledning genomfördes av Cecilia Kozma, ansvarig för matematik och fysik på Vetenskapens Hus.

Examinator var Hans Thunberg vid Institutionen för matematik, Kungliga Tekniska Högskolan.

Opponent var Leif Hammar, student på programmet Civilingenjör och lärare med inriktningen matematik och fysik.

1.2 Bakgrund

1.2.1 Om examensarbetet

I slutet av utbildningen Civilingenjör och lärare (300 hp) genomför alla studenter ett examensarbete som faller inom ämnesområdet teknik och lärande. Detta examensarbete följer läroplanen för kursen SAX210 i vilken medföljer huvudhandledning på en passande institution under Kungliga Tekniska högskolan samt biträdande handledning från Stockholms Universitet, också där under en passande institution. I mitt fall är de handledande institutionerna på respektive lärosäte Institutionen för matematik respektive Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik.

Kursen SAX210 har en omfattning på 30 hp (20 veckor) varav 15 hp (10 veckor) skall vara verksamhetsförlagd utbildning (förkortat VFU). Denna VFU görs på Vetenskapens Hus och utgörs av arbetet med laborationsutvecklingen.

Jag ska i mitt examensarbete arbeta med utvecklingen av en laboration inom matematikämnet för Vetenskapens Hus i Stockholm. Laborationens innehåll och ämne bestämdes till att vara en introduktion till symmetriegenskaper för molekyler. Det finns tre anledningar till att detta ämne valdes. För det första är laborationer inom matematikämnet en relativt ny verksamhet på Vetenskapens Hus, varför en tillkomst av nya laborationer är viktig. För det andra efterfrågar Vetenskapens Hus laborationer som anknyter till miljö ett huvudtema för Vetenskapens Hus 2010/2011, och en laboration inom ämnet symmetriska molekyler kan knytas till företeelser som påverkar miljön. För det tredje har laborationerna som mål att låta eleverna träffa på intressant och för skolan ovanlig matematik, med avsikt att väcka eller stimulera ett intresse för matematik. Innehållet i laborationen tycker jag väl stämmer överens med detta.

I examensarbetet ingår således att utveckla och formulera innehåll och uppgifter till laborationen samt att ta fram en handledning till de laborationsassistenter som i framtiden kommer att genomföra laborationen med elevgrupper. Om det innehåll som jag tar fram

visar sig kunna spänna över flera laborationer kommer jag att lämna förslag och idéer om hur detta material kan göras till nya laborationer.

1.2.2 Vetenskapens Hus

Vetenskapens Hus är en utbildningsverksamhet som bedrivs i nära samarbete med Kungliga Tekniska Högskolan och Stockholms universitet. Verksamheten går bland annat ut på att erbjuda laborationer och föreläsningar i ämnena astronomi, bioteknik, kemi, fysik eller matematik. Målgruppen är alla landets skolor och elever. Laborationerna handleds av assistenter som är forskare eller studenter på respektive lärosäte, och laborationsdeltagarna kommer på så vis nära den akademiska världen som väntar efter gymnasiet.

1.3 Syfte och mål med examensarbetet

1.3.1 Syfte

Syftet med examensarbetet är tredelat. Den första delen är matematisk och går ut på att dels att förstå men också beskriva den matematik som används för att beskriva symmetrier i allmänhet, molekylers symmetrier samt att också tillämpa detta på ett faktiskt problem inom kemien. Den andra delen är pedagogisk/didaktisk och går ut på att utforska de pedagogiska och didaktiska aspekterna av laborativ verksamhet inom matematikämnet. Den tredje delen är att utveckla en produkt, laborationen, åt Vetenskapens Hus.

1.3.2 Mål

Målet med examensarbetet är att utveckla en laboration inom matematikämnet som är färdig att sätta på Vetenskapens Hus, vars innehåll faller inom ramen för miljötemat 2010-2011. När jag utvecklar denna laboration skall jag använda de kunskaper jag tillägnat mig i pedagogik/didaktik samt i matematik som handlar om symmetrier, med avsikt att stimulera lärandet, vara en inblick i matematiken spännande värld och ge goda erfarenheter av matematikämnet som ett sätt att lösa problem och beskriva världen. Mina delmål är således att skapa mig en bild över lärandeprocesser i matematik, lärandeprocesser i laborativ verksamhet, ta till forskningens/litteraturens idéer/förslag om laborativ matematik, beskriva och förstå symmetrier matematiskt, göra en koppling mellan symmetriteorier och molekyler, tillämpa matematiken på ett problem inom kemien, utveckla ett laborationsupplägg som tar hänsyn till pedagogiken/didaktiken som

jag tidigare beskrivit, utveckla laborationsuppgifter och material, skriva en laborationshandledning till de assistenter som i framtiden kommer att hålla laborationen, och till sist om tiden räcker till ska jag ge förslag på nya laborationer på samma tema som min.

1.4 Frågeställningar

Varje examensarbete och projekt behöver frågeställningar som:

1. leder arbetet med examensarbetet mot för att uppfylla de uppsatta delmålen
2. ska vara besvarade när examensarbetet är klart.

Eftersom mitt examensarbete kan sägas vara uppdelat i tre delar - matematisk, pedagogisk/didaktisk och laborationsutveckling - är mina frågeställningar också uppdelade i tre kategorier.

Att förstå och beskriva den *matematik* som ligger till grund för förståelsen av symmetrier.

- Hur beskriver matematiken symmetrier?

Att förstå och beskriva de *pedagogiska* aspekterna av laborativ verksamhet samt att ta till sig och redogöra för relevant *didaktisk* forskning.

- Hur kan lärande under en laboration beskrivas?
- Vilka arbetsformer passar en laboration om symmetrier?

Att utveckla en *laboration* om molekylär symmetri.

- Vilket material ska användas för att åskådliggöra symmetrier och hur ska det användas?

1.4.1 Avgränsningar

Vad gäller den matematiska frågeställningen, kan en symmetri i matematiken ha flera betydelser. Jag avgränsar betydelsen av en symmetri till en definition som passande beskriver symmetriska objekt i rummet och som har gruppteoretiska tillämpningar.

De teoretiska perspektiv jag beaktar vid arbetet med hur lärandet under en laboration kan beskrivas, begränsas till Lev Vygotskys sociokulturella perspektiv samt John Deweys

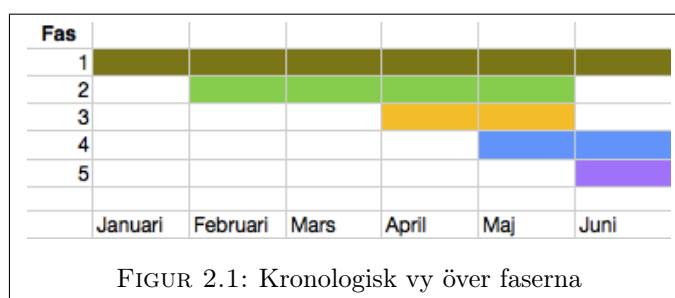
instrumentella pragmatism. Mina källor för passande arbetsformer begränsas till material från Nationellt centrum för matematikutbildning och Skolverkets publikationer. Det material som ska användas för att åskådliggöra symmetrier avgränsas till det material som finns tillgängligt på Vetenskapens Hus.

Kapitel 2

Metod

2.1 Översikt

I detta kapitel kommer jag att redogöra för hur jag resonerat och metodiskt gått till väga för att komma fram till resultatet. Arbetet med examensarbetet kan delas in i tre huvudsakliga faser: 1. Litteraturstudier, 2. utvecklingsarbete och 3. utvärderingar. De andra faserna 4. respektive 5. är avslutande rapportskrivande respektive presentation av arbetet och kommer inte att behandlas för sig i rapporten. Hur faserna har avlöst varandra kan beskådas i figuren nedan.



Den första delen, litteraturstudier, har pågått under hela examensarbetet. Jag har tillgripit litteraturen när behov har uppkommit, vilket exempelvis var under konstruerandet av molekylbibliotek, vid skrivandet av den matematiska delen i rapporten och vid arbetet med laboranternas arbetsuppgifter.

Den andra delen, utvecklingsarbete, pågick från det att jag hade läst in mig tillräckligt på laborationens ämne och till det att jag justerat laborationen efter att testklasserna provat laborationen. Utvecklingsarbetet har varit mångfacetterat och krävt kunskaper i såväl matematik, pedagogik, didaktik och CM¹ (eng. "classroom management", sv. ung. bet. lärarledarskap).

¹Kjell Granström: Ledarskap i klassrummet, i: (Forskning i fokus 33), 2007.

Den tredje delen, utvärderingarna, är ett led i att göra laborationen klar för användning i den dagliga verksamheten med matematiklaborationer på Vetenskapens Hus. Utvärderingarna gjordes med laboranterna efter en genomförd testlaboration. Under denna rubrik redogör jag för hur jag lade upp laborationerna och hur utvärderingen var konstruerad.

2.2 Utveckling av laborationen

I detta stycke redogör jag för hur arbetsgången med laborationen förlöpt, vilket material jag använt och vilket material jag producerat.

2.2.1 Förarbete

Jag producerade många experimentella dokument och annat testmaterial innan själva laborationen tog form. Här följer en redogörelse för hur förarbetet såg ut och det material som jag testade.

2.2.1.1 Vidga perspektiv

Med tanke på att min slutgiltiga produkt till uppdragsgivaren i examensarbetet skulle vara en laboration i matematik som riktar sig mot gymnasieelever, var det rimligt att påbörja arbetet med två saker: att sätta mig in i den teori som laborationen kommer att spänna över samt bilda mig en uppfattning om hur en laboration i matematik genomförs.

Således påbörjades arbetet med en genömläsning av det matematiska stoffet. När en uppfattning över detta område bildats var nästa område aktuellt att utforska, nämligen: hur ser en laboration i matematik ut på Vetenskapens Hus? För att få veta om detta genomförde jag en auskultation på en av de matematiklaborationer som erbjuds av Vetenskapens Hus. Det var en 2×45 minuter lång laboration om koder och krypton vilken hölls av en vid Vetenskapens Hus ordinarie matematikassistent. De första 45 minuterna innehöll en lärarledd demonstration och diskussion i helklass samt en mindre uppgift mot slutet som eleverna fick lösa enskilt eller i grupp. De sista 45 minuterna fick eleverna lösa krypton av varierande typ och svårighetsgrad.

2.2.1.2 Frågor/mål

Vid denna tidpunkt hade jag således samlat på mig material om såväl innehåll och önskvärd ungefärlig form på laborationen. Det var nu aktuellt att sätta upp ett antal frågeställningar som jag kunde arbeta i relation till. Dessa var:

- Hur stor del av matematiken ska laborationen spänna över? Vad är rimligt?
- Hur ska tiden fördelas mellan lärarledd diskussion, gruppuppgifter osv?
- Vilken karaktär ska elevuppgifterna ha?
- Vilken miljöanknytning ska tas upp på laborationen?
- Hur åskådliggör man symmetrier för eleverna? Vilka verktyg ska användas till det?
- Vilka molekyler är lämpliga att använda?

2.2.1.3 Laborationens matematikinnehåll

För att bestämma mig om matematikinnehållet i laborationen, undersöktes kursmålen för matematik- och kemiämnet på gymnasiet. Jag undersökte även det sakinhåll som finns i kurserna i matematik och bestämde mig för att utesluta matematik som explicit introducerar linjär algebra och gruppteori. Detta är rimligt med tanke på att linjär algebra och gruppteori läses först på eftergymnasiala utbildningar. Mitt mål med laborationen innehåll blev alltså att ta fram en laboration som får deltagarna att resonera kring symmetrier, med en inriktning mot tillämpningar inom kemin, och med en möjlig introduktion till gruppteoretiska resonemang i ett avslutande moment.

2.2.1.4 Laborationens form

I ett första utkast till laboration beskrev jag mitt syfte med laborationen samt ett förslag på arbetsformer. I korthet tänkte jag mig en laboration med nio moment där eleverna fick arbeta med olika molekyler, bekanta sig med olika symmetrioperationer och sedan lära sig sätta samman dessa för att göra en "multiplikationstabell" (gruppatabell, Cayley-tabell). Eleverna skulle få arbeta i små grupper med en storlek på 3-5 elever per grupp. För att fånga elevernas intresse direkt föreslog jag en introduktion bestående av ett exempel med kirala molekyler där två enantiomerer doftar olika. Exempel på sådana fann jag i litteraturen: (+)-carvone respektive (–)-carvone doftar kummin respektive grönmynta. Asparagin är också en kiral molekyl där ena enantiomeren smakar sött och den andra bittert.

Med denna planering i nio moment och en rast på 10 minuter får varje moment som mest ta 11 minuter i anspråk, vilket var ett problem. Planeringen behövde omformas så att antalet moment minskades. Den idé som fick fäste gick ut på att de första 45 minuterna skulle tjäna som en introduktion till symmetribegreppet där eleverna får bygga molekyler och undersöka olika aspekter av dess symmetriegenskaper. De sista 45 minuterna görs antingen spår 1 eller spår 2, där spår 1 lägger fokusen på matematik och spår 2 lägger fokusen på kemiska tillämpningar. Detta upplägg benämns ”spårmodellen”. I spår 1 undersöker eleverna vad som sker när man sätter samman symmetrioperationer och konstruerar en grupptabell över någon lämplig molekyls symmetrigrupp. Spår 2 kommer inte att vara färdigutvecklat inom ramen för detta examensarbete.

2.2.1.5 Representationsformer

Med tanke på att laborationsinnehållet kretsar kring tredimensionella objekt och manipulationer av dessa är det mycket lämpligt att låta eleverna använda molekylmodeller när de löser uppgifterna. Det finns dock många varianter av byggsatser som låter användaren konstruera tredimensionella figurer med hjälp av atomer och bindningar. Faktumet att det fanns flera varianter av byggsatser gjorde att jag fick testa vilken som passade bäst för mitt syfte. De två varianter som fanns till mitt förfogande på Vetenskapens Hus var byggsatserna Molymod² och Zometool³.

Testet genomfördes genom att ett antal molekyler konstruerades med båda byggsatserna. Därefter nedteknades byggsatsernas brister och förtjänster på olika områden som blev tydliga genom att jag testade att bygga olika molekyler. Jag redovisar mina tankar om testet i tabellen nedan.

Område	Molymod	Zometool
Atomer	En per atomslag, olikfärgade.	Endast en typ, enfärgad.
Bindningar	Alla bindningstyper.	Endast enkelbindning.
Stabilitet	Minskar med ökad molekylstorlek.	Alltid stabil.
Överensstämmelse m. molekylstruktur	Korrekta bindn.vinklar, valens och roterbara bindn.	Felaktiga bindn.vinklar, saknar valens och rotation.

Det är tydligt att Molymodbyggsatsen är att föredra i det här fallet när kontexten är kemi. Grunderna för bedömning hade dock sett annorlunda ut om laborationen istället

²URL: <http://www.molymod.com/>.

³URL: <http://www.zometool.com/>.

handlar om, säg, platonska kroppar, och utfallet hade antagligen varit till Zometools fördel. Förutom att använda byggsatser för att representera molekyler uppmanas eleverna även att teckna representationer på A4-ark. Detta för att träna förmågan att använda många representationsformer.

2.2.2 Konstruktion

Här redogör jag för hur jag arbetade med laborationens material och form. Det skriftliga materialet består av assistentmaterial, elevmaterial och en informationstext till läraren. Assistentmaterialet utgörs av en assistenthandledning och en assistentversion av molekylbiblioteket. Elevmaterialet utgörs av laborationens arbetsuppgifter och molekylbiblioteket i elevversion.

2.2.2.1 Molekylbibliotek

Molekylbiblioteket är en i bokstavsordning sorterad katalog över de molekyler som förekommer i laborationen. De molekyler som förekommer däri är valda efter sin lämplighet som material i laborationen. En molekyl bedömdes som lämplig om den inte var mycket invecklad att bygga (dvs. mer komplex än biphenyl), innehöll de atomslag som Molymodbyggsatserna erbjuder samt om den hade tydliga symmetrier. Kandidater till molekylbiblioteket fann jag i litteraturen och på Internet, se t.ex. Wherret⁴, Raman⁵ och Immel⁶. En kandidat valdes ut efter att den konstruerats i Molymod, dess symmetrier undersökts och dess relevans till laborationens uppgifter beaktats.

Molekylbiblioteket innehåller molekylen IUPAC⁷-namn eller trivialnamn om det finns tillgängligt, summaformel samt strukturformel. Samtliga molekylers strukturformler är konstruerade med JChemPaint⁸, ett program för redigering av 2D-molekylstrukturer.

Till assistentversionen lades ytterligare information till om molekylerna, som inte finns med i elevversionen: molekylen symmetrigrupp, något om molekylen användningsområde och andra relevanta kommentarer.

⁴Brian S. Wherret: Group theory for atoms, molecules and solids, London 1986.

⁵K. V. Raman: Group Theory and Its Applications to Chemistry, New Delhi 1990.

⁶Stefan Immel: Molecular Structures of Organic Compounds - Chirality, URL: <http://csi.chemie.tu-darmstadt.de/ak/immeltutorials/chirality/index.html> (hämtad 2010-05-20).

⁷IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry, URL: <http://www.iupac.org/> (hämtad 2010-05-20).

⁸JChemPaint, URL: <http://sourceforge.net/apps/mediawiki/cdk/index.php?title=JChemPaint> (hämtad 2010-05-20).

2.2.2.2 Elevmaterial: laborationsuppgifter

Vid konstruerandet av dessa uppgifter användes spårmodellen. Det var naturligt att i laborationens första del separera uppgifter som handlar om rotations- och spegelsymmetrier så att varje symmetrityp avhandlas separat. Jag valde att börja med rotations-symmetrier och därefter behandla spegelsymmetrier. Följden på uppgifterna blev naturligtvis densamma. Fyra uppgifter på temat rotation samt lika många på temat spegling formulerades. De första uppgifterna på varje tema var enklare och med öppna frågeställningar för att låta eleven fritt få utforska molekylen efter respektive symmetri. Därefter blir uppgifterna mer omfattande och kräver att eleven prövar, argumenterar och generaliserar.

Spår 1 består av en uppgift där eleverna ombeds konstruera en "multiplikationstabell" över en molekyls symmetrioperationer.

2.2.2.3 Assistenthandledning

Tanken med laborationen är att Vetenskapens Hus ska lägga den till sin repertoar av matematiklaborationer och erbjuda den till skolor. Det innebär att de ordinarie matematikassistenterna ska kunna sätta sig in i laborationens matematikinnehåll och den form jag utvecklat. Assistenthandledningen innehåller en mycket reducerad version av min matematikdel samt en genomgång av laborationen. Matematikdelen utgörs av en introduktion till grupp teori, en förklaring av symmetribegreppet och hur det relateras till symmetriska molekyler. Vidare innehåller handledningen en stegvis förklaring av uppgifterna, förslag på lämpliga frågor att ställa till klassen, viktiga ämnen som ska diskuteras och vilken matematik som bör introduceras innan en specifik uppgift delas ut.

2.2.2.4 Information till läraren

För varje verksamhetsområde på Vetenskapens Hus finns det informationsblad som beskriver de laborationer som erbjuds. Informationen inkluderar laborationens varaktighet, en presentation av dess ämnesmässiga innehåll, rekommenderade förkunskaper och eventuella förberedelser innan gruppen anländer och genomför laborationen. Som ett sista moment i projektet när jag slutfört arbetet med att utveckla laborationen, författade jag en sådan beskrivning. Den finns till beskådan i Bilaga [H](#).

2.3 Utvärderingar

Jag skriver om hur jag utformade undersökningarna som är basen för utvärderingen av laborationen. Jag berättar även om hur jag lade upp laborationerna under dessa testkörningar.

2.3.1 Första testlaborationen/undersökningen

Det första testet av laborationen utfördes med matematikassistenterna och min externa handledare som elever och jag som assistent. Syftet med testlaborationen var att undersöka hur väl arbetsuppgifterna och byggsatserna fungerade, att assistenterna skulle få bekanta sig med laborationen, att tidsåtgången kunde noteras samt att få återkoppling av assistenterna och min handledare.

Laborationen genomfördes i den ordning som är angiven i laborationshandledningen, dock med några undantag vad gäller innehållet: genomgångarna som hölls mellan uppgifterna var nedkortade med tanke på målgruppen samt att diskussionerna om uppgifterna uppehöll sig på det didaktiska planet snarare än det matematiska. Inför nya uppgifter berättade jag om dess syfte, intressanta ämnen att diskutera, tänkbara svårigheter och så vidare. Laborationen hölls alltså på en sorts metanivå där syftet med laborationen var att få underlag att diskutera densamma.

Efter laborationen genomfördes en utvärdering med deltagarna. Vi diskuterade synpunkter på upplägget, effektiviseringar och förslag på förändringar av innehållet. De mest centrala resultaten av den första utvärderingen återfinns i kapitel 5, [4.2.1](#).

2.3.2 Andra testlaborationen/undersökningen

Denna andra testlaborationen och undersökning genomfördes med en gymnasieskola i Stockholmsområdet. Eleverna gick i årskurs två på det Naturvetenskapliga programmet. Klassen delades i två ungefär lika stora grupper: den ena med 12 elever och den andra med 11 elever. Den första gruppen genomförde laborationen på förmiddagen kl. 9-12 i en undervisningssal på Alba Nova och den andra gruppen laborerade mellan kl. 13-16 i en sal på Vetenskapens Hus.

2.3.2.1 Förberedelser

Till skillnad från den första testlaborationen, där laborationen hölls på metanivå, hölls den andra testlaborationen så som den är utformad att fungera i reguljär verksamhet på

Vetenskapens Hus. Dessutom skulle de två grupperna få utvärdera laborationen genom en kvalitativ skriftlig undersökning. Det innebar att flera ting behövde förberedas innan laborationstillfället.

Det framkom i 4.2.1 att en introduktion i början av laborationen, som fångar elevernas intresse, är önskvärd. En sådan konstruerades och jag valde att intressera eleverna genom att relatera det aktuella ämnesområdet till händelser och fenomen i deras vardag. Detta gjordes genom att visa två exempel. Det första behandlar ett ansiktes symmetriegenskaper. Jag fotograferade därför mig själv ur porträttvinkel och använde originalfotografiet för att skapa två nya modifierade fotografier. Dessa modifierades genom att vänster respektive höger ansiktshalva kopierades och klistrades över höger respektive vänster dito. Det andra exemplet demonstreras doftskillnaden i de två carvoneenantiomernerna som återfinns i grönmynta (*Mentha spicata*) respektive kummin (*Carum carvi*). För det ändamålet ritade jag de båda molekylerna i JChemPaint och inhandlade torkade myntablad samt kumminfrön. För att kunna visa allt detta för samtliga elever sattes en Power Pointpresentation ihop. Den finns att beskåda i Bilaga F.

2.3.2.2 Utvärderingens utformning

När laborationstillfället var slut ombads eleverna göra en anonym utvärdering där de skriftligen skulle svara på två frågor. Dessa var:

Fråga 1 *Vad känner du att du lärt dig under laborationen?*

Fråga 2 *Var det något som kunde varit bättre/tydligare?*

De båda gruppernas utvärderingar undersöktes sedan var för sig. Elevernas åsikter finns återgivna i Bilaga G. En sammanställning av resultatet finns i kapitel 5, 4.2.2. I kapitel 6, 5.3, diskuterar jag resultatet.

Kapitel 3

Litteraturöversikt

3.1 Filosofiska begrepp

Jag börjar detta kapitel med att sammanfatta några av de viktiga filosofiska begrepp som återkommer i texten. I senare avsnitt och kapitel som handlar om exempelvis teorier om lärande och beskrivningar av laborationen kommer jag att anknyta till dessa begrepp. Det är viktigt att läsaren förstår vad jag menar med dessa begrepp; det är en strategi för att minska feltolkningar och missförstånd.

3.1.1 Ontologi

Ontologin är en gren under den teoretiska filosofin. De centrala frågorna rör verkligheten, existensen och varat. I ontologin ställs frågor om verkligheten är det vi kan observera, eller om verkligheten är något annat än det vi kan uppfatta med våra sinnen.¹ Inom grenen berör man alltså spänningen mellan världen vi uppfattar och världen vi lever i, och erkänner att människan inte är en varelse som objektivt kan betrakta sin omvärld. Människans uppfattning av omvärlden kallas *sinnevärlden*, eftersom denna är filtrerade intryck som våra sinnen tillhandahåller.

Föränderligheten är också ett viktigt begrepp. I ontologin ses sinnevärlden som något föränderligt och flyktigt (t.ex. Marx och Hegel) eller som något stabilt som har sin fasta form men upplevs som föränderligt (Platon och Aristoteles). Människans uppfattning om ting eller företeelser kan inte betraktas som en konstant sanning. Det är dock ett bistert synsett, och man ställer sig frågan huruvida det finns en högre verklighet, bortom föränderligheten. Det finns traditionellt två kategorier av svar på den frågan.²

¹Christer Stensmo: Pedagogisk filosofi, Lund 1994, s. 25.

²[Ibid.](#), s. 25-26.

Verkligheten är i grunden materiell. Det innebär att att verkligheten är beskaffad på sådant sätt att sinnena är tillräckliga i sin förmåga att återge den verkliga verkligheten för oss.

Verkligheten är i grunden andlig. Om det förhåller sig så innebär det att den verkliga verkligheten är för komplex för våra sinnen och att dessa endast målar upp en ofullständig bild för oss. Vi kan således aldrig beskriva verklighetens sanna natur eftersom den är oåtkomlig för oss.

3.1.2 Epistemologi

Epistemologin och ontologin är närbesläktade och ställer lika grundläggande frågor. De centrala frågorna i epistemologin är ”vad kan man veta?”, ”vad är kunskap?”, ”hur når man kunskap?”. Det finns en direkt relation mellan skolans värld och epistemologin; en kunskapssyn är direkt relaterad till hur utbildning och inläring genomförs.³ De två klassiska indelningarna *rationalism* respektive *empirism* ger olika svar på frågan om kunskapens natur. Rationalismen framhåller att det egna tänkandet med matematikens och logikens hjälp låter oss bilda begrepp och kunskap, eftersom idéerna finns latent i människans medvetande. Empirismen är motsatsen; vi måste förnimma omgivningen och abstrahera det förnimda för att nå kunskap.

3.1.3 Konstruktivism

Konstruktivismen är en kunskapstradition som söker sammanföra rationalismen och empirismen. Den är ett epistemologiskt perspektiv. En konstruktivist ser frågan om kunskap av ting som en relation; varför jag säger så återkommer jag till lite senare. Människan kan vara säker på hur ting i ”ytttervärlden” (filosofen Immanuel Kants begrepp) uppträder för henne genom sinnena, men aldrig vad de egentligen är ”där ute”.⁴ Därför är människans kunskap om tingen en *konstruktion* tagen från hennes eget medvetande. En människas kunskaper är konstruerade från hennes egna erfarenheter. Med det menas att:

1. Kunskap är inte lika med de instängda kognitiva processer som kan försiggå i en människas ratio, oberoende av sinnesintrycken.
2. Ej heller är den endast lika med sinnesintryck, ty sinnesintryck måste bearbetas, sorteras, abstraheras och passas in i sammanhang.

³Stensmo: [Pedagogisk filosofi](#) (se not 1, s. 14), s. 27.

⁴[Ibid.](#), s. 33.

Detta är den konstruktivistiska bron mellan rationalismen och empirismen.

Konstruktivismens ontologi är spännande att uppehålla sig vid ett slag. I enlighet med vad jag har diskuterat hittills verkar det som att ett konstruktivistiskt synsätt inte utesluter en verklighet som i grunden är andlig; att yttervärlden inte är åtkomlig för människan lämnar frågan öppen.

Kunskap är ett mentalt redskap för att förstå verkligheten och den konstrueras i ett samspel mellan sinnesuttryck och förnuft.⁵ Således är kunskapsbildning en aktiv process och något som människan måste delta i. Om kunskapsbitar kan sättas ihop, med relationer och associationer som knyter dem samman, så att de bildar en helhet har ett kunskapsnätverk kommit till världen.

En människas förförståelse för ett nytt ting är ett begrepp som är nära släkt med kunskapsnätverk. Det är idag en del av diskursen i så måtto att det ofta förekommer i didaktiska sammanhang. Vid första mötet med ett ting är en människa aldrig helt frikopplad från det. Hon har alltid någon form av förförståelse för tinget⁶ vilket kommer sig av att kunskapsnätverken fungerar som en sorts matris i vilken tinget alltid passar någonstans. Hur väl detta ting passar in med någon matris kan sägas vara ett mått på hur stor förförståelse människan har inför tinget i fråga.

3.1.4 Positivism

Positivismen är också ett epistemologiskt perspektiv. Här ges en kort redogörelse för den positivistiska idétraditionen som i vissa avseenden befinner sig i andra ringhörnan relativt konstruktivismens synsätt på kunskap. Kärnan i positivismens ideologi är att människan får sann kunskap om världen genom sina sinnen och att hon kan verifiera kunskapen. Man kommer inte långt på kunskapens väg genom ren argumentation ty kunskap erhålles genom empiriska undersökningar - samband och kunskap upptäcks. Dessa undersökningar ska leda fram till modeller som kan användas för att göra utsagor och förutsäga fenomen. Detta kan kontrasteras mot konstruktivismen där det anses att kunskap konstrueras till skillnad från att upptäckas.

Positivismens ontologiska synsätt är klart. Att kunna förutsäga världen genom empiriska resultat pekar på en materialistisk världsbild.

Idag är positivismen starkt förknippad med de naturvetenskapliga disciplinerna. Där går mycket av kunskapandet ut på att falsifiera eller bekräfta framställda modeller och hypoteser om ett ting. Att "bekräfta" en hypotes genom *positiv verifikation* snarare än

⁵Stensmo: *Pedagogisk filosofi* (se not 1, s. 14), s. 33.

⁶*Ibid.*, s. 34.

genom att falsifiera dess motsats är möjligt genom statistikens metoder. Dessa ger en bild av hur sannolikt det är att den föreslagna hypotesen är rimlig.

3.2 Teorier om lärande

Här kommer ett antal teorier om lärande att förklaras och diskuteras. De teorier som jag skriver om i detta avsnitt kommer att vara centrala framöver. I resultat- och diskussionskapitlen kommer det finnas rikt med hänvisningar till dessa teorier som jag kommer att använda för att styrka mina ställningstaganden och grundläggande synsätt på hur en laboration i matematik bör se ut med hänsyn till materialet.

3.2.1 Sociokulturellt perspektiv

Det sociokulturella perspektivet är ett brett perspektiv. Det är inte enhetligt i så måtto att det har många bidragare som var och en har utvecklat perspektivet en bit åt sitt håll. Det finns många termer och begrepp som påminner om varandra men som olika författare bytt namn på och ändrat lite till innehållet för att det bättre ska passa dennes text. Enligt Roger Säljö är mängden litteratur som anknyter till det sociokulturella perspektivets frågor oöverskådligt.⁷ Skämtsamt kan man kommentera att det möjligen är anledningen till att perspektivet inte får postfixet ”-ism”. Men naturligtvis finns det många gemensamma skärningspunkter eller nämnare om man så vill. Ur ett sociokulturellt perspektiv är det aktuellt att recitera Isaac Newtons kända ställningstagande angående sin och mänsklighetens framgång:

*”If I have seen further it is only by standing on the shoulders of giants.”*⁸

Det är centralt med kunskapstraditioner och att dessa kommuniceras eller medieras i en social och kulturell kontext. Kunskaper återskapas och förnyas ständigt i samhället och sådana förlopp har varit viktiga delar av samhällets utveckling.⁹ Jag kommer nedan att förklara det sociokulturella perspektivet mer ingående genom att diskutera vissa begrepp och idéer som är centrala.

3.2.1.1 Språkets roll i lärandet

Ett centralt begrepp i Lev Vygotskys sociokulturella perspektiv är redskapet eller verktyget. Ett sådant är en resurs som människan använder när hon söker förstå sin omvärld

⁷Roger Säljö: *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv*, 1. utg., Stockholm 2000, s. 11.

⁸Isaac Newton: Letter to Robert Hooke, brev, febr. 1676.

⁹Säljö: *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv* (se not 7), s. 13.

och agera i den. Exempel på redskap är språket och tekniska hjälpmedel. Med en sociokulturell utgångspunkt är problemet med hur vi lär en fråga om hur vi tillägnar oss de resurser för att tänka och utföra praktiska projekt som är delar av vår kultur och vår omgivning¹⁰, exempelvis lösa ekvationer och skriva poesi. Man ser inte samhällets samlade kunskaper som en biologisk företeelse, det vill säga centraliserade i en människa, eftersom kunskaper har med innebörd och mening att göra genom att de är praktiker som utförs i praktiska projekt. Innebörd och mening är kommunikativa företeelser.¹¹ Genom interaktion med andra människor blir vi delaktiga i de kunskaper, färdigheter och redskap som genom historien byggts upp i ett samhälle. Dessa utgör sociokulturella resurser. När människor använder dessa använder de också tidigare generationers insikter och erfarenheter. Det är genom kommunikation som sociokulturella resurser skapas, men det är också genom kommunikation som de förs vidare.¹² Således är kommunikation och språkanvändning mycket starkt integrerad i läroprocesser.

Språkets integrerade roll i att förnya och reproducera kunskaper blir också mycket tydlig i sammanhang som rör abstrakt, kodifierad kunskap. Roger Säljö beskriver ett exempel med hävstången¹³ som belyser detta: man kan tänka sig att människor för länge sedan lärde sig att flytta tunga föremål med denna teknik, detta redskap. Det utvecklades till sofistikerat kunnande och en sociokulturell resurs som finns i det kollektiva - samhällets - minnet. Genom diskussioner och överenskommelser kom man fram till hur stängen skulle placeras givet ett föremål som skulle lyftas. Denna kunskap överfördes så småningom till en explicit beskrivning, eller om man så vill en modell, som beskriver hur tryckkraften varierar med avståndet till balanspunkten. Vi återfinner modellen i läroböcker i fysik där den kallas hävstångsformeln, och åskådliggörs genom en figur och en matematisk formel. Från en konkret situation har ett begrepp bildats. Detta är också ett redskap. Men utan anknytning till sitt ursprung kan den bli abstrakt och svårtillgänglig. Den fysiska upplevelsen är svår att översätta till formeln och vice versa.¹⁴ När en sådan svårighet inträder brukar vi idag beteckna det som svårigheter att lära eller förstå. För att begripliggöra och förstå abstraktionen måste den sättas i ett kommunikativt sammanhang, ett sammanhang där abstraktionen - formeln och figuren - blir levande och fyller en påtaglig funktion.

Vidare är språket helt avgörande för vår förmåga att förstå abstrakta företeelser. Detta kommer sig av att språket har en *indikativ funktion*. Genom ord och gest kan människan peka ut ett föremål, och en egenskap hos föremålet, för att fästa våra medmänniskors uppmärksamhet på denna. När de språkliga definitionerna är klarlagda behöver vi inte

¹⁰Säljö: *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv* (se not 7, s. 17), s. 21.

¹¹*Ibid.*, s. 21.

¹²*Ibid.*, s. 22-23.

¹³*Ibid.*, s. 77-79.

¹⁴*Ibid.*, s. 79.

längre vara i fysisk kontakt med föremålet vare sig i tid eller rum för att kunna hänvisa till det. Det är mer än vad bara en gest¹⁵ mot ett föremål kan åstadkomma. Därmed kan vi använda språket för att referera till ting som inte har någon direkt fysisk existens men som ändå är centrala i mänskliga sammanhang. Jag kan nämna som exempel styrränta, symmetrier, betyg, skam, vidskepelse och så vidare. Begreppen är omöjliga att förklara med endast bildspråk. Med språket föreställer vi oss den yttre verkligheten och lär oss att beskriva den, förstå den samt att abstrahera den. Språket möjliggör med andra ord abstrakta tankar. Det hela ställs på sin pedagogiska spets när vi använder språket för att referera till andra språkliga företeelser. Vi gör detta när vi talar *om* modeller och tolkningar och våra beskrivningar av verkligheten. Det är så vi lär, återskapar och förnyar kunskap: genom reflektion med oss själva och andra. Att klä företeelser med ord kan vara att begripliggöra dem och abstrahera dem, både för sig själv och andra.

3.2.1.2 Artefakter och mediering

Idén om en artefakt är nära besläktad med den om redskap. Idag lever människan i tätt sällskap med en mängd redskap varav en del har till uppgift att befria henne från kognitiva mödor. Traditionellt har det dragits en skarp gräns mellan redskap och intellektuella resurser, men i det sociokulturella perspektivet är det naturligare att betrakta tänkande, begreppsanvändning och lärande som delar av mänskliga verksamheter.¹⁶ Tag en grafräknare som exempel. Den kan utföra räkneoperationer på löpande band och skissa grafer i ett huj och underlättar således för människan. Men innebörden, meningen och betydelsen av beräkningen finns inte i räknaren; de går mellan människan och räknaren i fråga. Människan lever i symbios med dessa redskap och använder dem med samma resultat som "sina egna" kognitiva resurser. Räknaren är ett exempel på en *artefakt*. Artefakter är redskap som tillåter människan att flytta över mänskliga funktioner, kompetenser och kognitiva mödor till redskapet. Men en artefakt behöver inte vara lika tekniskt sofistikerad som en räknare; ett system som består av en kompetent användare och en käpp kan på ett sofistikerat sätt bli delar av ytterst komplexa sociala och intellektuella praktiker.¹⁷ Simpla föremål kan med språkets och tankens hjälp bli medel för att beskriva omvärlden för sig själv och andra.

När man talar om artefakter och hur de kan beskriva omvärlden genom finurliga sociala och intellektuella praktiker är det läge att introducera begreppet *mediering*. Det innebär att en av det sociokulturella perspektivets ståndpunkter är att människan inte står i direkt och otolkad kontakt med omvärlden. Istället medieras den, eller förmedlas om man

¹⁵Jag menar självklart *inte* att stämpla teckenspråk som något underlägset auditiva diton. Jag syftar snarare till mer primitiva gester, som att peka eller mima.

¹⁶Säljö: *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv* (se not 7, s. 17), s. 74-75.

¹⁷*Ibid.*, s. 81.

så vill, av fysiska och intellektuella/språkliga redskap. Tänkandet och våra föreställningar av världen vi lever i är produkten av vår kulturs, och därmed tidigare generationers intellektuella och fysiska redskap. Att lära och utvecklas i vår tid är således i stor utsträckning en fråga om att utnyttja kognitiva resurser som finns införlivade i artefakter som information, procedurer och rutiner.¹⁸ De mentala processerna är kulturbundna genom att språket är kulturbundet.¹⁹

3.2.1.3 Tanke och språk

Jag har redan klarlagt den viktiga roll som språket har för framväxten av komplexa och abstrakta begrepp och strukturer. Språket och tanken är således ofrånkomligen sammanflätade, och att klä en tanke i en språkdräkt, det vill säga att formulera den i ord, är ett steg mot att förstå och kunna reflektera kring densamma. Genom språkets abstraherande funktion ger en formulering oss möjlighet att generalisera tanken och undersöka mönster, vilket är en vederatgen metod för att angripa exempelvis ett problem eller för att förstå ett fenomen.

3.2.1.4 Ontologi och epistemologi

Lev Vykotskys ontologi baseras på Friedrich Engels naturdialektik. Det innebär att man betraktar verkligheten som materiell och uppdelad i organisk och oorganisk materia²⁰. Dock spelar det i själva verket inte någon roll; vi får den bild av verkligheten som vår kultur förmedlar. Vidare erhåller man kunskap och sanningar om objekt genom att studera verklighetens uppkomst och utveckling. För att förstå det ständigt föränderliga nuet måste man få grepp om historiska skeden.

Den epistemologiska grunden i Vygotskys sociokulturella perspektiv är empirisk. Man anser att kunskap härrör ur handlingar.²¹ Det är mänskliga motiv som initierar handlingen. Det finns tre sorters handlingar: bearbetning av den fysiska omvärlden, kommunikation med den sociala omvärlden samt tänkande och problemlösande i den mentala världen. Kunskap lagras i begrepp och kunskap finns i ordets mening. Men kunskap kan också lagras i traditioner av praktiker som omsätts med hjälp av föremål. Därmed är kunskapen inbyggd i samhället och inte i individen.

¹⁸Säljö: *Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv* (se not 7, s. 17), s. 82.

¹⁹Stensmo: *Pedagogisk filosofi* (se not 1, s. 14), s. 154.

²⁰*Ibid.*, s. 152.

²¹*Ibid.*, s. 154.

3.2.2 Instrumentell pragmatism

Först bör något sägas om innebörden av ordet pragma som är den grekiska roten till pragmatism. Innebörden är ungefär handling, verksamhet eller gärning. Det som följaktligen tar upp plats i pragmatismen är en idé eller teoris praktiska konsekvenser; dess instrumentella värde (som verktyg) vid lösningen av ett problem.²² Med Deweys instrumentella pragmatism menas den pragmatiska skola där tänkande och kunskap är instrument för att lösa problem av både vardaglig och vetenskaplig natur.

Deweys pedagogiska intresse var huvudsakligen att studera frågor av epistemologisk natur. Dock låg det i Deweys kritiska natur att fränsäga sig den termen och därmed distansera sig från andra filosofiers epistemologi. Istället sade Dewey sig studera ”undersökandets teori” eller ”experimentalism”.²³ Jag kommer först att diskutera de pedagogiska metoder som Dewey föreslår för att sedan återkomma till de ontologiska och epistemologiska aspekterna.

3.2.2.1 Pedagogisk metod

Det är omöjligt att i sammanhanget inte nämna det av Dewey myntade och något överanvändna slagdängan

”Learning by doing.”

Enligt Christer Stensmo menar Dewey att det är den lärande eleven som skall vara aktiv i undervisningssituationer och att läraren skall vara handledare.²⁴ I undervisningssituationen finns det fyra behov eller intressen som motiverar eleverna: 1. ett socialt behov av gemenskap, 2. en nyfikenhet att utforska, 3. en lust att skapa och tillverka samt till sist 4. ett estetiskt intresse.

Elevernas väg till kunskap går enligt Stensmos framställning av Deweys pragmatism genom dessa fyra behov. För att möta behoven föreslås ett arbetssätt där eleverna arbetar laborativt och undersökande med problemlösning. Det är dock av största vikt att problemen är relaterade till ett sammanhang. Om inte sammanhanget finns reduceras lärandet till ”korvstoppning” vars produkt är oanvändbar. Det är sammanhanget som är det centrala, och när sammanhanget är klargjort för eleverna blir det begripligt varför man arbetar med tinget i fråga. När eleverna löser problem i ett sammanhang tillämpas

²²Stensmo: [Pedagogisk filosofi](#) (se not 1, s. 14), s. 169.

²³Richard Field: The Internet Encyclopedia of Philosophy, URL: <http://www.iep.utm.edu/dewey> (hämtad 2010-05-12).

²⁴Stensmo: [Pedagogisk filosofi](#) (se not 1, s. 14), s. 186.

det reflektiva tänkandet (jag återkommer till det under Deweys epistemologi och ontologi nedan).

Vidare är uppdelningen mellan det *konkreta* och *abstrakta* central i Deweys pedagogik. Välkända begrepp är konkreta och likaså ett tänkande som används för att nå ett mål. Det abstrakta är nya, okända begrepp men också tänkande som är ett medel för mer tänkande hör till det abstrakta. Ett problems eventuella lösning utgör en inre belöning för eleven.

Lärarens uppgift är att vara vägledande, uppmärksamma elevernas intressen och stimulera dem till lösning av olika problem.²⁵ Läraren skall vara en resurs för elevens självbestämmande lärande och läraren skall vägleda eleven med samhällets kulturella resurser och som en del av samhället.²⁶ Läraren har även en korrigerande uppgift som går ut på att hjälpa eleverna med att finna säkra och genomförbara projekt. Vidare skall läraren handla så att elevernas verksamhet går från en konkret startpunkt till ett abstrakt slutmål. Christer Stensmo föreslår följande arbetssätt i tre steg:

1. Konkret början. Börja med praktiska manipulationer av objekt som är centrala för problemet. Svårigheter upptäcks när sinnena sysselsätts, och man kan arbeta med det som inte är förstått.
2. En övergång från konkret till abstrakt. Förhoppningsvis väcktes ett intresse för objekten i steg 1 och då kan det transformeras till en intellektuell uppgift genom att man studerar objektets egenskaper, strukturer, orsaker och effekter.
3. Abstrakt slut. När man summerar vid arbetets slut tillåts eleverna redogöra för sina tankar och vilka associationer och vidare funderingar de har. Det är tankar som leder till andra tankar och är därmed ett abstrakt mål vilket utvecklar vanan att tänka.²⁷

Den instrumentella pragmatismen framhåller också de många fördelarna med att arbeta kollektivt under laborativa arbetsformer. Elever som arbetar tillsammans kontrollerar varandras problemlösande tänkande, korrigerar varandra och lär sig samverka. Kort sagt gör de kollektiva erfarenheter genom empiriska metoder. Jag återkommer till erfarenheter under Deweys epistemologi och ontologi nedan. Att göra sig okända erfarenheter kan verka avskräckande för en ensam individ genom en potentiell möjlighet till otillräcklighet, men i kollektiv försvinner den hämmande känslan.

²⁵Stensmo: [Pedagogisk filosofi](#) (se not 1, s. 14).

²⁶Field: [The Internet Encyclopedia of Philosophy](#) (se not 23, s. 21).

²⁷Field: [The Internet Encyclopedia of Philosophy](#) (se not 23, s. 21); Stensmo: [Pedagogisk filosofi](#) (se not 1, s. 14), s.186-187.

3.2.2.2 Ontologi och epistemologi

Den ontologiska utgångspunkten för den instrumentella pragmatismen är att överbrygga dualistiska filosofiers åtskillnad mellan medvetandet/omvärlden, subjekt/objekt, inre/yttre och tanke/handling.²⁸ Verkligheten är för Dewey fakta som erfars av medvetandet. De aspekter av verkligheten som blir medvetna utgör oskiljbara delar i en helhet. Fakta är erfaraande vilket fås genom att göra erfarenheter. Dessa är knutna till situationen och objekten och den relation människan som gör erfarenheten har till objekten. Exempelvis är ett torg en arbetsplats för vissa, en mötesplats för andra och en mardröm för agorafobiker. Objekt blir fakta och får mening utifrån den situation i vilka de erfars.

Vad gäller epistemologin (som Dewey benämner undersökandeteorin) går kritiken mot dualismen även igen här. Eftersom transaktionen är kontinuerlig måste kunskapssökandets metod vara därefter. Dewey valde det vetenskapliga experimentet som förebild. Det är, menar han, baserat på kontinuitet i relationen mellan medvetandet och omvärlden samt mellan reflektion och handling. Den föränderliga omvärlden försätter ständig människan i nya problemsituationer, vilka människan kan bemästra och vinna kunskap ur genom reflektivt tänkande.²⁹ Med det avses överväganden inför varje föreställning med hänsyn tagen till de stöd som ligger till grund för den. Man sorterar och beaktar alla idéer som strömmar genom medvetandet. Det är målinriktat, förberedande för eventuella konsekvenser och fyller objekten med mening. Det reflektiva tänkandet ger människan den kontroll hon behöver över oklara situationer.

3.3 Begreppsbildning och arbetsformer

Det här avsnittet handlar om hur elever bildar begrepp i matematikundervisningen och vilka komponenter som är centrala i begreppsbildningen. Sedan diskuteras val av arbetsformer i relation till det man känner till om processer i elevers begreppsbildning.

3.3.1 Om att ställa frågor

Jag ämnar här redogöra för olika sätt som frågor kan ställas på, och hur de relaterar till olika kunskapstyper. Denna konst i att kunna formulera frågor efter vilken typ av redogörelse och kognitiv nivå som söks kommer att vara till användning för mig när jag konstruerar frågorna till laborationen. Att veta vilka frågor som bör ställas är en viktig del av arbetsformen.

²⁸Stensmo: *Pedagogisk filosofi* (se not 1, s. 14), s. 171.

²⁹*Ibid.*, s.172-173.

3.3.1.1 Blooms taxonomi

Enligt Benjamin Bloom, professor vid Chicago University kring 1950-talet, kan ett antal frågeord relateras till olika kunskapstyper. År 2001 utkom en reviderad version av Blooms verk. Nedan presenteras den av Mattson och Wedman bearbetade och översatta redogörelsen för vilka frågeord som är relaterade till en viss kunskapsnivå.³⁰ Redogörelsen är konstruerad i stigande ordning så att kunskapstypen ökar i komplexitet. Varje kunskapstyp förklaras och ges förslag på hur frågor kan konstrueras med avseende på vilken typ av svar som söks. Givetvis kommer inte alla frågor att användas eller få plats inom ramen för laborationen, men alla finns med för helhetens skull.

Utantillkunskap. Kan användas för att kontrollera förmågan att förstå information och att definiera begrepp samt även för att låta elever redogöra för faktakunskaper. Frågeord: *lista, beskriv, definiera, beteckna, ange, namnge, fyll i, identifiera, vad, när, vem.*

Förståelse. Kan användas för att få elever att redogöra för sin förståelse för ett ting med egna ord. Frågeord: *förklara, granska, översätt, tolka, hur, varför.*

Följande kunskapstyper kan vara svåra att hålla isär. De visar alla på förmågan att dra mer eller mindre avancerade slutsatser, d.v.s. de visar på förmågan:

- till tankefärdighet.
- att kunna ställa upp egna modeller utifrån verkligheten och/eller kan utnyttja redan befintliga modeller.
- till utvärdering i betydelsen bedöma värdet/resultatet av en produkt, problem, lösning o.s.v.
- att finna alternativa lösningar om betingelserna blir/är annorlunda och inte enbart utgå från givna fakta.
- till någon form av produktion (d.v.s. krav på "eget" innehåll eller en disposition).

Tillämpning/Förtrogenhet. Frågeord: *tillämpa, konstruera, rita, simulera, motivera.*

Analys. Frågeord: *klassificera, dissekera, urskilj, jämför, kategorisera, bryt ner.*

Syntes. Frågeord: *kombinera, sätt/ställ samman, integrera.*

Utvärdering. Frågeord: *bedöm, argumentera, utvärdera, försvara, debattera, välj.*

³⁰Bloom/Mattson/Wedman: Kunskapstyper och frågeord, stencil, 2001.

3.3.1.2 Relation till kursmål

De kvalitativa nivåerna i dagens kursplaner för matematik går att relatera till kunskapstyperna i Blooms taxonomi. Det är värt att notera att *Utantillkunskaper*, den enklaste formen av kunskapstyp, inte ligger i fokus i kursplanen.

Under kriterier för betyget Godkänt är det möjligt att identifiera kriterierna med kunskapstypen *Tillämpning/Förtrogenhet*, eftersom eleven uppmanas att tillämpa och använda bl.a. lämpliga metoder, konventioner och symboler. Även *Analys* kommer med när eleven uppmanas att skilja antaganden från fakta, även om tonvikten på det inte är störst.

På nivån Väl godkänt ska eleven, förutom att tillämpa, också kunna tolka situationer matematisk, ge exempel på matematikens historiska utveckling och betydelse idag samt använda kunskaper från olika matematiska områden. Det kan relateras till kunskapstyperna *Förståelse*, *Analys* och *Syntes*.

En elev som vill nå betyget Mycket väl godkänt måste förutom kraven ovan även värdera och jämföra resultat och genomföra matematiska bevis. Det motsvarar kunskapstyperna *Utvärdering* och *Förståelse*.

3.3.1.3 Kritik

Blooms taxonomi är från 1956³¹ och har blivit utsatt för kritik av modernare forskare. Bland annat redogör Helena Korp för G. Phyes kritik som grundar sig i att om kunskapsnivåerna belyses med dagens forskningsresultat framträder de inte lika distinkt uppdelade som i Blooms taxonomi. Bland annat kan nämnas att det säkraste sättet på vilket en elevs förståelse kan synliggöras idag anses vara förmågan att *tillämpa*³². Det innebär att dessa två kunskapstyper är svårseparerade.

Det är inte heller säkert att frågeorden som hänvisar till kunskapstyperna analys, syntes och utvärdering alltid fordrar att eleven uppvisar användning av mer avancerade kognitiva processer. Enligt Korp menar R. J. Stiggins att ”det är sättet på vilket frågan ställs och de krav, som frågans formulering ställer på svaret, som avgör hur komplext tänkande, som frågan kan mäta”³³. Ett exempel är frågeordens relation till vissa problem inom gymnasiematematiken. Exempel på sådana problem är att eleven ombeds att klassificera funktioner som växande eller avtagande, eller att bedöma om en rot till en given ekvation

³¹Helena Korp: Kunskapsbedömning - hur, vad och varför (Forskning i fokus 13), Stockholm 2003, s. 87.

³²*Ibid.*, s. 87.

³³*Ibid.*, s. 88.

är falsk eller sann. Dessa problemställningar kan inte nödvändigtvis hänföras till högre kognitiva nivåer eftersom de kan lösas med hjälp av utantillärda procedurer.

3.3.2 Begreppsbildning i matematikundervisning

Här redogör jag för hur begreppsbildningen är relaterad till undervisningen med avseende på teori och praktik.

3.3.2.1 Begreppsbildning och omvärlden

Karl Henrik Eriksson har skrivit en artikel, publicerad i "Matematik - ett kommunikationsämne"³⁴ om begreppsbildning hos barn.³⁵ Dock förs resonemang och diskussion på en sådan allmän nivå att den utan tvekan är tillämpbar även på begreppsbildning hos ungdomar i gymnasieåldern. Eriksson anknyter till Dewey, Vygotsky, Piaget och Bruner i sin argumentation, varav två redan har avhandlats i denna rapport.

Det finns gott om stöd, i kursplaner och bland utvecklings- och inlärningspsykologer, att erfarenheter hämtade från elevens omvärld främjar dennes begreppsbildning. Eriksson nämner bland annat att Deweys slagdänga "*learning by doing*" och Bruners idé om de tre representationsformerna har givit värdefulla bidrag till frågan om hur elever kan bilda begrepp vilka är helt nödvändiga för deras intellektuella utveckling.³⁶ Bland annat är det viktigt att eleven ges rikliga tillfällen att hantera och manipulera konkret material, vilket är en självklarhet i de naturvetenskapliga ämnena.

Man kan argumentera för att denna arbetsform även borde ingå i matematikundervisningen eftersom det idag betonas starkt att det är av vikt att i undervisningen utgå från elevernas vardagliga erfarenheter och att söka åstadkomma växling mellan teori och praktik. Ett resultat därav är att det är viktigt för eleven att få "känna på", "handskas med" och "pröva" konkret material. Det leder till att eleven iakttar skillnader och likheter - de generaliserar och diskriminerar - vilket är en av flera grundläggande aktiviteter vid begreppsbildning.

3.3.2.2 Begreppsbildning och kursplaner

Matematik är ett abstrakt ämne, därom råder inga tvivel. Bland målen i matematikundervisningen, åtminstone på gymnasiet, återfinns att eleven ska kunna generalisera

³⁴Harriet Axelsson m. fl.: Matematik - ett kommunikationsämne, utg. av Ronny Ahlström m. fl. (Nämaren Tema), Göteborgs universitet, Göteborg 1996.

³⁵Karl Henrik Eriksson: Matematik - ett kommunikationsämne, i: Göteborgs universitet, Göteborg 1996, kap. Om barns förmåga att bilda begrepp, s. 54-58.

³⁶*Ibid.*, s. 54.

och modellera.³⁷ Men även med detta mål som högsta prioritet bör elevernas begrepps- bildning underlättas genom att de flitigt får använda också de två lägre representations- formerna, men inte stanna där utan växla mellan alla tre. Som exempel kan sägas att konkret få uppleva en tredimensionell kropp genom manipulation ökar begreppsuppfatt- ningen påtagligt.³⁸

På den delen av NCMs webbplats som handlar om laborativ matematik, eller matema- tikverkstäder (MV) som aktiviteten också kallas, argumenteras också för att laborativa inslag bör vara med i undervisningen.³⁹ Flera skäl till varför laborativa aktiviteter är vik- tiga i matematikundervisning läggs fram. Ett argument gäller de senaste årens rapporter om svenska elevers matematikresultat. Dessa visar flera nedåtgående trender och målar upp en bitvis dystert helhetsbild. En central förbättringspunkt som föreslås är att skapa variation i undervisningen som en väg att öka elevers lust att lära.⁴⁰ Laborativa inslag föreslås av NCM som ett sätt att skapa variation i undervisningen. Ett annat argument för laborativa inslag grundar sig i kursplanen för matematik och de verb som förekom- mer däri. Verben är bland annat upptäcka, uppleva, pröva och generalisera.⁴¹ På NCM skriver man:

*”Det är svårt att genomföra en undervisning som lever upp till samtliga mål i läroplanen och kursplanen i matematik om det inte finns goda möjligheter till laborativt arbete.”*⁴²

Det sista och kanske viktigaste argumentet handlar om begreppsbildning. Man skriver att laborativt arbete i matematik kan rätt använt medverka till att skapa inre bilder och en fördjupad förståelse hos eleverna samt att det ger stora möjligheter att stödja begreppsutveckling.⁴³

3.3.2.3 En balans

Vygotskys sociokulturella perspektiv kan också användas för att belysa frågan om mate- rial och metoder för begreppsbildning. Han menade att barns konkreta manipulerande av föremål är av stor vikt för att nå fram till begreppslig kunskap. Det är nämligen väx- elverkan mellan teori och praktik som förklarar utvecklingen av begreppen. Vi vet sedan

³⁷Se t.ex. kursmålen i ”Kursplan för MA1201 - Matematik A”

³⁸Eriksson: *Matematik - ett kommunikationsämne* (se not 35, s. 26), s. 55.

³⁹Lena Trygg: NCM Matematikverkstad, URL: <http://ncm.gu.se/mv> (hämtad 2010-05-18).

⁴⁰*Ibid.*

⁴¹Verb i kursplanen, URL: http://ncm.gu.se/media/nywebb/matematikverkstad/huvudsidaMVwebb/verb_ma.pdf (hämtad 2010-05-18).

⁴²Trygg: *NCM Matematikverkstad* (se not 39).

⁴³Matematikverkstad (introduktion i A4-format), URL: http://ncm.gu.se/media/namnaren/xtra/feb07/MVsnabbinfo_a4.pdf (hämtad 2010-05-18).

tidigare att det sociokulturella perspektivet framhäver språkets-, tankens- och objektens integrerade roll i människans kunskapliga utveckling. När barn ställs inför problem som skall lösas är såväl deras tal och tankar (teori) som deras aktivitet med händerna (praktik) lika viktiga och utgör delar av samma komplexa funktion.⁴⁴ Det är således inte möjligt att utesluta någon komponent i undervisningen utan att inverka negativt på elevernas begreppsbildning; även ett mått av praktiskt arbete måste finnas.

Det är skäligen berättigat att undra över hur man ska balansera teoretiska och praktiska moment i undervisningen. Eriksson redogör för ett antal forskningsresultat som berör den frågan och andra faktorer som påverkar begreppsbildning. En strävan efter att hela tiden hålla undervisningen på ett konkret plan leder till brister i fråga om generalisering och diskriminering vilket i sin tur försvårar begreppsbildningen och framtidsberedskapen. Ett fokus på tillfällig empirisk kunskap ger upphov till låsningar inför nyheter.⁴⁵ En annan viktig slutsats är att en närhet mellan exempel och begrepp är en positiv faktor i begreppsbildningen, likaså visade sig upprepade och varierande exempel vara positivt inverkan faktorer. Ett resultat i Vygotskys anda var att inte låta konkret arbete ske i ett socialt vakuum. Begreppsbildning under praktiskt arbete vilar på upplevelser i omvärlden förmedlade genom språket. När eleverna berättar hur de gör och hur de tänker, blir tankarna synliga för dem och för läraren.⁴⁶ Det innebär att begreppsbildningsprocessen synliggörs och att oklarheter däri kan komma fram för att bli ämne för diskussion mellan eleverna och läraren. Det gynnar alla parter.

3.3.3 Att välja arbetsform

Även i laborativa inslag i matematikundervisningen finns det olika vägar att gå med avseende på planering, balansen mellan teori och praktik och materialanvändning. Laborativa inslag är inte i sig en färdig struktur utan snarare en ram som aktiviteterna ligger innanför.

I litteraturen finns stöd för följande undervisningsstruktur/arbetsform⁴⁷:

- fri undersökning när nya material eller representationsformer introduceras
- praktiska aktiviteter före formaliseringar och räknande
- förståelse är viktigare än procedurer och regler
- språklig utveckling med hjälp av olika representationer

⁴⁴Eriksson: *Matematik - ett kommunikationsämne* (se not 35, s. 26), s. 55.

⁴⁵*Ibid.*, s. 58.

⁴⁶Axelsson m. fl.: *Matematik - ett kommunikationsämne* (se not 34, s. 26), s. 45.

⁴⁷*Ibid.*, s. 17.

- undersökningar och laborationer utvecklar begreppsbildning

3.4 Lärarens roll

I litteraturöversikten "Laborativ matematik - vad vet vi?"⁴⁸ redogör författarna för aktuell forskning om laborativ matematikundervisning och de resultat som den frambringat. Bland annat skriver de om lärarens roll i denna undervisningsform.⁴⁹ Det framkommer av det material som de granskat att det laborativa inslaget är i sig inte det avgörande för elevens lärande. Lärarens roll är central. Denne måste att lyfta fram och synliggöra matematiken så att eleverna får ut så mycket som möjligt av aktiviteten.⁵⁰

Författarna lyfter fram de svenska forskarna Gunnar Nilsson och Eva Taflin och deras studier. Nilssons resultat visar på lärarens centrala roll i laborationer. Läraren behöver bland annat agera arbetsledare, pröva lösningar med eleverna och möjliggöra en insyn i kritiska inslag, som att visa eleverna eventuella självmotsägelser i deras egna resonemang.

Taflins forskning visar också på ett antal viktiga delar av lärarens roll. Det är betydelsefullt för elevens lärande om denne ges tillfälle att vid undervisningspassets slut berätta vad och hur de lärde sig.⁵¹ Detta ger eleven träning i att vara medveten om det egna lärandet (metakognition) och kan leda till en mer ansvarstagande inställning till detsamma. Vidare är en gemensam genomgång vid slutet av undervisningstillfället betydelsefullt, eftersom det minskar sannolikheten att eleverna lämnar lektionen med felaktiga föreställningar.⁵²

⁴⁸Elisabeth Rystedt/Lena Trygg: Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?, Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet, Göteborg 2010.

⁴⁹*Ibid.*, s. 35-40.

⁵⁰*Ibid.*, s. 35.

⁵¹*Ibid.*, s. 36.

⁵²*Ibid.*, s. 36.

Kapitel 4

Resultat

4.1 Matematiska resultat

En del av resultatet av mitt examensarbete är av strikt matematisk natur. Här redogör jag för resultaten av mitt utforskande av matematiken.

4.1.1 Teoridel

Den matematiska teoridelen utgörs av en rapportering över den matematik som jag läst. Denna färdiga produkt innehåller en introduktion till gruppteorin och karaktärsteorin samt behandlar grundläggande satser och resultat i representations- och karaktärsteori. Nämnda innehåll finns att läsa i kapitlet "Matematik" eftersom innehållet är så stort att det inte räcker att behandla det i ett resultatkapitel. Resultaten i Matematikkapitlet talar för sig själva.

4.1.2 Tillämpningen

I tillämpningsdelen av matematikdelen visade det sig att den funna representationen var reducibel. En uppdelning av representationen i en direkt summa visade att tre irreducibla representationer hörde till D_3 -molekylens normalsvängningar. Därmed har molekylen tre normalsvängningar.

Genom att införa en normalsvängningsbas kunde den karaktäristiska ekvationen $\det(K - \lambda M) = 0$ lösas, där K är systemets "kraftmatris", M är systemets "massmatris" och $\nu_i = \sqrt{\lambda_i}$ är normalsvängningsfrekvenserna och $i = 1, \dots, 9$.

Molekylens normalsvängningsfrekvenserna visade sig bestå av två nollskilda unika frekvenser ν_1 och $\nu_2 = \nu_3$ där ν_2, ν_3 således ligger på en degenererad energinivå. Frekvenserna beräknades till:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \nu_2 = \nu_3 &= \sqrt{\frac{3k}{2m}}\end{aligned}$$

4.2 Resultat av utvärderingarna

I samband med testlaborationerna genomfördes utvärderingar. Här redogör jag för resultatet av dessa samt hur laborationen förändrades efter att den justerats med avseende på utvärderingarna.

4.2.1 Matematikassistenternas utvärdering

Vid utvärderingen visade det sig att:

- Laborationen är omfattande och tar mer än 3 h i anspråk.
- Samma molekyler byggs, rivs och behöver byggas upp igen i senare uppgifter, vilket fördröjer laborationens progression.
- Materialet Molymod behöver förklaras för ickekemister.
- Molymodlådorna innehåller komponenter som inte ska används i laborationen och därmed förvirrar laboranterna.
- En lämplig molekyl och symmetrigrupp för spår 1 är ammoniak och en delgrupp av dess hela symmetrigrupp, delgruppen av rotationssymmetrier.

Jag använde mig av dessa resultat i en första revidering av laborationen. Uppgifternas omfattning och antal minskades och antalet molekyler som behövde byggas minskades. En beskrivning av Molymodmaterialet formulerades och lades till molekylbiblioteket samt onödiga komponenter avlägsnades från byggsatserna. Spår 1 bestämdes till att inbegripa ammoniakmolekylen och sagda symmetrigrupp.

4.2.2 Testklassernas utvärderingar

Testklasserna fick anonymt besvara två frågor i en kvalitativ undersökning. Här redovisar jag en sammanställning av resultatet av undersökningen. Metoden och frågorna beskrivs i 2.3.2.2. Hela undersökningen finns i Bilaga F.

4.2.2.1 Första gruppen

I den här gruppen som består av 12 elever redogör samtliga i fråga 1 för att de har lärt sig om symmetrier. Flera elever är specifika i sin redogörelse för vad de har lärt sig. Åtta elever berättar att de lärt sig vad rotation- och spegelsymmetri är. Flera elever förklarar att detta sätt att tänka om symmetrier var helt nytt; symmetrier har aldrig stötts på genom någon explicit förklaring. En elev (8) är negativ till bilden av symmetrier så som den förmedlats under laborationen. Denne tycker att symmetrier är konstigt. Elev 3 och 11 hänvisar till spår 1 och anger att de lärt sig om dessa begrepp.

Som svar på fråga 2 har tre elever (5, 10 och 12) bara angett att laborationen var bra utan att ge någon kritik. Flera förbättringsförslag berör uppgifterna, men åsikter om hur de ska förbättras är något splittrade: eleverna vill bland annat ha någon form av repetition (elev 1), variation i uppgifterna (elev 8), svårare uppgifter (elev 9) samt kortare tid på varje uppgift (elev 2). En annan gemensam punkt för förbättring som fyra elever tar upp gäller introduktionen till, och information om symmetribegreppet. De efterfrågar mer genomgång och information i början av laborationen.

4.2.2.2 Andra gruppen

På liknande sätt som i första passets utvärdering redogör samtliga 11 elever i fråga 1 för att de lärt sig om symmetrier. Även här redogör majoriteten av eleverna specifikt för att de lärt sig om de två olika symmetrityperna och att se skillnad mellan dessa. Flera elever redogör för att området var nytt, men det är värt att notera att en elev tycker att inget av materialet var nytt (elev 15) men att denne ändå ökat sin förståelse för symmetrityperna. Flera elever redogör för att de nu har lättare att se symmetrier i molekyler. Två elever (14 och 19) berättar att de lärt sig att sätta samman symmetrier.

Vad gäller fråga 2 uppger två elever (13 och 14) att de tyckte att laborationen var för kort. En elev (15) uppger att det var för mycket tid till uppgifterna. Fyra elever anger ingen kritik eller kritik som inte kan härledas till någon speciell del av laborationen. Två elever tar upp att "prick-exemplet" borde ha gått igenom tidigare och med alla.

4.3 Den färdiga laborationen

När laborationen reviderats efter testklassernas utvärderingar antog den sin slutgiltiga form inom ramen för detta examensarbete. Samtliga uppgifter, assistenthandledningen och molekylbiblioteket utgör detta resultat. Allt detta finns till beskådan som bilagor till denna rapport.

Kapitel 5

Diskussion

Detta avsnitt rymmer en diskussion kring examensarbetets resultat. Jag kommer att använda kapitlet med litteraturöversikten för att motivera de olika aspekterna av laborationen. Resultaten av utvärderingarna kommer också att diskuteras liksom justeringarnas implikationer för lärandet. Dessutom ingår en diskussion angående laborationens anknytning till kursmålen i matematik- och kemiämnet samt förslag på intressanta framtida utvecklingsmöjligheter. Läsaren förutsätts ha läst kapitlet litteraturöversikt eftersom detta kapitel kommer att innehålla rikligt med referenser dit.

5.1 Laborationens innehåll

Flera aspekter av laborationens innehåll är utvecklade med tanke på den litteratur jag studerat och redogjort för i litteraturöversikten. Här kommer jag att argumentera för att de aspekter jag tar upp är väl valda i så måtto att de är förenliga med de teorier om lärande och ämnesdidaktiska synpunkter som beskrivs.

5.1.1 Laborationsmaterialets roll

Arbetsuppgifternas centrala roll i laborationen är att vara ett stöd åt argumentation och tanke när eleverna arbetar med begreppen rotation och spegling. Ur ett sociokulturellt perspektiv (se [3.2.1](#)) är meningen i begreppen är kodifierad och rymmer kunskaper och färdigheter som byggts upp av tidigare generationer. Vad som från början hade en mening i en konkret situation har överförts till teoretiska definitioner och abstrakta användningar. Enligt vad jag tidigare redogjort för i min beskrivning av det sociokulturella perspektivet är åsikten att den teoretiska betydelsen är svår att översätta till den fysiska upplevelsen. Abstraktionen måste sättas i ett kommunikativt sammanhang där den blir

levande och fyller en påtaglig funktion, som i fallet med denna laboration. Jag anser att arbetsuppgifterna genom användandet av modeller och diskussioner faktiskt sätter abstraktionerna i ett kommunikativt sammanhang som gör dem levande.

Vidare framhåller Vygotskys sociokulturella perspektiv framhäver som jag tidigare påpekat språkets centrala roll i lärandet. Att lära sig, nå kunskap, är en fråga om att kunna använda sociokulturella resurser i praktiska projekt. Det som därmed är nödvändigt i en lärandesituation är ett praktiskt projekt, eller flera, samt de sociokulturella resurser som behövs för att kunna arbeta med projektet. I relation till min laboration är det möjligt att identifiera det praktiska projektet med de frågeställningar som delas ut på laborationens uppgiftspapper. Uppgifterna fordrar ett praktiskt handlande och varje uppgift blir ett litet praktiskt projekt i sig, bland annat genom användningen av molekylbyggsatser.

Blooms taxonomi har jag använt mig av vid formulerandet av dessa arbetsuppgifter. Det märks genom att jag valt frågetyper som anknyter till kursmålen, enligt diskussionen som följde i avsnitt [3.3.1.1](#) i litteraturöversikten. Med tanke på att utantillkunskaper inte är särskilt förekommande i kursplanen läggs heller inte fokus på det i arbetsuppgifterna. Istället läggs tonvikten på att eleven ska urskilja, förklara, tolka, jämföra, kombinera och argumentera.

5.1.2 Val av arbetsform

Jag påstår att laborationen sätter de införda abstraktionerna i ett kommunikativt sammanhang, och att det är därför jag valt arbetsformen så som den beskrivits. Det går att argumentera för. För det första arbetar eleverna gruppvis, vilket innebär att jag kunnat utforma arbetsuppgifter som uppmanar till diskussioner mellan elever, lärare och elever samt matematikassistent och elever. För de andra ingår i laborationen att eleverna får tala om modellerna och tolkningarna, vilket är en eftergift åt att det är så vi lär i ett sociokulturellt perspektiv.

Även Deweys instrumentella pragmatism (se avsnitt [3.2.2](#) i litteraturöversikten) är användbar som motivering till mitt val av arbetsform. Deweys föreslagna procedur är att gå från det konkreta till det abstrakta. Det stämmer väl överens med hur stoffet i laborationen introduceras genom uppgifterna. Början är konkret med manipulationer, byggande och undersökning av molekyler. Därefter stegras uppgifternas komplexitet och eleven måste hitta orsaker till symmetriförändringar och tänka på strukturer och effekter. Att varje uppgift avslutas med en diskussion om uppgiften och hur det gått för eleverna är ett abstrakt slut.

Även Erikssons artikel (se avsnitt 3.3.2.1 i litteraturoversikten) ger stöd åt laborativ matematik, och därmed min laboration, som en viktig komponent i elevens begreppsbildning. Med tanke på att eleverna får handskas med konkret material så som Eriksson förordar, kan man dra slutsatsen att laborationen innehåller de aktiviteter som är grundläggande för begreppsbildningen.

Vidare kan något sägas om det arbetssätt i fyra punkter som beskrivs i avsnitt 3.3.3. Jag har vid konstruerandet av arbetsformen för denna laboration försökt att hålla mig till det som föreslås. Listan över undervisningsstrukturens punkter är generellt formulerad och laborationen uppfyller i stora drag dessa.

För det första bjuder initialt laborationen på en relativt fri undersökning; eleverna bygger och undersöker. Undersökningen är fri och utan garantier på vad de kan finna för symmetrier. Dock är det naturligt att själva byggnadsprocessens frihet är något begränsad, ty betänk scenariot där eleverna som första uppgift uppmanas att bygga vilken molekyl som helst och finna dess symmetrier. Det är en oerhört svår och stor uppgift för en elev som inte bekantat sig med symmetribegreppet!

För det andra är laborationen koncentrerad på precis ”praktiska aktiviteter före formaliseringar och räknande”. Frågeställningar av denna typ kommer först senare i uppgiftsföljden och i spår 1.

För det tredje vill jag påstå att förståelsen för symmetrier är viktigare än några procedurer i laborationen. Egentligen förekommer procedurer och algoritmer inte annat än i några få rent praktiska sammanhang; själva byggandet bland annat.

För det fjärde har jag arbetat för att bygga in flera möjliga representationsformer i frågeställningarna. Eleverna uppmanas att representera symmetri med modeller, speglar, ”papper och penna”, tabeller och diagram över sammansättningar. Sedan används dessa som underlag för diskussioner, när en uppgift sammanfattas och elevernas resultat redovisas.

För det femte är undervisningen bedriven i laborativ anda. Eleverna undersöker symmetrier med ett laborativt förhållningssätt.

5.1.3 Motivation och lust att lära

Det första området berör en aningen mer indirekt komponent i måluppfyllandeprocessen. Det faktum att laborationen antagligen bjuder på en variation i undervisningen kan vara ett sätt att öka elevernas lust att lära, något som i sin tur direkt påverkar processerna som styr uppfyllandet av kursmålen. Motivation är en grundläggande komponent i elevens framgång i skolan, vilket man på NCM bland annat argumenterar för (se 3.3.2.2).

Laborationen kan också spela en direkt roll i elevens relation till kursplanen i matematik. Det första berör kursmålen, som bland annat fastslår att eleven ska ges tillfällen att generalisera och modellera. Eftersom eleven under laborationstillfället ges tillfälle att modellera, uppleva, pröva och generalisera kan laborationen användas som ett direkt led i uppfyllandet av kursmålen. Laborationen aktualiserar således en bedömningsprocess som kan utföras av en närvarande lärare. En vetskap om detta bland eleverna kan tjäna som källa till motivation. Å andra sidan kan det också ha motsatt effekt; eleverna vill kanske inte alls ställa upp på att en extern laboration utgör ett ”tyngre” bedömningsmoment, ett laborativt prov.

Av Deweys fyra punkter som ska utgöra elevens motivation (se avsnitt 3.2.2.1 i litteraturoversikten) kan jag se att alla fyra verkar uppfyllas av laborationen. Elevens gemenskapsbehov uppfylls medelst laborationens grupparbetsinriktning. Eftersom laborationens kunskapsinnehåll antagligen är nytt för eleverna bidrar det även till att elevernas lust att utforska stimuleras. Att det i laborationen används byggsatser till att konstruera molekylmodeller med talar till elevens lust att skapa och tillverka. Det estetiska intresset väcks i och med laborationens naturligt estetiska inslag: symmetrier.

Vidare kan något sägas om introduktionen till laborationen. Dess syfte är bland annat att knyta symmetrier till elevernas omvärld och de vardagsföreteelser som förekommer där. Min förhoppning är att det ska fänga de flesta elevers intressen direkt. Jag tycker att den förhoppningen infriades, med tanke på elevgrupp 1 som var utan projektorn i introduktionen efterfrågade mer introduktion och att elevgrupp 2 som utsattes för den inte efterfrågade mer.

5.1.4 Assistentens roll i laborationen

Jag anser att det inte är tillräckligt att endast låta eleverna handskas med material och lösa uppgifter för att meningsfullt lärande ska ske. Laborationen är utvecklad med ett syfte, och naturligtvis kan inte några garantier ges för att syftet uppnås om eleverna arbetar helt självständigt utan ledning. Assistentens roll i laborationen är således att vara ledande och motiverande.

Assistentens första motiverande uppgift är att hålla i introduktionen och fänga elevernas intresse. För att sedan hålla förankringen till vardagen vid liv berättar assistenten om de molekyler som eleverna laborerar med; något om dess användningsområden finns beskrivna i assistentversionen av molekylbiblioteket. Assistentens vidare roll under laborationen beskrivs i assistenthandledningen och går i korthet ut på att samla ihop eleverna efter varje uppgift. Då gäller det att sammanfatta uppgiften och att synliggöra intressanta och aktuella matematiska resonemang och att ta vara på elevernas vilja att redovisa sina

ståndpunkter och resultat. Tillsammans med eleverna prövar man olika förslags giltighet och kommer fram till en gemensam lösning. Detta är i enlighet med de forskningsresultat som redogjorts för i avsnitt 3.4.

Det är samtidigt viktigt att assistenten är uppmärksam på elevernas arbete även under de tillfällen när eleverna är upptagna med att lösa uppgifter. Om assistenten själv har byggt de aktuella molekylerna och löst samtliga uppgifter framgår det tydligt när eleverna är i behov av stöd och hur långt gruppen har fortskridit med den aktuella uppgiften. Det är ovärderliga observationer som kan användas för att fatta beslut om laborationens progression.

5.2 Relation till kursmål

Laborationen anknyter till områden inom både matematiken och kemin. Här följer en diskussion om kursmålen visavi de båda ämnena.

5.2.1 Matematikämnet

I samtliga av kurserna i matematik på gymnasiet finns ett kursmål som säger att eleven skall kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för vardagsliv och vald studieinriktning. Detta kursmål är i hög grad intressant för elever som valt studieinriktning mot ett naturvetenskapligt eller tekniskt program på gymnasiet. I dessa program ingår minst kemi A-kursen. Att kunna analysera och lösa problem av matematisk karaktär som anknyter till kemi A eller kemi B, det vill säga deras studieinriktning, är en aktivitet som eleverna kommer att ägna sig åt under laborationen. Detta kursmål är således mycket aktuellt för deltagarna i laborationen.

Kursen matematik A har ett mål som handlar om geometrin och dess begrepp. I kursplanen står att ”eleven skall ha fördjupat kunskaperna om geometriska begrepp och kunna tillämpa dem i vardagssituationer och i studieinriktningens övriga ämnen”¹. Symmetrier så som de introduceras i min laboration är i högsta grad geometriska begrepp. Med samma resonemang som i avsnittet ovan är detta kursmål relevant i laborationen.

Även kursmålen i kursen matematik - breddning är intressanta för laborationen. I denna kurs är innehållet inte noga specificerat, utan eleven skall använda kunskap från olika områden inom matematiken.² Om ett av ämnesområdena exempelvis är en fördjupning i diskret matematik och grupp teori kan min laboration användas som ett direkt redskap för måluppfyllnad.

¹Skolverket: MA1201 - Matematik A, Kursplan, juli 2000.

²Dens.MA1206 - Matematik - breddning, Kursplan, juli 2000.

5.2.2 Kemiämnet

Laborationens kemiinnehåll har större anknytning till kemi så som det gestaltas på eftertergymnasiala utbildningar än på gymnasiet. Men det finns naturligtvis formuleringar i kursplanerna för kemi som stämmer med innehållet i min laboration. Ett av målen i kursen kemi A är att ”eleven skall kunna planera och genomföra experimentella undersökningar på ett ur säkerhetssynpunkt tillfredsställande sätt, kunna bearbeta, redovisa och tolka resultatet samt redogöra för arbetet muntligt och skriftligt”³. Man kan se min laboration som ett experiment, och i sådana fall ett experiment som syftar till att demonstrera molekylär symmetri. Det eleverna i sådana fall gör, är att utföra experiment, redovisa resultatet skriftligt och muntligt för varandra och för assistenten, samt tolka resultatet av undersökningen.

Något annat i min laboration som tränas är att skriva kemiska formler för struktur och sammansättning av aktuella molekyler. Detta är en kunskap som eleven skall ha förvärvat efter kemi A.⁴ I kemi B finns också ett mål som är relevant: där står att eleven skall ha fördjupat sina kunskaper inom några av kemins aktuella tillämpningsområden.⁵ Ett sådant område anser jag skulle kunna handla om molekylär symmetri och dess tillämpningar inom olika områden i kemin. Därmed är detta mål något som aktualiserar laborationen som ett moment också i kemi B.

5.3 Reflektion kring testlaborationer och utvärderingar

Detta avsnitt innehåller mina reflektioner och erfarenheter från testlaborationerna med eleverna från ett Stockholmsgymnasium. Min förhoppning är att dessa kan verka för att göra laborationen bättre när den används i Vetenskapens Hus reguljära verksamhet.

Innan laborationstillfällena diskuteras för sig tycker jag att det är lämpligt att säga ett par ord om utvärderingens form. Den var en *kvalitativ undersökning*, vilket innebär att deltagarna gavs tillfälle att redovisa sina tankar om laborationen relativt två öppna frågor. Jag valde denna undersökningsform istället för den kvantitativa diton eftersom jag sökte komma åt aspekter av laborationen som eleverna själva hade åsikter om och reagerat på, snarare än de aspekter som jag förutsåg att eleverna kunde ha åsikter om. Detta förfaringssätt anser jag kommer närmare elevernas tankar än vad ett kvantitativt förfaringssätt förmår. Dock för det också med sig nackdelar. Eventuella felkällor i undersökningen, i den mån man kan tala om felkällor i en kvalitativ undersökning, kan

³Skolverket: KE1201 - Kemi A, Kursplan, juli 2000.

⁴*Ibid.*

⁵Skolverket: KE1202 - Kemi B, Kursplan, juli 2000.

för det första vara att jag kände denna elevgrupp eftersom jag undervisat dem under VFU-perioden ”Verka i skolan”. De kan därför känna sig manade till att ge laborationen ett gott omdöme trots att upplevt oklarheter eller andra av mig icke eftersträvarsvärda aspekter av laborationen. För det andra genomfördes undersökningarna som ett sista moment av ett långt undervisningspass. Därmed finns möjligheten att eleverna inte hade ork nog att bemöda sig med att tänka metakognitivt någon längre stund och endast författade åsikter med hänsyn till affekter.

5.3.1 Första testlaborationen

Resultaten från undersökningen innehåller ganska entydiga svar angående vad eleverna anser att de lärt sig under laborationen, se 4.2.2 och Bilaga F. Det betraktar jag som en indikation på att laborationen uppfyller sitt syfte, det vill säga att eleverna resonerar kring symmetrier. Att detta syfte uppfylldes kan även jag själv intyga; eleverna var aktiva i de diskussioner som följde på arbetsuppgifterna och diskuterade, argumenterade och redogjorde för sina resultat. Elever som tyckt att det fanns oklarheter eller hade svårt att lösa uppgifterna drog nytta av sina kamraters resonemang. Efter uppgift två hade alla elever lärt sig handskas med materialet och lösa uppgifter med hjälp av det. Jag förordar att matematikassistenterna som håller i denna laboration uppmärksammar att låta eleverna redogöra för sina resultat när en uppgift är klar.

Flera elever framhåller åsikter om arbetsuppgifternas beskaffenhet. Essensen i dessa anser jag vara att en för stor andel uppgifter lyfts från laborationen; den faktiska tidsåtgången var större än den uppskattade. Detta innebär att jag kan låta ett antal borttagna uppgifter anta sin forna plats.

Under det första laborationspasset blev den tänkta presentationen inte av på grund av kompatibilitetsproblem mellan min dator och projektorn i salen. Därför genomfördes en improviserad presentation. Det är, med tanke på detta, inte märkligt att eleverna efterfrågade mer genomgång och information i början av laborationen. Jag föreslår att min presentation används i fortsättningen.

5.3.2 Andra testlaborationen

Denna grupp har gemensamt med den förr att deras svar är entydiga med avseende på vad anser att de lärt sig. Även här var eleverna aktiva i diskussioner och redogörelser för sina resultat. I denna grupp var det var lika tydligt att diskussionerna i helklass som sammanfattade uppgifterna hade en central betydelse för elevernas lärande.

Vid detta tillfälle hade jag möjlighet att genomföra presentationen med en projektor. Det är anmärkningsvärt att inte en enda elev efterfrågar mer introduktion. Min tolkning är att presentationen fyller sitt syfte, och att den bör användas även i fortsättningen.

Flera elever tyckte att ”prickexemplet” borde ha fått en större roll. Prickexemplet visade jag för ett antal elever som undrade över skillnaden mellan en spegling och en rotation; dess resultat kan se lika ut. Denna åsikt gjorde att jag lade till en beskrivning av prickexemplet i assistenthandledningen samt en uppmaning till att det används för att demonstrera resultatet av en spegling.

5.4 Framtida utveckling

I framtiden vore det intressant att se en utveckling av spår 2 och även andra spår. Det finns många områden inom kemin som anknyter till det faktum att molekyler kan vara symmetriska. Bland annat kan nämnas det fenomen som kallas optisk aktivitet. Det går i korthet ut på att icke-identiska spegelbilder av en molekyl vrider planpolariserat ljus olika. Ofta inträffar att den ena molekylen vrider ljusets plan med vinkeln θ och den andra med vinkeln $-\theta$, det vill säga lika mycket men i motsatta riktningar. En lösning med lika koncentrationer av de båda spegelbildsmolekylerna (ett racemat) har en nettoförskjutning av ljusets plan med noll grader. Om det finns erforderlig utrustning medelst vridningen kan mätas kan ett spår ha som mål att undersöka detta.

Om produkten i en kemisk reaktion är asymmetrisk kan resultatet vara ett racemat. Det finns flera dokumenterade händelser, t.ex. i läkemedelsindustrin, där detta utgjort ett problem. Faktum är att de icke-identiska spegelmolekylerna kan ha olika effekt på människokroppen. Läkemedlet Neurosedyns aktiva substans Talidomid uppvisar denna egenskap. Den ena molekylen har avsedd effekt medan den andra orsakat fosterskador. I detta sammanhang kan det vara intressant att se på den organiska kemins nomenklatur och se varför ett racemat kan bildas.

Den moderna kemitekniken har gjort det möjligt att separera två icke-identiska spegelbilder, med hjälp av kromatografi i en s.k. kiral kolonn. Hur en sådan fungerar är centralt och aktuellt att tala om eftersom det direkt anknyter till symmetribegreppet.

5.5 Slutsatser

Det huvudsakliga målet med examensarbetet var att kunna presentera en färdig produkt för Vetenskapen Hus i form av en fungerande laboration. När den första testlaborationen

med matematikassistenterna genomförts stod det klart att laborationen var genomförbar, ehuru i behov av slipning. Efter genomförandet av den andra testlaborationen med gymnasieelever från en skola i Stockholmsområdet visade det sig att laborationen mogen och mer: gymnasieelevernas utvärderingar visar entydigt att laborationen innehåller intressant matematik samt att eleverna lär sig om symmetrier. Det innebär att laborationen uppfyller sitt syfte och att resultatet är att betrakta som en färdig produkt. Därmed är examensarbetets huvudsakliga mål uppfyllt.

Gällande frågeställningarna i avsnitt 1.4 ges en matematisk beskrivning av symmetrier i Bilaga A. Lärande under en laboration beskrivs i kapitel 3 och i detta kapitel, avsnitt 5.1. Gällande passande arbetsformer för en laboration om symmetrier, kan den modell jag lagt fram sägas vara passande, med stöd från mina undersökningar och litteraturen. Det material som används för att åskådliggöra symmetrier och dess användning beskrivs i kapitel 2.

Bilaga A

Matematisk bakgrund

A.1 Introduktion

A.1.1 Om grupper

Här kommer vi att tala om grundläggande gruppteori. Frågor som ”vad är en grupp”, ”vilka egenskaper har grupper”, kommer att besvaras på bästa möjliga vis. Jag hoppas att du kommer att följa med i texten.

Vi börjar med att definiera begreppet grupp.

Definition A.1.1. En grupp är en algebraisk struktur bestående av en mängd G och en funktion f . För f gäller att den tar två element ur mängden och avbildar det på ett element i samma mängd, dvs.:

$$\begin{aligned} f : \quad G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto f(g_1, g_2), \quad g_1, g_2 \in G. \end{aligned}$$

Istället för funktionsnotation kan vi beteckna operationen $f(g_1, g_2)$ med $g_1 \cdot g_2$, s.k. infixnotation. Elementen i G tillsammans med $\cdot$ uppföljer de s.k. gruppaxiomen:

- *Identitet.* Det existerar ett element I i G s.a. för alla element a i G gäller $a \cdot I = I \cdot a = a$.
- *Invers.* För alla element a i G existerar a^{-1} i G , s.a. $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$.
- *Associativitet.* För alla a, b, c i G gäller $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

Man beskriver en grupp genom notationen $\langle G, \cdot \rangle$. Man menar då att detta är en grupp med mängden G och operationen $\cdot$, vilket skiljer den från andra algebraiska strukturer.

A.1.2 Den generella gruppens egenskaper

Här kommer vi att undersöka några av de egenskaper som gruppaxiomen medför.

Är identitets-elementet unikt i en grupp? Det första gruppaxiomet i listan ovan slår fast att det existerar ett element I i gruppen, som inte "påverkar" de andra elementen. Med andra ord gällde ju att $a \cdot I = I \cdot a = a$. Kan vi vara säkra på att det endast existerar *ett* element I som har funktionen av ett identitets-element? Rent intuitivt är det inte en omöjlighet att en grupp kan innehålla flera identitets-element. Så är dock inte fallet:

Sats A.1.2. *Låt G vara en grupp. Då existerar precis ett identitets-element i G .*

Vi antar att det finns två identitets-element $I_1, I_2 \in G$. För alla $a \in G$ gäller då:

$$aI_1 = a,$$

$$aI_2 = a.$$

Bevis. Dessa två likheter medför att $aI_1 = aI_2$, vilket med multiplikation av a^{-1} från vänster ger $a^{-1}aI_1 = a^{-1}aI_2$ vilket förenklas till $I_1 = I_2$.

Vi har nu visat att de två tänkta identitets-elementen I_1 och I_2 är identiska. Eftersom detta gäller för godtyckligt valda I_1 och I_2 i gruppen, har vi visat att det endast finns *ett* identitets-element i varje grupp. $\square$

Det andra gruppaxiomet talar om för oss att det för varje element a i en grupp existerar en invers a^{-1} för vilket gäller att $aa^{-1} = a^{-1}a = I$. Det visar sig att varje invers är unik:

Sats A.1.3. *Låt G vara en grupp. För alla $a \in G$ existerar precis ett element a^{-1} som är inversen till a .*

Bevis. Med samma beteckningar som i satsen antar vi att $a \in G$ har två inverser $b, c \in G$. Det innebär att

$$ab = ba = I,$$

$$ac = ca = I.$$

Från ovan erhålles $ab = ac$ och genom att multiplicera med a^{-1} från vänster fås $a^{-1}ab = a^{-1}ac$ och slutligen $b = c$. Det existerar således bara en invers per element enligt samma resonemang som i beviset till sats [A.1.2](#). $\square$

Sats A.1.4. *Inversen av en produkt. Låt G vara en grupp. Då är $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ för alla $a, b \in G$.*

Bevis. Från gruppaxiomet om invers har vi att detta kan verifieras genom evalueringarna

$$\begin{aligned}(ab)(b^{-1}a^{-1}) &= a(bb^{-1})a^{-1} = aIa^{-1} = aa^{-1} = I, \\ (b^{-1}a^{-1})(ab) &= b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}Ib = b^{-1}b = I.\end{aligned}$$

Det är klart att $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. □

A.1.3 Grupper och ordningar

Ordningsbegreppet används när man talar om en grupp storlek. Man återkommer ofta till detta begrepp när man talar om olika grupper och det är därför bra att ha betydelsen klar. Man definierar ordningen både för en hel grupp och för ett enskilt element i gruppen. När man talar om *ordning* i gruppssammanhang behöver man skilja mellan ändliga och oändliga grupper. Därför diskuterar vi ordning från två fall:

Definition A.1.5. *Ändliga gruppors ordning.* Ordningen av en ändlig grupp är lika med kardinaliteten på mängden som rymmer gruppens element. Om G är en grupp låter vi $O(G)$ beteckna dess ordning. För en grupp av ändlig ordning gäller att $O(G) < \infty$, vilket betyder att gruppen innehåller ändligt många element.

Ordningen av ett element a i någon ändlig grupp G med identitets-elementet I bestäms av det minsta positiva heltal i som uppfyller $a^i = I$. Vi betecknar ordningen på a som $o(a) = \min\{i \in \mathbb{N} : a^i = I\}$.

Definition A.1.6. *Oändliga gruppors ordning.* För en grupp av oändlig ordning gäller att den minst innehåller ett uppräknligt oändligt antal element. Vi säger då att gruppens ordning är ∞ .

Vi definierar ordningen av ett element i en oändlig grupp analogt med definitionen av detsamma i en ändlig grupp, men med tillägget att om inte något sådant heltal i existerar säger vi att elementets ordning är ∞ .

Kommentar A.1.7. Det är värt att notera ett antal ting om elements ordning. Identitets-elementet är av ordning 1. I grupper med ändlig ordning har alla element ändlig ordning. Däremot kan oändliga grupper ha element av både ändlig och oändlig ordning: betänk identitets-elementet som finns i varje grupp, vilket har ordning 1.

Härnäst kommer tre exempel på grupper att studeras. Vi kommer i varje exempel att definiera en operator i enlighet med hur en gruppoperator skall definieras, och därefter

verifiera de tre gruppaxiomen. Det visar att den givna mängden tillsammans med sin operator verkligen utgör en grupp.

Exempel A.1.8. Gruppen $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Vi låter som vanligt $\mathbb{Z}$ beteckna mängden av heltal. Om vi låter addition vara gruppoperator och $a, b \in \mathbb{Z}$ har vi att

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto a + b. \end{aligned}$$

Eftersom summan av två heltal alltid är ett annat heltal, $a + b \in \mathbb{Z}$, så är $+$ en bra kandidat till gruppoperator. Härnäst undersöker vi om gruppaxiomen håller i $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

Identitet. Vilket tal $I \in \mathbb{Z}$, under addition, kan tjäna som ett identitetsselement dvs. $I + a = a + I = a$, alla $a \in \mathbb{Z}$? Jo, talet $0 \in \mathbb{Z}$ uppfyller $0 + a = a + 0 = a$. Alltså är $I = 0$ och detta gruppaxiom håller.

Invers. Vi ska finna en additiv invers till $a \in \mathbb{Z}$. Heltalet $-a$ kommer alltid att uppfylla $a + (-a) = -a + a = 0$. Således finns det en invers till alla element i $\mathbb{Z}$ som också ligger i gruppen. Detta axiom håller.

Associativitet. Räknesättet addition är associativt på $\mathbb{Z}$, vilket medför att även det sista gruppaxiomet håller.

Vi har nu verifierat att $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ är en grupp. Eftersom addition är kommutativ kallas gruppen "Abelsk".

Exempel A.1.9. Gruppen $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$. Med $\mathbb{Z}_n$, där $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, menar man mängden av heltal från 0 upp till $n - 1$, dvs. $\mathbb{Z}_n = \{z \in \mathbb{Z} : 0 \leq z \leq n - 1\} = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Således är $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Den kan användas som mängd i en grupp med operationen $+$, om vi definierar operatoren genom

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 &\rightarrow \mathbb{Z}_3 \\ (a, b) &\mapsto a + b \pmod{3}. \end{aligned}$$

Operatoren är vanlig addition, fränsett att summan uttrycks som det minsta positiva heltal som är kongruent med summan modulo 3. En summa av två tal $a + b = c$ där $a, b \in \mathbb{Z}_3$, som reduceras mod 3 antar alltid värdet av något tal i mängden $\{0, 1, 2\} = \mathbb{Z}_3$. I själva verket kan vi välja vilka naturliga tal som helst, ty de kan ju alla reduceras kongruent till $a \bmod 3$ respektive $b \bmod 3$. Definitionen av operatoren $+$ ovan är alltså definierad så som en gruppoperator skall definieras: den avbildar ett par av element $a, b \in \mathbb{Z}_3$ på ett annat element $c \in \mathbb{Z}_3$. Härnäst undersöker vi om gruppaxiomen håller för gruppen $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$.

Identitet. Vilket tal $I \in \mathbb{Z}_3$, under addition, kan tjäna som ett identitetsselement? Jo, talet $0 \in \mathbb{Z}_3$ uppfyller $0 + a = a + 0 = a$. Alltså är $I = 0$ och detta gruppaxiom håller.

Invers. Vi ska finna en additiv invers till $a \in \mathbb{Z}_3$. Talet $-a$ kommer alltid att uppfylla $a + (-a) = -a + a = 0$, men är $-a \in \mathbb{Z}_3$? Nej, ty $\mathbb{Z}_3$ är en mängd av *positiva* tal. Dock kan vi alltid skriva om $-a$ till ett positivt heltal i $\mathbb{Z}_3$ som är kongruent med $-a \pmod{3}$. Vi kan visa detta i den aktuella gruppen genom att gå igenom alla inverser till elementen i $\mathbb{Z}_3$: $-0 = 0$, $-1 = 2 \pmod{3}$ och $-2 = 1 \pmod{3}$. Således finns det en invers för alla element i $\mathbb{Z}_3$ som också ligger i gruppen, och det är klart att detta axiom håller.

Associativitet. Räknesättet addition är associativt på $\mathbb{Z}_3$, vilket medför att även det sista gruppaxiomet håller.

Vi har nu verifierat att $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$ är en grupp. Eftersom addition är kommutativ är $\mathbb{Z}_3$ också en Abelsk grupp.

Exempel A.1.10. Gruppen av inverterbara reella $n \times n$ -matriser, $\mathbb{R}^{n \times n}$. Elementen i den här gruppen är matriser med n rader och n kolonner, och således n^2 element som här är reella tal. Vi kommer dock inte lyckas göra hela mängden av reella $n \times n$ -matriser till en grupp. En nödvändig begränsning är att exkludera de icke-inverterbara matriserna från gruppens grundmängd och således endast bilda en grupp av en delmängd av $\mathbb{R}^{n \times n}$. Inverterbara matriser är precis de matriser som har en nollskild determinant. Vi kommer att diskutera anledningen till inskränkningen senare.

Vi behöver nu en operator som gör mängden av reella $n \times n$ -matriser till en grupp. Eftersom addition faktiskt inte ger en gruppstruktur på denna mängd (betänk t.ex. att matrisen $A + (-A)$, där $A, -A$ är inverterbara reella matriser, saknar invers) väljs här matrismultiplikation till operator. Vi definierar således operatören

$$\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} = C$$

där elementet $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j} = \sum_{s=1}^n a_{i,s}b_{s,j}$. Eftersom $c_{i,j}$ är en summa av en produkt av reella tal gäller $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ och därför gäller $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Men är C alltid inverterbar, vilket den måste vara om matrismultiplikationen ska vara en gruppoperator? Om $C = AB$ och A, B inverterbara, så betyder det $C = \det AB = \det A \cdot \det B \neq 0$ att C också är inverterbar. Matrismultiplikation är således en gruppoperator på mängden av alla inverterbara $n \times n$ -matriser. Vi ska nu undersöka om gruppaxiomen håller.

Identitet. Vi låter I beteckna identitetsmatrisen av storlek n . Vi har att

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

matrisen med ettor i diagonalen och 0 annars. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Då är $AI = IA = A$. Matrisen I är således identitetsselementet.

Invers. Det finns matriser $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sådana att de saknar invers. Om $\det A = 0$ existerar ej A^{-1} . Hela mängden $\mathbb{R}^{n \times n}$ under multiplikation kan därför inte göras till en grupp. Istället kan vi ta den största delmängden i $\mathbb{R}^{n \times n}$ som har gruppstruktur, nämligen mängden av alla inverterbara $n \times n$ -matriser, $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$. Den gruppen brukar i algebran skrivas $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, vilket står för "generella linjära gruppen".

Associativitet. Eftersom matrismultiplikation alltid är associativ i hela $\mathbb{R}^{n \times n}$ är den även det i $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ eftersom $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$.

Vi såg alltså att hela $\mathbb{R}^{n \times n}$ inte har gruppstruktur under multiplikation eftersom inte alla matriser har inverser. Men om gruppens mängd begränsas till att innehålla endast de matriser som har inverser så erhåller vi gruppen $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

A.1.4 Speciella grupper

I gruppteorin finns många exempel på grupper med särskilda egenskaper. Här kommer några av de grundläggande, men speciella, grupperna att definieras och utforskas.

Definition A.1.11. Låt G vara en grupp och låt $g \in G$. Vi inför sedan potensnotation, så att g^m , $m \in \mathbb{Z}$ betyder

$$\begin{aligned} g \cdot \dots \cdot g \text{ (} m \text{ gånger) om } m > 0 \\ (g^{-1})^{-m} \text{ om } m < 0 \\ I \text{ om } m = 0 \end{aligned}$$

Vi har då också att $g^m g^n = g^{m+n}$. Om varje element i G kan skrivas som potenser av g så att $G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, g^{-2}, g^{-1}, I, g^1, g^2, \dots\}$ kallas gruppen *cyklisk*. Man säger att g genererar G eller att g är en generator för G . Man brukar använda beteckningen $\langle g \rangle$ om gruppen som genereras av g .

Kommentar A.1.12. En cyklisk grupp kan vara ändlig eller oändlig. Gruppen $\langle g \rangle$ är ändlig om det finns ett positivt heltal n sådant att $g^n = I$. Om n är det minsta

heltalet som uppfyller detta så har $\langle g \rangle$ precis n element. Mängden av alla element i $\langle g \rangle$ är då lika med $\{g^0 = g^n = I, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, dvs. en mängd med n element. Då är $O(\langle g \rangle) = o(g) = n$.

Definition A.1.13. En grupp $\langle G, + \rangle$ kallas *Abelsk* om $a + b = b + a$ för alla $a, b \in G$. Av naturliga skäl använder man gärna $+$ som gruppoperatorbeteckning till en Abelsk grupp. I exemplen som diskuterades tidigare är $\langle \mathbb{Z}_3, + \rangle$ abelsk, men ej $\langle \text{GL}(n, \mathbb{R}), \cdot \rangle$ för $n > 1$.

A.1.5 Delgrupper

I detta avsnitt kommer begreppet delgrupp att definieras. En delgrupp är ett viktigt objekt som används inom all gruppteori, bl.a. för att definiera nya objekt, så som sidoklasser och kvotgrupper.

Definition A.1.14. Låt G vara en grupp med operatorn $\cdot$ och låt H vara en icke-tom delmängd till G . Då är H en *delgrupp* till G om och endast om:

1. *Slutenhet.* För alla $a, b \in H$ gäller $a \cdot b \in H$,
2. *Invers.* Om $a \in H$ så $a^{-1} \in H$.

Dessa två kriterier kan sammanfattas i ett enda täckande, som hädanefter kallas delgruppskriteriet:

Sats A.1.15. Delmängden $H \neq \emptyset$ av G är en delgrupp om och endast om det för alla $a, b \in H$ gäller att $ab^{-1} \in H$.

Bevis. Beviset följer här. Låt $a = b$ vilket medför $aa^{-1} = I \in H$. När vi vet att identitets-elementet alltid finns i delgruppen kan vi låta $a = I$ så att $Ib^{-1} = b^{-1} \in H$. Eftersom b^{-1} finns i delgruppen så får vi från delgruppskriteriet att $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$. De båda delgruppskraven *invers* och *identitet* kan alltså härledas från delgruppskriteriet, vilket visar att det är tillräckligt och nödvändigt. $\square$

Sats A.1.16. En cyklisk grupp $\langle g \rangle$ till G , där $g \in G$, är en delgrupp.

Bevis. Det räcker med att visa $ab^{-1} \in \langle g \rangle$, enligt delgruppskriteriet. Låt $a = g^m$ och $b = g^n$, ($m, n \in \mathbb{Z}$). Då är $ab^{-1} = g^m g^{-n} = g^{m-n} \in \langle g \rangle$ enligt definitionen av en cyklisk grupp. Det är klart att $\langle g \rangle$ är en delgrupp till G . $\square$

Definition A.1.17. En sidoklass är en viss typ av mängd med element från en grupp. En sidoklass bildas genom att ta en delgrupp H till G , fixera ett element $g \in G$ och sedan bilda mängden gH eller Hg . Vi definierar den *vänstra* sidoklassen genom $gH = \{gh : h \in H\}$ och den *högra* sidoklassen genom $Hg = \{hg : h \in H\}$. En sidoklass är således mängden av delgruppens element multiplicerat med g från höger eller vänster.

Definition A.1.18. Med beteckningarna från ovan så kallas H för en *normal delgrupp* om och endast om $gH = Hg$, eller ekvivalent $gHg^{-1} = H$, för alla $g \in G$.

Kommentar A.1.19. Om G är Abelsk gäller självklart att $gH = Hg$, men det gäller inte alltid. Alla delgrupper till en Abelsk grupp är således normala delgrupper. Omvändningen gäller dock inte, så det är inte säkert att hela gruppen är Abelsk även om delgruppen är normal.

Sats A.1.20. Alla sidoklasser gH där $g \in G$ som bildats med en delgrupp H till G har samma kardinalitet. Om H är ändlig så är $\text{kard}(gH) = O(H)$. Detta gäller även för de högra sidoklasserna.

Bevis. Intuitivt kan vi ju tänka oss att gH möjligtvis får färre eller fler element än H . Om vi får färre element i gH än H betyder det att minst två element $gh, gh' \in gH$ visar sig vara samma element. Men då har vi att $gh = gh'$ och därför $h = h'$ vilket visar att gH aldrig är mindre än H . Att gH inte blir större än H är givet i definitionen av gH . Således gäller att alla sidoklasser gH har samma kardinalitet, och att om H ändlig så är $\text{kard}(gH) = O(H)$. $\square$

Definition A.1.21. *Kvotmängd.* Om H är en delgrupp till G kallar vi mängden $\{gH : g \in G\}$, dvs. mängden av alla sidoklasser till H , för kvotmängden G/H . Man säger ” G mod H ”.

Definition A.1.22. Operatoren *sidoklassmultiplikation* är definierad på följande vis:

$$G/H \times G/H \rightarrow G/H$$

$$(g_1H, g_2H) \mapsto (g_1H)(g_2H) = g_1g_2H, \quad g_1, g_2 \in G.$$

Kommentar A.1.23. Operationen går alltså till så att vi tar två element från sidoklasserna som ska multipliceras, kallade *representanter*, och multiplicerar dessa. Den sidoklassen som produkten av representanter hör till, är resultatet av sidoklassmultiplikationen.

Härnäst visar vi att kvotmängden kan göras till en grupp tillsammans med sidoklassmultiplikation. En gruppoperator måste dock vara väldefinierad. Det framkommer nedan att:

Sats A.1.24. *Gruppoperatorn sidoklassmultiplikation är väldefinierad och mängden av alla sidoklasser gH till en normal delgrupp H till G utgör en grupp.*

Bevis. Vi måste nu visa att operationen är väldefinierad om H är en normal delgrupp till G . Vad menas med att operatoren är väldefinierad i det här fallet? Tag först $a, a', b, b' \in G$. Om multiplikationen är väldefinierad på de vänstra sidoklasserna så måste vi försäkra oss att om $aH = a'H$ och $bH = b'H$, dvs. om $a' \in aH$ och $b' \in bH$, så är $abH = a'b'H$. Resultatet av sidoklassmultiplikationen ska alltså vara samma, oberoende av vilka representanter vi väljer för respektive sidoklass.

Vi visar nu att multiplikationen faktiskt är väldefinierad. Eftersom $a' \in aH$ och $b' \in bH$ existerar det $h, h' \in H$ sådana att $a' = ah$ och $b' = bh'$. Produkten mellan dessa är $a'b' = ahbh' = a(bb^{-1})hbh' = ab(b^{-1}hb)h'$. Eftersom $(b^{-1}hb) \in H$ enligt antagandet så är $(b^{-1}hb)h' = h'' \in H$. Vi har nu att $a'b' = abh''$ och därmed $a'b' \in abH$. Eftersom olika sidoklasser är disjunkta enligt lemma A.1.27 nedan, är $a'b'H = abH$, och multiplikation av vänstersidoklasser är således väldefinierad. Beviset kan upprepas på ett liknande sätt med högersidoklasser.

Vi visar nu att om sidoklassmultiplikationen är väldefinierad så måste H vara *normal*. Antag att operationen är väldefinierad så som det beskrivs ovan. Tag $g \in G$ och $h \in H$. Beviset bygger på att vi väljer a, a', b, b' listigt. Låt $a = I$, $a' = h$ och $b = b' = g^{-1}$. Eftersom vi antar att operationen är väldefinierad har vi att $Ig^{-1}H = hg^{-1}H$ och därmed $hg^{-1}H = g^{-1}H$. Enligt vad vi sagt ovan betyder det att $hg^{-1} \in g^{-1}H$ och därmed att $hg^{-1} = g^{-1}h'$, där $h' \in H$. Genom att multiplicera med g från vänster får vi $ghg^{-1} = h' \in H$ enligt antagandet att h' är ett element i H . Eftersom g och h var godtyckligt valda element drar vi slutsatsen att $gHg^{-1} \subseteq H$ för alla $g \in G$. Därför är H en normal delgrupp till G om multiplikationen är väldefinierad.

Vi verifierar nu gruppaxiomen:

Identitet. Man ser enkelt att $(gH)(H) = (gH)(IH) = gIH = gH$ och p.s.s. $(IH)(gH) = gH$. Därmed är delgruppen själv identitetsselementet.

Invers. Eftersom $(gH)(g^{-1}H) = gg^{-1}H = H$ och $(g^{-1}H)(gH) = H$ så är $(gH)^{-1} = g^{-1}H$.

Associativitet. Man ser att $((gH)(g'H))(g''H) = (gg'H)(g''H) = gg'g''H = (gH)(g'g''H) = (gH)((g'H)(g''H))$. Det är således klart att sidoklassmultiplikation är associativ. $\square$

Sats A.1.25. (Lagranges). *Låt H vara en delgrupp till en ändlig grupp G . Då delar $O(H)$ alltid $O(G)$.*

Kommentar A.1.26. Beviset som här kommer att gås igenom, är uppdelat i tre delar.

- Först visar vi att för en godtycklig grupp G och delgrupp $H \subseteq G$ gäller att två olika sidoklasser till H är disjunkta.
- Sedan visar vi att sidoklasserna partitionerar gruppen.
- Sist visar vi att resultaten ovan leder fram till satsen.

Lemma A.1.27. *Låt H vara en delgrupp till G . Då är alla icke identiska sidoklasser till H parvis disjunkta.*

Bevis. Om vi kan visa att för alla $g \in G$ existerar exakt en sidoklass som innehåller g har vi också visat att sidoklasserna till H är disjunkta. Inget element i en sidoklass kan då förekomma i en annan sidoklass; de är disjunkta. Definiera två sidoklasser till H : $Hg = \{hg : h \in H\}$ och $Hg' = \{hg' : h \in H\}$ för $g, g' \in G$. Om vi tar ett element a och antar att det ligger i både Hg och Hg' kommer alltså $Hg = Hg'$ att gälla. Vi ska nu visa det. Låt $h_1, h_2 \in H$ vara sådana att $a = h_1g$ och $a = h_2g'$. Då måste $h_1g = h_2g'$ och $g = h_1^{-1}h_2g'$. Tag $h \in H$. Då är $hg \in Hg$. Vi erhåller $hg = hh_1^{-1}h_2g'$ enligt ovan. Men H är ju sluten, så vi låter $h' = hh_1^{-1}h_2 \in H$. Då är $hg = h'g' \in Hg'$, så varje element $hg \in Hg$ kan skrivas på formen $h'g' \in Hg'$. Alltså ligger alla element i Hg också i Hg' , dvs. $Hg \subseteq Hg'$. Den andra inklusionen $Hg' \subseteq Hg$ kan också visas på motsvarande sätt, så $Hg = Hg'$. Slutsatsen är att om ett element finns i två sidoklasser så är de identiska. Ett element kan alltså inte finnas i två från varandra skilda sidoklasser, och därmed är sidoklasserna disjunkta. $\square$

Lemma A.1.28. *Samtliga sidoklasser till en delgrupp H av G partitionerar G .*

Bevis. Låt alla sidoklasser till en grupp G som är bildade genom delgruppen H vara $Hg_1, Hg_2, \dots$. Då kommer $G = \cup_{g \in G} Hg$ om sidoklasserna partitionerar G . Om detta är en partition av G så kommer alla element i G med i unionen av sidoklasserna. Är det så? Ja, eftersom alla delgrupper till G har identitetselementet och vi bildar sidoklasserna genom Hg för alla $g \in G$, kommer varje element i G finnas representerat i precis en sidoklass. Vi kan alltså med säkerhet säga att sidoklasserna partitionerar G . $\square$

Kommentar A.1.29. Om hela gruppen G ändlig så är en delgrupp $H \subset G$ också ändlig vilket innebär att antalet sidoklasser till H är ändligt. Då kommer G att partitioneras av ett ändligt antal sidoklasser. Därmed finns det ett positivt heltal n sådant att $G = Hg_1 \cup Hg_2 \cup \dots \cup Hg_n$.

Bevis. (Lagranges sats) Eftersom alla sidoklasser är lika stora, och har kardinaliteten $O(H)$ då G är ändlig, så får vi enligt ovanstående att $O(G) = n \cdot O(H)$. Därmed har vi visat Lagranges sats: om H är en delgrupp till G så delar delgruppens ordning gruppens ordning: $O(H) \mid O(G)$. $\square$

A.1.6 Homomorfier och isomorfier

Dessa två begrepp används när man jämför två grupper med varandra. Om det existerar en icke-trivial homomorfi eller en isomorfi mellan två grupper innebär det att det finns likheter i de båda gruppernas struktur. En isomorfi innebär en starkare grad av likhet än en homomorfi. Nedan kommer vi att definiera, och diskutera mer ingående, vad begreppen innebär.

Definition A.1.30. En homomorfi ϕ är en funktion från en grupp G till en grupp K med vissa egenskaper. Med andra ord,

$$\phi: G \rightarrow K.$$

Vad mer är, innehar en funktion som är en homomorfi en speciell egenskap som specificerar likheten i struktur mellan grupperna. Egenskapen är att för alla a och $b \in G$, så

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Kommentar A.1.31. Intuitivt kan vi tänka på en homomorfi som att produkten av två element i G kommer att bevaras av homomorfien, och avbildas på produkten av motsvarande element i K . Om vi låter $ab = c \in G$ och $\phi(a)\phi(b) = C \in K$, så $c \xrightarrow{\phi} C$.

Homomorfieegenskapen för med sig en hel del andra, icke-uppenbara egenskaper som gäller för alla homomorfier. De egenskaper som vi tar upp och bevisar här är sådana som är grundläggande inom gruppteorin eller som kommer att användas senare i rapporten, när vi beskriver symmetrier.

Sats A.1.32. Låt I_G och I_K vara identitetslement i grupperna G respektive K så gäller följande:

1. $\phi(I_G) = I_K$, dvs. ϕ avbildar alltid I_G på I_K .
2. $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$, $\forall a \in G$, dvs. inverser i G bevaras av ϕ och avbildas på motsvarande invers i K .

Bevis. Vi börjar med att visa 1. Först inför vi en beteckning, som förenklar läsbarheten i följande beräkningar, nämligen $(\phi(a))^{-1} = \phi(a)^{-1}$. Eftersom I_G är identitetslementet gäller att $\phi(I_G) = \phi(I_G I_G)$. Homomorfieegenskapen för ϕ gör att vi har $\phi(I_G I_G) = \phi(I_G)\phi(I_G)$ och därmed $\phi(I_G) = \phi(I_G)\phi(I_G)$. Genom att multiplicera med $\phi(I_G)^{-1}$ från vänster erhåller vi $\phi(I_G)^{-1}\phi(I_G) = \phi(I_G)^{-1}\phi(I_G)\phi(I_G)$ och därmed $I_K = \phi(I_G)$. Egenskap 1. gäller följaktligen.

Nu visar vi 2. Låt $a \in G$. Vi kan då konstatera att i enlighet med 1. så är $I_K = \phi(I_G) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\phi(a^{-1})$, dvs. $I_K = \phi(a)\phi(a^{-1})$. Genom multiplikation från vänster med $\phi(a)^{-1}$ får vi $\phi(a)^{-1}I_K = \phi(a)^{-1}\phi(a)\phi(a^{-1})$ som förenklas till $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$. Således gäller också egenskap 2. $\square$

En sammanfattning av homomorfieegenskaperna som nämnts ovan presenteras här. Låt G och K vara grupper, ϕ en homomorfi $\phi : G \rightarrow K$ och $a, b \in G$ samt $\phi(a) = A$, $\phi(b) = B \in K$. För ϕ gäller då

$$ab \xrightarrow{\phi} AB, \quad I_G \xrightarrow{\phi} I_K \quad \text{och} \quad a^{-1} \xrightarrow{\phi} A^{-1}.$$

Exempel A.1.33. Vi kan åskådliggöra vad en homomorfi är genom att diskutera ett exempel. Låt $G_4 = \{A, B, C, D\}$, där indexet 4 är valt efter $O(G)$, vara gruppen som definieras genom multiplikationstabellen

$\times$	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	A	D	C
C	C	D	A	B
D	D	C	B	A

vilken visar att G_4 är en grupp. Identitetselementet i G_4 är A och ordningen för varje element är 2. Multiplikationstabellen visar också att G_4 är Abelsk. På liknande sätt låter vi gruppen $G_2 = \{1, -1\}$, vilken har multiplikationstabellen

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Även denna grupp är Abelsk eftersom den utgörs av vanlig multiplikation av 1 och -1 . Det visar sig att det är möjligt att bilda en homomorfi $\phi : G_4 \rightarrow G_2$. Homomorfin kan åskådliggöras genom tabellen

G_4	A	B	C	D
$\phi :$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
G_2	1	1	-1	-1

Vi kan verifiera att ϕ verkligen är en homomorfi, dvs. att $\phi(P \times Q) = \phi(P)\phi(Q)$ är sant för alla $P, Q \in G_4$. Vi genomför inte hela verifikationen här, utan exemplifierar istället genom att se på $B \times C = C \times B = D$ och notera att för $\phi(B)\phi(C) = 1 \cdot (-1) = -1 = \phi(D)$, så åtminstone är homomorfiegenskapen uppfylld för B och C .

Härnäst beskriver vi vad en isomorfi är. Men innan dess måste tre andra begrepp definieras:

Definition A.1.34. *Injektiv.* En funktion $\phi : G \rightarrow K$ är injektiv om $\phi(g) = \phi(h)$ innebär att $g = h$, för alla $g, h \in G$.

Intuitivt kan vi tänka på en injektion som en 1-1-avbildning; ett element i K är bild till precis 0 eller 1 element i G .

Definition A.1.35. *Surjektiv.* En funktion $\phi : G \rightarrow K$ är surjektiv om det för varje $k \in K$ finns minst ett $g \in G$ s.a. $k = \phi(g)$.

Intuitivt kan vi tänka på det som att alla $k \in K$ är bild till minst ett element i G .

Definition A.1.36. *Bijektiv.* En funktion $\phi : G \rightarrow K$ är bijektiv om den är injektiv och surjektiv.

En isomorfi mellan två grupper innebär att det finns en starkare strukturellitet mellan grupperna än om det bara existerar en homomorfi. Alla isomorfier är homomorfier, men alla homomorfier är inte isomorfier.

Definition A.1.37. Låt G, K vara två grupper med samma ordning. Låt $\phi : G \rightarrow K$ vara en homomorfi. Om ϕ är bijektiv kallas den för en isomorfi. En isomorfi är således en bijektiv homomorfi.

Kommentar A.1.38. Det innebär att varje element i K svarar mot precis ett element i G . Det innebär att två grupper som är isomorfa egentligen är samma grupp ur ett abstrakt gruppteoretiskt perspektiv. Om vi ställer upp grupptabellerna för två ändliga och isomorfa grupper så skiljer tabellerna sig endast åt i aspekterna ordningen på uppställningen av elementen och hur vi väljer att beteckna elementen.

I exemplet av en homomorfi i avsnittet ovan kan vi titta på tabellen som visar hur ϕ avbildar elementen i G_4 på elementen i G_2 , och konstatera att homomorfien inte är injektiv. Fler än ett element i G_4 avbildas på ett element i G_2 ! I själva verket är ϕ en "2-1"-homomorfi; A, B avbildas på 1 och C, D avbildas på -1 . Det är således klart att ϕ inte är en isomorfi, eftersom den misslyckas med att vara injektiv och därmed inte kan vara bijektiv. Däremot är ϕ surjektiv. Det kan vi se genom att 1 och -1 är bilden till minst ett element i G_4 .

A.2 Om representationer av grupper

A.2.1 Representationsteorins grundtanke

Målet med representationsteorin är att få ökad förståelse om abstrakta grupper och dess element. Man tänker ungefär att abstrakta grupper är svårförståeliga om man endast utgår från gruppstabeller och uttryck för generatorer. Om man istället låter gruppens element *representeras* av objekt från den linjära algebran, så har vi överfört det svårförståeliga till ett matematiskt område som är välkänt. Man valde att låta gruppens element representeras av matriser som är linjära transformationer av vektorrum på sig själva, och därmed kvadratiske matriser. Gruppoperationen utgörs av multiplikation av dessa matriser. Mängden av dessa matriser tillsammans med multiplikationen kommer då också att utgöra en grupp som kan sägas representera G .

Vi kommer i denna rapport att begränsa diskussionen om representationer till att handla om ändliga grupper. Det kommer visa sig vara nödvändigt, bl.a. eftersom en allmän diskussion skulle växa sig större än vad som är önskvärt i en rapport som denna, men också eftersom det inte skulle göra någon egentlig nytta för de senare avsnitten.

A.2.2 Representationer av ändliga grupper

När vi hittar matrisrepresentationer av elementen i en grupp vill vi att gruppelmenten och matriserna ska uppvisa samma inbördes förhållanden under gruppoperatorns inverkan. Med andra ord, om G är en grupp, $a, b \in G$ och A respektive B representerar a respektive b så kommer AB att representera produkten ab . En representation är helt enkelt en homomorfi

$$\mathbf{D} : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

där $\mathbb{C}$ får beteckna mängden av de komplexa talen. Då är $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ gruppen av inverterbara $n \times n$ -matriser med komplexa element. Det kan vara värt att stanna upp och diskutera detta påstående. Det har nämnts tidigare att elementen i G representeras av kvadratiske matriser. Vi har egentligen inte något annat val än att begränsa homomorfin till gruppen av inverterbara matriser av någon storlek $n \in \mathbb{N}$ eftersom homomorfiegenskapen kräver att inverser i definitionsmängden avbildas på motsvarande inverser i värdemängden. Matriserna måste således vara inverterbara. Dessutom kommer identitets-elementet i G att avbildas på I_n , identitetsmatrisen av storlek n .

En representation behöver inte vara en injektiv avbildning. Det betyder att vi kan låta en och samma matris representera flera gruppelment så länge homomorfiegenskapen

$\mathbf{D}(ab) = \mathbf{D}(a)\mathbf{D}(b)$, för alla $a, b \in G$ gäller. En representation som är injektiv, dvs. där varje $g \in G$ representeras av precis en matris, kallas med en passande term trogen.

När en representation $\mathbf{D} : G \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dvs. när elementen i G representeras med reella matriser, kallas $\mathbf{D}$ en reell representation.

A.2.3 Linjära representationer - en generalisering

I avsnittet ovan talar vi om representationer i termer av matriser. Det är sant att man gärna betraktar representationer som matriser som definierar linjära avbildningar från ett vektorrum till sig självt, men i själva verket är det en konkretisering av ett mer generellt sätt att se på representationer. Att konkretisera har givetvis sina fördelar, men också sina nackdelar. Matriskonkretitionen är bra att använda när man tillämpar representationsteori på problem inom fysiken och kemin, men fungerar inte lika bra som ett mer generellt synsätt när man bevisar satser. Vi ger nu en mer generell definition av linjära representationer. Den fortsatta texten kräver lite grundläggande kunskaper i linjär algebra, t.ex. kännedom om vektorrum.

Vi definierar V att vara ett vektorrum över $\mathbb{C}$. Vi låter sedan $\mathrm{GL}(V)$ beteckna gruppen av automorfier på V (en automorfi är en isomorfi från en mängd till sig själv). Det kan förtydligas genom att säga att $a \in \mathrm{GL}(V)$ är en linjär avbildning $a : V \rightarrow V$ med en invers a^{-1} .

Det finns ett samband mellan $\mathrm{GL}(V)$, som diskuteras här, och $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ som vi träffat på tidigare. Låt V ha en bas med n element $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Varje linjär avbildning $a \in \mathrm{GL}(V)$ kommer då att associeras med en $n \times n$ -matris som är definierad av basen och a och vars element är komplexa tal. Dessa matriser kommer att vara element i den välkända gruppen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Givet ett $a \in \mathrm{GL}(V)$ kan vi erhålla matrisen för a , R säg, genom faktumet att a är linjär. Det går nu att fastslå att varje $a \in \mathrm{GL}(V)$ har en unik matrisdual $R \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, givet en bas.

Vi definierar nu vad en representation är i mer generella ordalag. En linjär representation av en ändlig grupp G är en homomorfi $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ där V är ett ändligt dimensionellt vektorrum. Man säger att V i detta fall är ett *representationsrum* till G . Eftersom ρ är en homomorfi har den egenskaperna

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h), \quad \rho(I_G) = I_V \quad \text{och} \quad \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$$

för $g, h \in G$, I_G identitets-element i G och I_V identitets-element i $\mathrm{GL}(V)$. I fortsättningen kommer vi att låta $\rho(g) = \rho_g$ med avsikt att göra texten mer lättläst. Eftersom ρ_g själv

är en funktion kan den ta argument och vi skulle exempelvis med den gamla notationen skrivit $\rho(g)(x)$ istället för det mer lättlästa $\rho_g(x)$, när vi låter ρ_g avbilda $x \in V$. Hädanefter kommer dessutom matrisdualen till ρ_g att betecknas R_g .

Om vi låter G vara en ändlig grupp, V vara av dimension n och låter ρ vara en representation $G \rightarrow \text{GL}(V)$ säger vi att ρ är en representation av grad n . Låter vi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ vara en bas för V så kan vi definiera en matrisdual R_g till ρ_g med avseende på basen, för $g \in G$. För matrisdualerna R_g och R_h , där $g, h \in G$ kommer då att gälla

$$R_g^{-1} \text{ existerar, dvs. } \det R_g \neq 0 \quad \text{samtidigt} \quad R_{gh} = R_g R_h.$$

Låt V och V' vara två vektorrum med tillhörande representationer ρ och ρ' som båda representerar en grupp G . Om det existerar en linjär isomorfi $\tau : V \rightarrow V'$ sådan att för alla $g \in G$

$$\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$$

så kallas representationerna *likartade*. När ett sådant samband gäller kommer ρ och ρ' vara av samma grad. För representationernas matrisdualer kan sambandet skrivas

$$T R_g = R'_g T \quad \text{eller ekvivalent} \quad R'_g = T R_g T^{-1},$$

där T är en inverterbar transformationsmatris som motsvarar τ .

A.2.4 Delrepresentationer

Detta avsnitt följer Serres "*Linear Representations of Finite Groups*"¹. Låt W vara ett delrum till vektorrummet V och låt $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ vara en linjär representation. Antag att W är invariant i G , vilket betyder att om $x \in W$ så $\rho_g x \in W$ för alla $g \in G$. Det existerar då $\rho_g^W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ som också är en representation av G , men i W istället för hela V . Man säger att W är en delrepresentation av V .

Vi går nu igenom vad en direkt summa är. Låt V vara ett vektorrum med delrummen W och W' . Man säger att V är en direkt summa av W och W' om varje $x \in V$ kan skrivas unikt på formen $x = w + w'$, där $w \in W$ och $w' \in W'$. Det skrivs $V = W \oplus W'$. Från definitionen av direkt summa följer att W är komplementet till W' och att $W \cap W' = \{0\}$. Dessutom är $\dim V = \dim W + \dim W'$.

Härnäst går vi igenom vad en projektion är. Vi återanvänder beteckningarna från föregående stycke. En projektion p är en avbildning som skickar varje $x \in V$ på sin komponent

¹Jean-Pierre Serre: *Linear Representations of Finite Groups*, New York 1977.

$w \in W$. Man säger att p är projektionen av V på W som associeras med uppdelningen $V = W \oplus W'$. Vi har att $pw = w$ för alla $w \in W$ samt $pw' = 0$ för alla $w' \in W'$.

Sats A.2.1. Låt $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ vara en linjär representation av G i V , och låt W vara ett delrum i V som är invariant under G . Då existerar ett komplement W^0 till W som också är invariant under G .

Innan vi bevisar satsen behöver vi definiera vad det innebär att *summera funktioner*.

Definition A.2.2. Låt X vara en mängd och låt V vara ett vektorrum. Om $f : X \rightarrow V$ och $g : X \rightarrow V$, är summan av f och g funktionen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{alla } x \in X.$$

Vidare kan vi låta $(rf)(x) = rf(x)$ där r är en skalär från den kropp som V är ett vektorrum över.

Bevis. Vi bevisar nu sats A.2.1. Låt W^C vara ett godtyckligt komplement till delrummet W i V , och låt p vara projektionen av V på W relativt W^C . Vi bildar medelvärdet p^0 genom konjugaten av p med elementen i representation ρ :

$$p^0 = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \rho_g p \rho_g^{-1} \quad (\text{där } O(G) \text{ som vanligt betecknar } G\text{'s ordning}).$$

Det är klart att $p^0 : V \rightarrow W$. Eftersom ρ_g bevarar W har vi att om $w \in W$ så $\rho_g^{-1}w \in W$ och $\rho_g w \in W$. Eftersom p är en projektion på W gäller att $px \in W$ för alla $x \in V$. Så $p\rho_g^{-1}x \in W$ och därmed $\rho_g p \rho_g^{-1}x \in W$, varför $p^0 : V \rightarrow W$.

Projektionsegenskapen ger också att $p\rho_g^{-1}w = \rho_g^{-1}w$ från vilket man erhåller $\rho_g p \rho_g^{-1}w = w$ och därmed $p^0 w = w$ enligt definitionen av p^0 ovan. Därmed är p^0 en projektion av V på W , som hör till något komplement W^0 relativt W .

Eftersom p^0 är en projektion gäller att $p^0 w^0 = 0$, för alla $w^0 \in W^0$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned} \rho_h p^0 \rho_h^{-1} &= \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \rho_h \rho_g p \rho_g^{-1} \rho_h^{-1} = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \rho_{hg} p \rho_{hg}^{-1} = p^0 \quad \text{och därmed} \\ \rho_h p^0 &= p^0 \rho_h \quad \text{för alla } h \in G. \end{aligned}$$

Tag nu $x \in W^0$ och $g \in G$. Då har vi ju att $p^0 x = 0$. Dessutom har vi resultatet ovan, vilket ger oss $p^0 \rho_g x = \rho_g p^0 x = 0$, vilket innebär att $\rho_g x \in W^0$ och därmed att W^0 är invariant i G . Beviset är klart. $\square$

Kommentar A.2.3. Vi behåller påståenden och beteckningar från satsen ovan. Låt $x \in V$ och låt w och w^0 vara dess projektioner så att vi har $x = w + w^0$. Eftersom ρ är linjär

får vi $\rho_g x = \rho_g w + \rho_g w^0$ där $\rho_g w \in W$ och $\rho_g w^0 \in W^0$ eftersom delrummen är invarianta i G . Det betyder att $\rho_g w$ och $\rho_g w^0$ är projektioner av $\rho_g x$. Det kan också uttryckas som att $W^0 = \ker p^0$, från vilket följer att $V = W \oplus W^0$. Därmed kan vi dra slutsatsen att representationsrummen W och W^0 bestämmer ρ . När det är så identifierar en vektor i V med ett par av vektorer (w, w^0) där $w \in W$ och $w^0 \in W^0$. När representationen ρ i W respektive W^0 är givna i matrisformerna R_g och R_g^0 skriver vi matrisen för ρ i $V = W \oplus W^0$ som

$$\begin{pmatrix} R_g & 0 \\ 0 & R_g^0 \end{pmatrix}.$$

En ändlig direkt summa av fler representationer än två definieras på samma vis.

A.2.5 Irreducibla representationer

Definition A.2.4. Låt V vara ett representationsrum för en ändlig grupp G och låt $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ vara en linjär representation till G . Man säger att representationen och dess representationsrum är *irreducibel* om $V \neq 0$ och det inte existerar något delrum i V som är invariant i G , förutom 0 och V självt som alltid uppfyller det.

Kommentar A.2.5. Vi behåller påståenden och beteckningar från definitionen ovan. Man bör notera att det sista påståendet i definitionen är ekvivalent med att V inte är den direkta summan av två representationsrum, förutom den triviala sammansättningen $V = 0 \oplus V$.

En representation av grad 1 är av naturliga skäl irreducibel.

Sats A.2.6. Varje representationsrum $V \neq 0$ är en direkt summa av irreducibla representationer.

Bevis. Vi visar denna sats med hjälp av sats A.2.1 ovan. Låt G vara en grupp med ett representationsrum V . Vi genomför sedan beviset med induktion över $\dim V$. Låt $\dim V \geq 1$. Om V är irreducibel är vi klara. Om V inte är irreducibel kan den enligt satsen ovan skrivas som summan $V = V' \oplus V''$ där $\dim V' < \dim V$ och $\dim V'' < \dim V$. Induktionshypotesen ger att V' och V'' är direkta summor av irreducibla representationsrum, liksom V också. Satsen är därmed bevisad. $\square$

A.2.6 Karaktärer

Detta avsnitt följer Serres "*Linear Representations of Finite Groups*"². Vi kommer vi att introducera samt studera karaktärer och dess egenskaper. Till varje representation av en

²Serre: *Linear Representations of Finite Groups* (se not 1, s. 58).

grupp, med en ändlig bas av vektorer, kan man definiera karaktärsfunktionen χ som har till uppgift att karakterisera elementen i en representation av en grupp.

Definition A.2.7. Låt V vara ett vektorrum med en ändlig bas $e_i = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ och låt a vara en linjär avbildning $a : V \rightarrow V$. Eftersom det finns en ändlig bas som spänner upp V finns det en matrisdual (a_{ij}) till a . Spåret av a är

$$\text{Tr } a = \sum_i (a_{ii}).$$

En intressant egenskap som spåret Tr besitter är att $\text{Tr } a = \sum_i \lambda_i$, dvs. att spåret är summan av a 's egenvärden med inräknad algebraisk multiplicitet. Denna egenskap är invariant under basbyte, så Tr beror ej av valet av bas. Därmed är $\text{Tr } L$ väldefinierat för linjär avbildning L .

Definition A.2.8. Låt G vara en ändlig grupp och V ett vektorrum över de komplexa talen med en tillhörande ändlig bas. Låt också $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ vara en representation av G . Karaktären av ρ ges nu av

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr } \rho_g \quad \text{där } g \in G.$$

Man bör notera att $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$, vilket är en följd av att matrisdualerna R_g till ρ_g har komplexa tal till element.

Sats A.2.9. Låt χ vara karaktären av en representation ρ av grad n . För χ gäller följande:

1. $\chi(I) = n$ om I är identitetselementet i G ,
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ för $g \in G$,
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ för alla $g, h \in G$.

Bevis. Vi börjar med att visa (1). Eftersom ρ är en homomorfi har vi att $\rho(I_G) = I_{\text{GL}(V)}$, vilken har som matrisdual enhetsmatrisen av storlek n . Den har som bekant spåret n , vilket visar (1).

För att bevisa (2) behöver vi först dra oss till minnes ett faktum från den linjära algebran. Eftersom G är ändlig är ρ_g av ändlig ordning. Det innebär att $\rho_g^m = I_V$ för något $m \in \mathbb{Z}$. Låt λ_i vara ett egenvärde till ρ_g . Då är λ_i^m ett egenvärde till ρ_g^m med samma multiplicitet som λ_i . Eftersom $\rho_g^m = I_V$ har vi att $\lambda_i^m = 1$ vilket säger att egenvärdet ligger på enhetscirkeln i det komplexa talplanet och därmed gäller $|\lambda| = 1$. Kvadrerar vi

det uttrycket får vi $|\lambda_i|^2 = \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1$ och därigenom $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$. Om vi nu undersöker χ får vi:

$$\overline{\chi(g)} = \overline{\text{Tr } \rho_g} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \sum_i \lambda_i^{-1} = \text{Tr } \rho_g^{-1} = \text{Tr } \rho_{g^{-1}} = \chi(g^{-1}).$$

vilket visar (2).

Vi kan visa (3) genom att dra nytta av en känd formel,

$$\text{Tr } ab = \text{Tr } ba,$$

som gäller för två linjära avbildningsmatriser a och b som avbildar vektorrummet på sig självt. Låt t.ex. $x = \rho_h \rho_g = \rho_{hg}$ och $y = \rho_{h^{-1}}$. Eftersom x och y avbildar det givna vektorrummet på sig självt kan vi göra följande:

$$\chi(hgh^{-1}) = \text{Tr } \rho_{hg} \rho_{h^{-1}} = \text{Tr } xy = \text{Tr } yx = \chi(h^{-1}hg) = \chi(g).$$

Detta visar 3. □

Sats A.2.10. Låt G vara en ändlig grupp och låt V_1 och V_2 vara vektorrum. Låt $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ respektive $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ vara linjära representationer till G med karaktärerna χ_1 respektive χ_2 . Då har vi att karaktären χ till den direkta summan $V_1 \oplus V_2$ är $\chi = \chi_1 + \chi_2$.

Bevis. Vi låter ρ^1 och ρ^2 vara givna av matrisdualerna R_g^1 och R_g^2 för alla $g \in G$. Vi vet sedan tidigare att vi då kan skriva matrisdualerna till representationen av G i representationsrummet $V_1 \oplus V_2$ som

$$R_g = \begin{pmatrix} R_g^1 & 0 \\ 0 & R_g^2 \end{pmatrix}.$$

Från ovanstående är det klart att $\chi(g) = \text{Tr } R_g = \text{Tr } R_g^1 + \text{Tr } R_g^2 = \chi_1(g) + \chi_2(g)$. Detta visar påståendet. □

Sats A.2.11. (Schurs lemma). Låt V_1 och V_2 vara vektorrum samt låt $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ och $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ vara irreducibla linjära representationer till en ändlig grupp G . Om f är en linjär avbildning $V_1 \rightarrow V_2$, sådan att $\rho_g^2 \circ f = f \circ \rho_g^1$ för alla $g \in G$, har vi att

1. Om ρ^1 och ρ^2 ej är isomorfa, är $f = 0$.
2. Om $V_1 = V_2$ och $\rho^1 = \rho^2$, ges f av en skalärmatris.

Det kan behöva tilläggas att $f = 0$ betyder $f(x) = 0$ för alla $x \in V_1$, dvs. att $\ker f = V_1$.

Innan vi nu bevisar satsen behöver det först klargöras vad *bilden* och *kärnan* till en avbildning mellan vektorrum är.

Definition A.2.12. Låt X och Y vara vektorrum och låt $f : X \rightarrow Y$ vara en linjär avbildning.

1. Bilden till f är mängden $\text{Im } f = \{y \in Y : y = fx, \text{ för något } x \in X\}$, dvs. mängden av de element i Y som är bilden till elementen i X .
2. Kärnan till f är mängden $\ker f = \{x \in X : fx = 0\}$, där 0 betecknar "nollvektorn" i Y . Kärnan är alltså de $x \in X$ som avbildas på "nollvektorn" i Y .

Kommentar A.2.13. Det finns ett knep för att testa om en funktion $f : X \rightarrow Y$ är en isomorfi, X och Y är vektorrum. Har vi att $\ker f = \{0\}$ och $\text{Im } f = Y$ så är f en isomorfi. En verifikation av detta lämnas som övning.

Bevis. Vi bevisar nu Schurs lemma. Det triviala fallet $f = 0$ är redan klart. Vi angriper de icke-triviala fallen genom att anta $f \neq 0$, låta $W_1 = \ker f$ och ta $x \in W_1$. Vi har då att $f\rho_g^1 x = \rho_g^2 fx = 0$ vilket ger att $\rho_g^1 x \in W_1$. Därmed är W_1 invariant under G . Eftersom V_1 är irreducibel har vi att $W_1 = \{0\}$ eller $W_1 = V_1$. Vi kan exkludera fallet $V_1 = W_1$ eftersom det leder till $f = 0$. Alltså är $W_1 = \{0\}$. Vi fortsätter genom att låta $W_2 = \text{Im } f$ och ta $x \in V_1$. Då existerar $y \in W_2$ s.a. $fx = y$. Vi har ju att $f\rho_g^1 x = \rho_g^2 fx = \rho_g^2 y$ och dessutom är det uppenbart att $f\rho_g^1 x \in W_2$. Därmed gäller $\rho_g^2 y \in W_2$. Eftersom V_2 är irreducibel så är $W_2 = \{0\}$ eller $W_2 = V_2$. Men om $W_2 = \{0\}$ är $f = 0$, så vi får $W_2 = V_2$. Detta sammantaget med $W_1 = \{0\}$ ger att f är en isomorfi. Därmed är 1. klar.

För att visa 2. antar vi att $V_1 = V_2$ samt $\rho_g^1 = \rho_g^2$. Eftersom V_1 och V_2 är vektorrum över $\mathbb{C}$ kommer f alltid att ha minst ett egenvärde. Låt λ vara ett egenvärde till f och sätt $f' = f - \lambda I$ där I är identitetsavbildningen på $V_1 \rightarrow V_2$. Det står klart att f' har en nollskild kärna. Dessutom gäller att $\rho_g^2 \circ f' = f' \circ \rho_g^1$. Vi tillämpar samma argument som när vi visade 1. Man kan se att $\ker f'$ är invariant och därmed har vi som ovan att $\ker f' = V_1$. Detta innebär att $f' = 0$ vilket medför $f = \lambda I$, vilket bevisar 2. $\square$

Kommentar A.2.14. Schurs lemma är en viktig grundläggande sats inom representationsteorin. Den slår fast att det inte finns något linjärt samband mellan två irreducibla icke-isomorfa representationer (av samma grupp) med olika representationsrum förutom det triviala. Vidare säger det också att om påståendet $\rho_g^2 \circ f = f \circ \rho_g^1$ är sant och $V_1 = V_2, \rho^1 = \rho^2$ så är f en skalärmatris, dvs.

$$f = \lambda I_n = \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ och } n = \dim V_1.$$

Schurs lemma ger upphov till en mängd användbara följsatser. Här presenteras ett antal av dessa.

Korollarium A.2.15. Låt h vara en linjär avbildning $V_1 \rightarrow V_2$ och sätt

$$h^0 = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} (\rho_g^2)^{-1} h \rho_g^1$$

1. Om ρ^1 och ρ^2 inte är isomorfa, är $h^0 = 0$.
2. Om $V_1 = V_2$ och $\rho^1 = \rho^2$, är h^0 en skalärmatrix λI_n där $\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr } h$ och $n = \dim V_1$.

Bevis. Vi undersöker om h^0 är en linjär avbildning där $\rho_g^2 h^0 = h^0 \rho_g^1$ gäller. Det är ekvivalent med $h^0 = (\rho_g^2)^{-1} h^0 \rho_g^1$. Vi testar:

$$(\rho_g^2)^{-1} h^0 \rho_g^1 = \frac{1}{O(G)} \sum_{g' \in G} (\rho_g^2)^{-1} (\rho_{g'}^2)^{-1} h \rho_{g'}^1 \rho_g^1 = \frac{1}{O(G)} \sum_{g' \in G} (\rho_{gg'}^2)^{-1} h \rho_{gg'}^1 = h^0.$$

Eftersom h^0 visat sig vara en linjär avbildning som uppfyller $\rho_g^2 h^0 = h^0 \rho_g^1$ kan vi tillämpa Schurs lemma: vi ser genom fall 1. i lemmat direkt att $h^0 = 0$, vilket ger oss 1. ovan. Fall 2. i lemmat ger oss $h^0 = \lambda I_n$. Vi undersöker vad spåret av h^0 är på två vis:

$$\text{Tr } h^0 = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \text{Tr}((\rho_g^1)^{-1} h \rho_g^1) = \sum_{g \in G} \text{Tr}((\rho_g^1)^{-1} \rho_g^1 h) = \frac{1}{O(G)} O(G) \text{Tr } h = \text{Tr } h.$$

Dessutom är $\text{Tr } h^0 = \text{Tr}(\lambda I_n) = n\lambda$, vilket ger $\lambda = \frac{\text{Tr } h^0}{n} = \frac{\text{Tr } h}{n}$. □

Korollarium A.2.16. Denna följsats bygger på att vi ser ρ^1 och ρ^2 som matriser: $\rho_g^1 = (r_{i_1 j_1}(g))$, $\rho_g^2 = (r_{i_2 j_2}(g))$. På liknande sätt definierar vi $h = (x_{i_2 i_1})$ och $h^0 = (x_{i_2 i_1}^0)$. Om 1. gäller har vi

$$\frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} r_{i_2 j_2}(g^{-1}) r_{j_1 i_1}(g) = 0$$

för godtyckliga i_1, j_1, i_2, j_2 .

Bevis. Genom att överföra definitionen av h^0 till matrisformen $(x_{i_2 i_1}^0)$ erhåller vi

$$(x_{i_2 i_1}^0) = \sum_{j_1, j_2, g \in G} r_{i_2 j_2}(g^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(g).$$

Man ser att högerledet ovan är en linjär form. Eftersom dessa antingen är surjektiva över den aktuella talkroppen eller triviala (avbildar alla $x \in V_1$ på 0), har vi från 1. ovan att denna form försvinner för alla system av värden på $x_{j_2 j_1}$. Vi landar i denna följsats påstående. □

Korollarium A.2.17. Med samma beteckningar som ovan ger 2. att

$$\frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} r_{i_2 j_2}(g^{-1}) r_{j_1 i_1}(g) = \frac{1}{n} \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$$

där δ_{mn} är "Kroneckers delta" som är 1 då $m = n$ och 0 annars.

Bevis. I fall 2. har vi att $h^0 = \lambda I_n$ och således är $(x_{i_2 i_1}^0)$ på formen $x_{i_2 i_1}^0 \delta_{i_2 i_1}$. Dessutom är $\lambda = \frac{1}{n} \text{Tr } h = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_2 j_1} x_{j_2 j_1}$. Vi har nu två uttryck för $(x_{i_2 i_1}^0)$ vilka ger likheten

$$\sum_{j_1, j_2, g \in G} r_{i_2 j_2}(g^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(g) = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_2} \delta_{j_2 j_1} \delta_{i_2 i_1} x_{j_2 j_1}.$$

Vi kan förkorta med $x_{j_2 j_1}$ i båda summuttrycken och högerledet är nollskilt endast för den term där $j_2 = j_1$. Vi erhåller $1/O(G) \sum_{g \in G} r_{i_2 j_2}(g^{-1}) r_{j_1 i_1}(g) = (1/n) \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}$ vilket är påståendet i denna följsats. $\square$

A.2.7 Karaktärer och ortogonalitetsrelationer

Härnäst utforskar vi en del av representationsteorin som är av stor vikt för sökandet och finndandet av representationer samt tillämpandet av dessa. Vi börjar med en anmärkning om det senaste styckena.

Definition A.2.18. Vi börjar med att definiera en operation som kommer att vara till hjälp lite senare. Låt ϕ och ψ vara funktioner från $G \rightarrow \mathbb{C}$. Definiera $\langle \phi, \psi \rangle$ genom formeln

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \psi(g) = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \psi(g^{-1}).$$

Man ser att då gäller $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$. Eftersom $\langle \phi, \psi \rangle$ dessutom är linjär i ψ och ϕ har vi definierat en skalärprodukt. Med matrisnotation kan vi nu skriva de två senaste korollarierna som

1. $\langle r_{i_1 j_1}, r_{i_2 j_2} \rangle = 0$ för fall 1.
2. $\langle r_{i_1 j_1}, r_{i_2 j_2} \rangle = \frac{1}{n} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}$ för fall 2.

Efter definitionen undertill slår vi fast vår första ortogonalitetsrelation.

Definition A.2.19. Låt ϕ och ψ vara funktioner från $G \rightarrow \mathbb{C}$. Vi definierar en skalärprodukt genom

$$(\phi | \psi) = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \psi(g)^*.$$

Att detta verkligen är en skalärprodukt ser man genom att den är linjär i ϕ och semilinjär i ψ samt att $(\phi | \phi) > 0$ om $\phi(g) \neq 0$ för alla $g \in G$. Linjäriteten och semilinjäriteten kan testas genom definitionen. Att $(\phi | \phi) > 0$ har vi genom att produkten av ett komplext tal $a + bi$ och dess konjugat $a - bi$ är $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 > 0$.

Låt $\tilde{\psi}$ vara funktionen som ges av $\tilde{\psi}(g) = \psi(g^{-1})^*$. Vi har då att $\psi(g)^* = \tilde{\psi}(g^{-1})$. Detta ger oss ett samband mellan $(\phi | \psi)$ och $\langle \phi, \psi \rangle$:

$$(\phi | \psi) = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \psi(g)^* = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \tilde{\psi}(g^{-1}) = \langle \phi, \tilde{\psi} \rangle.$$

Konstruktionerna $(\phi | \psi)$ och $\langle \phi, \psi \rangle$ har en användbar egenskap. Om vi låter ψ vara en karaktärsfunktion till G vet vi ju att $\psi(g^{-1}) = \psi(g)^*$, vilket medför $\psi(g^{-1})^* = \tilde{\psi}(g) = \psi(g)$. Denna egenskap medför i sin tur att om ψ är en karaktärsfunktion till G har vi $(\phi | \psi) = \langle \phi, \psi \rangle$.

Kommentar A.2.20. Vi låter matriserna $(r_{ij}(t))$ vara unitära så att $r_{ij}(t^{-1}) = r_{ji}(t)^*$, vilket vi alltid kan göra enligt vad som sagts tidigare. Nu är korollarierna ovan en ortogonalitetsrelation för skalärprodukten $(\phi | \psi)$.

Sats A.2.21. De irreducibla karaktärsfunktionerna utgör ett ortonormerat system dvs.

1. Låt χ vara en karaktärsfunktion som hör till en irreducibel representation. Då är $(\chi | \chi) = 1$. Vi säger att karaktärsfunktionerna är "normerade".
2. Låt χ_1 och χ_2 vara karaktärsfunktioner som hör till varsin av två icke-isomorfa irreducibla representationer av samma grupp. Då är $(\chi_1 | \chi_2) = 0$ vilket innebär att de är ortogonala.

Bevis. Vi börjar med att visa 1. Låt χ_1 respektive χ_2 höra till representationerna ρ respektive ϕ och låt representationernas matrisdualer vara $(r_{ij}(g))$ respektive $(p_{ij}(g))$. Eftersom $\chi_1(g) = \sum_i r_{ii}(g)$ har vi

$$(\chi_1 | \chi_1) = \langle \chi_1, \chi_1 \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

Vi tillämpar matrisomskrivningen av fall 2. i korollarium A.2.17 ovan. Eftersom vi här har att $i = i_1 = j_1$ och $j = i_2 = j_2$ erhålles: $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = \delta_{ij}/n$, där n är graden av ρ . Detta ger oss

$$(\chi_1 | \chi_1) = \frac{\left(\sum_{i,j} \delta_{ij} \right)}{n} = \frac{n}{n}$$

vilket är självklart eftersom $i = j$ vid n tillfällen (i, j antar vardera n värden). Man kan se 2. direkt genom att tillämpa matrisomskrivningen av fall 1. i korollariet ovan. $\square$

Sats A.2.22. Låt V vara en linjär representation av G med karaktärsfunktionen ψ . Låt också utgöras av den direkta summan av irreducibla representationer genom $V = \bigoplus_{i=1}^k W_i$. Låt varje W_i innehå en karaktärsfunktion χ_i . Om W också är en irreducibel representation till G , med karaktärsfunktionen χ , har vi att antalet W_i som är isomorfa med W ges av resultatet av skalärprodukten $(\psi | \chi)$.

Bevis. Man ser detta genom att tillämpa en tidigare sats som säger oss att en reducibel karaktär är summan av irreducibla karaktärer. Denna ger att $\psi = \sum_{i=1}^k \chi_i$ vilket medför att $(\psi | \chi) = \sum_{i=1}^k (\chi_i | \chi)$. Eftersom termerna i summan är 1 om representationerna är isomorfa och 0 annars, har vi påståendet i satsen klart. $\square$

Korollarium A.2.23. Antalet gånger som W förekommer i V , upp till isomorfi, är oberoende av vår framställning av V som en direkt summa.

Bevis. Man ser detta eftersom $(\psi | \chi) = \sum_{i=1}^k (\chi_i | \chi)$ är oberoende av vår framställning av V . När vi itererar över summan kommer givetvis inte ordningen i vilken de irreducibla representationerna dyker upp att spela någon roll. $\square$

Nästa följsats är ett mycket viktigt resultat:

Korollarium A.2.24. Två representationer har samma karaktär om och endast om de är isomorfa.

Bevis. Korollariet ovan indikerar att vi i mångt och mycket kan studera representationer endast genom att betrakta deras karaktärer. Vi kan nu använda karaktärer för att identifiera isomorfa representationer och för att kunna avgöra när vi funnit en distinkt representation. $\square$

Sats A.2.25. Låt χ vara karaktären till en representation i ett representationsrum V . Då är $(\chi | \chi)$ ett positivt heltal. Dessutom är $(\chi | \chi) = 1$ om och endast om V är irreducibel.

Bevis. Låt $\chi_1, \dots, \chi_h$ vara samtliga karaktärer som hör till irreducibla ickeisomorfa representationer av G , vilka i sin tur hör till representationsrummen $W_1, \dots, W_h$. Då är V isomorf med den direkta summan

$$V = \bigoplus_{i=1}^h m_i W_i$$

där m_i är heltal som anger hur många gånger W_i förekommer i V . Om någon av våra W_i inte förkommer i V är motsvarande $m_i = 0$. Om vi låter W_i ha karaktären χ_i för

$i = 1, \dots, h$ har vi att $\chi = \sum_{i=1}^h m_i \chi_i$. Det innebär att $(\chi \mid \chi_i) = m_i$ (se kommentar nedan). Detta ger tillsammans med ortogonalitetsrelationerna för våra χ_i att

$$(\chi \mid \chi) = \sum_{i=1}^h m_i^2.$$

Vi har att $(\chi \mid \chi) = 1$ om och endast om $m_i = 1$ för precis ett i och $m_i = 0$ för resterande värden på i . Då är V isomorf med endast en av alla h irreducibla representationer och är därmed själv irreducibel. Detta visar satsen. $\square$

Kommentar A.2.26. Ett viktigt resultat framkom i beviset av satsen ovan. Om $V = \oplus_{i=1}^h m_i W_i$ är en representation av G så är

$$m_i = (\chi \mid \chi_i) = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi_i(g)^*,$$

Denna formel är mycket användbar när man vill reducera en funnen representation till en direkt summa av irreducibla representationer. Formeln kallas följaktligen *reduktionsformeln*.

Vi kan se att det stämmer på följande sätt: Eftersom $\chi = \sum_{i=1}^h m_i \chi_i$ innebär det att $(\chi \mid \chi_i) = (m_1 \chi_1 + \dots + m_i \chi_i + \dots + m_h \chi_h \mid \chi_i)$. Skalarproduktens linjäritet ger att det är lika med $(m_1 \chi_1 \mid \chi_i) + \dots + (m_i \chi_i \mid \chi_i) + \dots + (m_h \chi_h \mid \chi_i)$. Ortogonalitetsrelationerna ger att detta kan beräknas till $0 + \dots + m_i \cdot 1 + \dots + 0$. Sammantaget har vi nu att $m_i = (\chi \mid \chi_i)$.

A.2.8 Att finna antalet irreducibla representationer

Det här är det sista avsnittet som behandlar karaktärer. Vi kommer att börja med en del definitioner som behövs till bevisen för kommande satser.

Definition A.2.27. Låt G vara en grupp. Två element $g, h \in G$ tillhör samma *konjugatklass* om $g = khk^{-1}$ för något $k \in G$. En konjugatklass till G är en mängd $\{g \in G : g = khk^{-1}, k \in G\}$ för varje $h \in G$.

Sats A.2.28. 1. relationen mellan två element g, h i samma ekvivalensklass är en ekvivalensrelation, som vi skriver $g \sim h$,

2. identitetselementet är alltid ensamt i en egen konjugatklass,

3. i en Abelsk grupp består varje konjugatklass av ett enda element.

Bevis. Vi kan se 1. genom att undersöka de tre kriterierna som skall vara uppfyllda för en ekvivalensrelation. Relationen är *symmetrisk* ty $g \sim h$ innebär $g = khk^{-1}$ vilket ger

$h = k^{-1}gk$ för $k \in G$. Men k^{-1} är ju bara något $m \in G$, så vi har $h = mgm^{-1}$, vilket innebär att $h \sim g$ är konjugerat med k . Relationen är *reflexiv* ty för alla $g \in G$ så är $g \sim g$, vilket kan visas genom att vi ser att $g = IgI^{-1}$. Relationen är även *transitiv* ty om $g \sim h$ och $h \sim k$ så är $g \sim k$. Det kan visas genom att $g = aha^{-1}$ och $h = bkb^{-1}$ om de två första förutsättningarna i förra meningen antages. Men då är $g = abkb^{-1}a^{-1} = (ab)k(ab)^{-1} = ckc^{-1}$ för $c \in G$ och vi ser att $g \sim k$.

För att se 2. undersöker vi vilka element som ligger i samma konjugatklass som I . Vi har $I = khk^{-1}$ från vilket vi erhåller $h = k^{-1}Ik = I$. Således är I endast konjugerat med sig självt.

Vi visar 3. genom att undersöka $g = khk^{-1}$, vilket för en Abelsk grupp ger $g = hkk^{-1} = h$. Om två element i en Abelsk grupp är konjugerade är de samma element. $\square$

Definition A.2.29. Låt G vara en grupp och låt f vara en funktion $G \rightarrow \mathbb{C}$. Om $f(khk^{-1}) = f(h)$ för alla $h, k \in G$ kallas f för en *klassfunktion* över G .

Sats A.2.30. Låt $\rho : G \rightarrow GL(V)$ vara en linjär representation av G och låt f vara en klassfunktion över G . Låt $\rho_f : V \rightarrow V$ vara den linjära avbildningen

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g)\rho_g.$$

Om V är av grad n och irreducibel samt om representationen har karaktärsfunktionen χ så ges ρ_f av en skalärmultipel av identitetsavbildningen λI där

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) = \frac{O(G)}{n} (f | \chi^*).$$

Bevis. Vi ser alltså att det går att relatera λ till vår skalärprodukt som vi definierat tidigare. För att visa satsen ovan vill vi visa att ρ_f kommuterar med ρ_g för alla $g \in G$. Då kan vi tillämpa Schurs lemma. Vi undersöker således $\rho_g^{-1}\rho_f\rho_g$:

$$\rho_g^{-1}\rho_f\rho_g = \sum_{h \in G} f(h)\rho_g^{-1}\rho_h\rho_g = \sum_{h \in G} f(h)\rho_{g^{-1}hg}$$

Nu kan vi utnyttja att f är en klassfunktion. Vi sätter $k = g^{-1}hg$ och erhåller då från uttrycket ovan:

$$\sum_{h \in G} f(h)\rho_{g^{-1}hg} = \sum_{k \in G} f(gkg^{-1})\rho_k = \sum_{k \in G} f(k)\rho_k = \rho_f.$$

Slutsatsen är att $\rho_g^{-1}\rho_f\rho_g = \rho_f$ vilket betyder att ρ_f kommuterar med ρ_g för alla $g \in G$. Vi tillämpar Schurs lemma och erhåller $\rho_f = \lambda I$. Som bekant är $\text{Tr } \lambda I = n\lambda$. Vi har också

att $\text{Tr } \rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \text{Tr } \rho_g = \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$. Vi minns tillbaka till vår skalärprodukt som var definierad genom $(\phi | \psi) = \frac{1}{O(G)} \sum_{g \in G} \phi(g) \psi(g)^*$ där ϕ, ψ är funktioner från G till $\mathbb{C}$ (liksom våra karaktärsfunktioner). Detta ger oss likheten $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g) \chi(g) = \frac{O(G)}{n} (f | \chi^*)$ som slutför beviset. $\square$

Kommentar A.2.31. Inför nästa sats är det bra att introducera ett speciellt vektorrum. Detta, som vi kallar H utgörs av mängden av alla klassfunktioner på en grupp G . Det är enkelt att verifiera att detta verkligen är ett vektorrum. Karaktärsfunktionerna till de irreducibla representationerna av G är element i H .

Sats A.2.32. Låt karaktärsfunktionerna $\chi_1, \dots, \chi_h$ höra till de irreducibla representationerna av en ändlig grupp G . Då utgör karaktärsfunktionerna en ortonormal bas i det vektorrum som består av alla klassfunktioner över G . Detta vektorrum kallas H .

Definition A.2.33. Inför beviset av satsen ovan behöver vi veta vad den *reguljära representationen* av en ändlig grupp G är. Låt V vara ett vektorrum för vilket $\dim V = O(G)$. Vi kan då låta en bas i V indexeras av elementen i G ; vi skriver då en bas i V som $(e_g)_{g \in G}$. För varje $g \in G$ existerar en linjär avbildning ρ_g med följande egenskaper:

$$\begin{aligned} \rho_g : V &\rightarrow V \\ e_h &\mapsto \rho_g e_h = e_{gh} \quad \text{för alla } h \in G. \end{aligned}$$

Detta är den reguljära representationen. Vi ser att den reguljära representationen permuterar basvektorer.

Bevis. Nu kan vi bevisa sats A.2.32 ovan. Vi har dock redan tillräckligt på fötterna för att veta att våra χ_i utgör ett ortonormerat system, genom en sats ovan. Men för att de ska utgöra en *bas* i H är det nödvändigt att vi visar att de *genererar* H . Ett sätt att visa detta på är att göra klart för oss att för varje $f \in H$ som är ortogonalt mot alla χ_i^* , dvs. $(f, \chi_i^*) = 0$, är $f = 0$. Det innebär att vi börjar med att ta $f \in H$ som är ortogonalt mot alla χ_i^* . Vi återanvänder också definitionen av ρ_f från förra satsen där ρ är en irreducibel representation och χ dess karaktär. Det finns då ett ρ_f för varje irreducibel representation. Satsen ovan säger att

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho_g = \frac{O(G)}{n} (f | \chi^*) I = \lambda I.$$

Eftersom vi valde f ortogonal mot våra χ_i^* ger satsen ovan och Schurs lemma oss att $\rho_f = 0$ så länge ρ är irreducibel. Men varje representation är en direkt summa av irreducibla representationer, så $\rho_f = 0$ även för reducibla ρ .

Vi tillämpar nu detta på den reguljära representationen av G . En koll av bilden av en basvektor e_I under ρ_f visar

$$\rho_f e_I = \sum_{g \in G} f(g) \rho_g e_I = \sum_{g \in G} f(g) e_g$$

eftersom I är identitetselement i G . Men vi vet ju också att $\rho_f = 0$, så därför har vi $\rho_f e_I = 0$. Enligt formeln ovan kan detta bara inträffa när $f(g) = 0$ för alla $g \in G$, ty basvektorerna $\{e_g\}_{g \in G}$ är linjärt oberoende. Beviset är klart. $\square$

Sats A.2.34. *Om n är antalet konjugatklasser i G finns det precis n distinkta (upp till isomorfi) representationer av G .*

Bevis. Detta bevis ger sig nästan av sig självt. Antag att det finns k distinkta konjugatklasser i G , och låt dessa utgöras av mängderna C_i . Om f är en klassfunktion är den konstant över våra C_i (minns att konjugerade element har samma bild under f). Därmed är funktionen definierad genom de värden λ_i som den antar över våra C_i . Det spelar ingen roll vilka värden vi låter f anta över C_i , de kan väljas godtyckligt. Därmed är $\dim H = k$. Men enligt vår förra sats är $\dim H$ lika med antalet irreducibla representationer eftersom de irreducibla representationernas karaktärsfunktioner är en bas för H . Härmed är satsen bevisad. $\square$

A.3 Om symmetrier

A.3.1 Inledning

I detta avsnitt kommer symmetrier till slut att diskuteras. Detta avsnitt inleds med en definition av symmetribegreppet från ett gruppteoretiskt perspektiv, i vilket man identifierar symmetriska objekt med en unik symmetrigrupp. Sedan fortsätter vi med att diskutera en symmetrigrupps beståndsdelar, vilka betraktas som en mängd av symmetrioperationer. Redan nu bör det sägas att det finns ett antal konventioner kring notationen av sådana grupper och symmetrioperationer, och att den notation som är förhärskande här är den som brukas i litteratur som handlar om tillämpningar av symmetrier på problem inom kemin och fysiken. Notationen kallas "Schönflies notation".³ Anledningen till att den brukas här, är helt enkelt att tillämpningarna som finns senare i rapporten är av den karaktären. Det faller sig således naturligt att använda passande beteckningar.

³E. A. Guggenheim/J. E. Mayer/F. C. Tompkins: The International Encyclopedia of Physical Chemistry and Chemical Physics, London 1963, s. 59.

A.3.2 Symmetrielement och -operationer

Vi definierar här vad en symmetri är. Symmetrielementen och -operationernas definition följer sedan naturligt.

Definition A.3.1. Låt $X \subset \mathbb{R}^n$. Om X innehar en symmetri menar vi att det existerar en bijektiv funktion $f : X \rightarrow X$ som bevarar avstånden mellan alla par av punkter $x \in X$. Symmetrin f uppfyller $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ för alla $x, y \in X$.⁴ Metriken $\|x - y\|$ är definierad som vanligt,

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

där x_i respektive y_i är den i :te komponenten i x respektive y . Man säger att f är en symmetri på X .

Kommentar A.3.2. Vi försöker tolka definitionen ovan när $X \subset \mathbb{R}^n$ är begränsad till en dimension $n \leq 3$. Det gör det lättare för oss att ge en geometrisk tolkning: vi kan nu se X som ett *symmetriskt* geometriskt objekt i rummet eller planet. En symmetri f på vårt objekt X blir helt enkelt en operation som avbildar X på en identisk bild av sig själv.

Exempel A.3.3. Det kan vara läge att exemplifiera det vi fastslagit ovan. Tag $X \subset \mathbb{R}^2$ till att vara en regelbunden triangel i planet. Det går genom att beakta definitionen av en symmetri att fastslå faktumet att ett hörn i triangeln måste avbildas på ett annat hörn i triangeln. Alla symmetrier på triangeln kommer då att vara givna av permutationer av dess hörn. Vi har tre cykliska permutationer som byter plats på alla hörn - dessa kallas för *rotationer*. Den minsta rotationen är generator för de övriga. Vi har också tre symmetrier som byter plats alla hörn utom ett vilket lämnas invariant - dessa kallas för *speglingar*. Detta är de två huvudklasserna av symmetrier. En berättigad fråga är om vi nu har funnit alla symmetrier på X . Vi kan resonera såhär: eftersom symmetrierna på X utgörs av permutationerna av dess hörn, finns det totalt $3! = 6$ kombinationer av hörn. Vi har funnit 6 symmetrier, och därmed uttömt alla möjligheter.

Sats A.3.4. *Mängden av alla symmetrier på $X \subset \mathbb{R}^n$ tillsammans med operatorn funktionssammansättning, $\circ$, utgör en grupp.*

Låt F_X vara mängden av alla symmetrier på X . Vi verifierar först att operatorn $\circ$ verkligen är en funktion

$$\circ : F_X \times F_X \rightarrow F_X,$$

⁴William A. Adkins/Steven H. Weintraub: Algebra. An Approach via Module Theory, New York 1993, s. 33.

dvs. att sammansättningen $g \circ f$, där $f, g \in F_X$, också är en symmetri på X . Det är klart att sammansättningen av funktioner från X till sig självt är en ny funktion från X till sig självt; detta har vi genom definitionen av funktionssammansättning. Att sammansättningen är en ny *symmetri*, däremot, kan vi argumentera för genom tänka oss att vi utför en symmetri f på X . Avstånden bevaras då. Vi utför sedan en ny symmetri g på X , och avstånden bevaras då återigen ty g är ju en symmetri. Således är sammansättningen av symmetrier också en symmetri, och vi kan låta $\circ$ vara gruppoperator.

Vi verifierar nu att gruppaxiomen håller.

1. *Identitet.* Identitetsfunktionen Id_X på X uppfyller $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_X \circ f = f$ för alla $f \in F_X$. Den är dessutom en symmetri, eftersom den avbildar varje punkt på sig själv och därmed bevarar avstånden.
2. *Invers.* Eftersom symmetrierna på X är bijektiva, är det klart att varje $f \in F_X$ har en invers. Denna invers är också en symmetri. Inversen till en funktion som bevarar avstånden i X bevarar också avstånden i X , ty inversen återför ju, för varje $x \in X$, bilden av x under f tillbaka till x , dvs.

$$f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x.$$

Så för f^{-1} gäller också att $\|x - y\| = \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|$ för alla $x, y \in X$. Därför är även f^{-1} en symmetri. Det existerar således en invers $f^{-1} \in F_X$ till f sådan att $f \circ f^{-1} = \text{Id}_X$ och $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$.

3. *Associativitet.* Funktionssammansättning är alltid associativ.

Således är $\langle F_X, \circ \rangle$ en grupp.

Definition A.3.5. Vi kan ge en formell beskrivning av en spegelooperation respektive en rotation. Låt $X \subset \mathbb{R}^3$ vara vårt symmetriska objekt och låt f vara en symmetri på X . Först definieras *spegelooperationen*. Om ett plan fixeras punktvis av f så kallas f för en spegling. Nu definieras *rotationer*. Om en axel i X fixeras av f och alla andra punkter förflyttas på cirklar som ligger i parallella plan vinkelräta mot axeln så kallas f för en rotation.

Kommentar A.3.6. Här beskrivs hur en spegling respektive en rotation går till. Vi börjar med att beskriva en spegling på X . Låt $p \in X$ vara en punkt på avståndet d från spegelplanet S och låt l vara den linje som är vinkelrät mot S och innehåller p . Att spegla X i S är att göra följande med alla $p \in X$: Om $d = 0$ så ligger p i S och avbildas på sig själv. Annars avbildas p på den punkt som ligger på l med avståndet $2d$ från p och är på andra sidan S .

Här beskrivs en rotation på X . Låt $p \in X$. Låt Z vara den axel som fixeras av f och låt C vara den cirkel i ett plan vinkelrät mot Z , med centerpunkten $p^0 \in Z$, vars rand innehåller p . Att rotera p med $\theta = 2\pi/n$ kring Z innebär att avbilda p på punkten $q = (p_x \cos \theta, p_y \sin \theta, q_z)$, där p_x, p_y, q_z är respektive punkts x -, y - och z -koordinat i ett koordinatsystem där p^0 är origo. Att utföra rotationen på hela X är att utföra rotationen för alla $p \in X$.

Definition A.3.7. Ett symmetrielement är ett geometriskt objekt, ett plan eller en axel, kring vilken symmetrioperationerna på $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \leq 3$, utförs.⁵ Axlar definierar rotationer och plan definierar speglingar. Vi kallar dessa *rotationsaxlar* respektive *spegelplan*.

Triangeln i exemplet ovan har en rotationsaxel. Om vi låter triangeln ligga i xy -planet med mittpunkten centrerad i origo så utgörs rotationsaxeln av z -axeln. Kring axeln kan vi rotera med vinkeln $2\pi/3$, $2 \cdot 2\pi/3$ och $3 \cdot 2\pi/3 = 2\pi$. Detta är symmetrier på triangeln enligt vad som sagts ovan, och alla punkter förflyttas i enlighet med vår definition av en rotation. En rotationsaxel innehåller den punkt som fixeras av rotationen och axeln är vinkelrät mot punkternas cirkulära rörelser. Triangeln har också tre spegelplan som var och ett genomkorsar ett av triangelns tre hörn och skär motsatta sidan i två lika delar samt innehåller z -axeln. Ett spegelplan är det plan som fixeras av någon symmetri.

Definition A.3.8. Ordningen av en ändlig axel är n om dess minsta rotation kan skrivas på formen $2\pi/n$, $0 < n < \infty$, dvs. ordningen på det element som genererar rotationerna.

Vi kan tänka på en axels ordning som det minsta antal gånger man måste upprepa den minsta rotationen för att återföra X till sin originalkonfiguration. I exemplet med triangeln ovan är rotationsaxeln av ordning 3. Det är överflödigt att tala om ett spegelplans ordning, ty varje spegling har ordning 2.

Definition A.3.9. En *huvudaxel* är en rotationsaxel som har störst ordning.

Det är behändigt att kunna tala om en huvudaxel, eftersom många symmetriska objekt har symmetrirotationer kring fler än en axel. Dessutom namnges speglingar efter huvudaxeln, vilket går igenom nedan.

Definition A.3.10. Här listas alla klasser av symmetrielement och en namnkonvention etableras.

⁵Raman: [Group Theory and Its Applications to Chemistry](#) (se not 5, s. 10).

Symmetrielement	Beteckning	Förklaring
Egentlig rotationsaxel	C_n	Rotationer kring axeln av grad $2\pi/n$.
Spegelplan	σ	Reflektioner i planet.
Oegentlig rotationsaxel	S_n	Oegentliga rotationer med $2\pi/n$.
Center för inversion	i	En punkt kring vilken X inverteras.

Vi etablerar också en konvention för namngivning av symmetrioperationer som beror av symmetrielementen ovan.

Symmetrielement	Symmetrioperation
C_n	c_n^k
σ	σ_v, σ_h
S_n	s_n^k
i	i

De två huvudsakliga symmetrioperationerna har redan diskuterats. De hittills okända symmetrioperationerna som listas i tabellen är egentligen sammansättningar av rotationer och speglingar.

Operationen c_n^k är en rotation med vinkeln $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ kring axeln C_n . En spegling σ_v innebär att spegelplanet innehåller huvudaxeln. Speglingen σ_h innebär att huvudaxeln är vinkelrät mot spegelplanet. En oegentlig rotation s_n^k kring en axel C_n är en rotation c_n^k kring den axeln följt av en spegling σ_h i ett plan vinkelrät mot C_n dvs. den sammansatta operationen $\sigma_h c_n^k$. En inversion i innebär att göra sammansättningen $\sigma_h c_2^1$ ty då inverteras alla punkter kring den punkt som fixeras av rotationen. Att utföra en inversersion kallas också att spegla i en punkt.

Sats A.3.11. *Mängden av alla rotationer på X kring samma axel utgör en delgrupp $C_X \subseteq F_X$.*

Det är tillräckligt att visa $ab^{-1} \in C_X$ för alla $a, b \in C_X$. Det är klart att inversen b^{-1} till en rotation b med $\theta = k \cdot 2\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, på en axel av ordning n är rotationen med vinkeln $2\pi - \theta$. Dessutom är det klart att sammansättningen av två rotationer, ab^{-1} säg, kring samma axel är en ny rotation kring samma axel. Därmed har vi att $ab^{-1} \in C_X$.

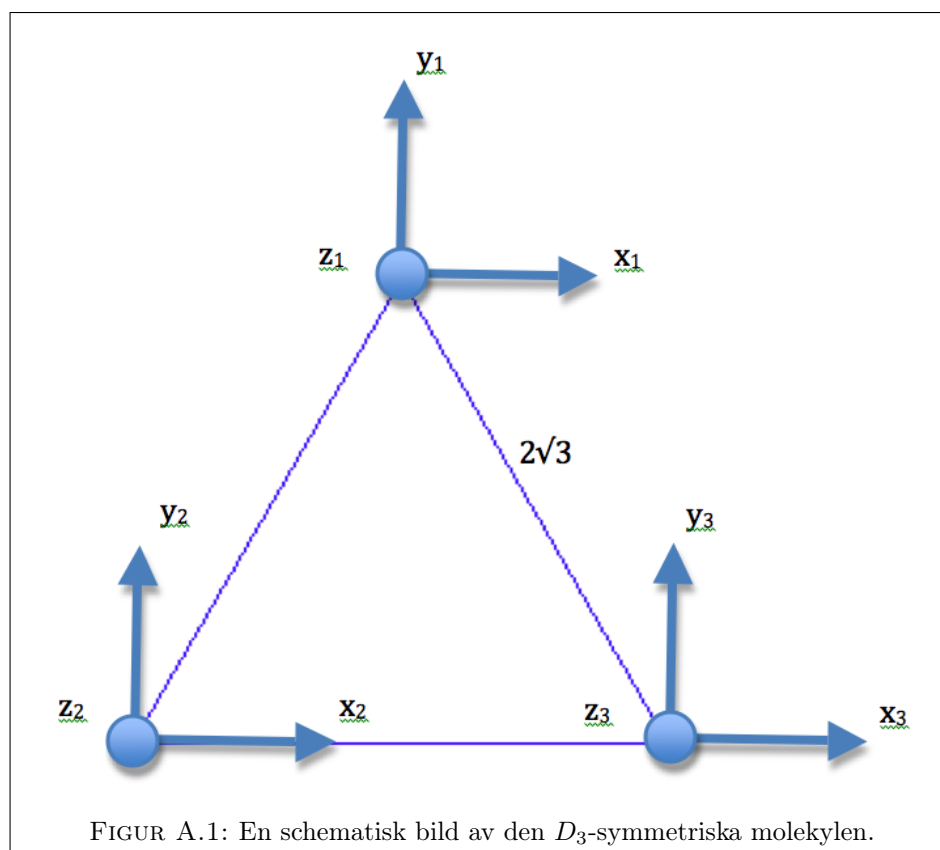
A.4 Vibrationer i en molekyl

Vi kommer här att tillämpa de kunskaper och resultat som tidigare har beskrivits i rapporten. Det finns många tillämpningar av molekylär symmetri inom kemin och fysiken;

principen om symmetri används exempelvis inom spektroskopi och reaktionsteknik. Jag har valt att demonstrera hur beräkningarna som krävs för att ta fram vibrationsfrekvenser i en molekyl avsevärt kan förenklas genom att använda dess symmetriegenskaper. Vi kommer till viss del följa de föreläsningar som hölls av Olle Stormark under HT 2008 i kursen SF2718 "Matematik för kemister" på KTH.

A.4.1 Definitioner

Vi kommer att utföra exemplet på vibrationerna mellan atomerna i en molekyl som är D_3 -symmetrisk. Symmetrigruppen D_3 är den liksidiga triangelns symmetrigrupp. Molekylen kommer att åskådliggöras genom tre atomer som är utplacerade i en liksidig triangel. En schematisk bild av vår triangulära molekyl kan åskådas i figur A.1. Genom mittpunkten av triangeln och vinkelrätt mot triangelns plan går en C_3 -axel. Vinkelrätt mot mittpunkten i varje sida går en C_2 -axel. Vi låter hörnen av triangeln utgöras av



atomernas jämviktslägen. Vi antar vidare att fjäderkonstanten k för vibrationerna mellan atomerna är konstant och samma för alla tre väteatomerna. För att förenkla för oss väljer vi en lämplig längdenhet, där sidorna på triangeln är $2\sqrt{3}$. Om D_{ij} är avståndet mellan atomerna i och j så kan vi beskriva avståndet mellan dem med formeln $D_{ij} = 2\sqrt{3} + \Delta D_{ij}$.

Varje fri molekyl har $3n$ frihetsgrader, där n är antalet atomer i molekylen. Det innebär att varje atom i en molekyl måste tilldelas tre tal, x_i , y_i och z_i , där i är atomens index, för att vi ska kunna beskriva dess rörelser i $\mathbb{R}^3$. Om vi använder Hookes lag och Newtons kraftlag,

$$F = -kx \quad (\text{Hookes lag}),$$

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{Newtons kraftlag}),$$

är det möjligt att visa följande uttryck för den potentiella energin V och rörelseenergin T i en molekyl som består av n atomer:

$$2T = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dz_n}{dt} \right) \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{3n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$2V = \sum_{i,j} k_{i,j} \Delta D_{i,j}^2 = (x_1, \dots, z_n) K \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Vi kallar mass-matrisen för M och fjäderkonstantmatrisen för K . De är av storlek $3n \times 3n$. I M hör de tre första massorna till första atomen och är därmed lika, de tre kommande hör till atom två och är således lika, och så vidare. I vårt exempel är alla atomer lika och därmed behöver vi bara en massa, m . Läget för matrisen A är något annorlunda. Konstanten $k_{i,j}$ är fjäderkonstanten som är lika mellan de tre atomerna, varför vi kan beteckna den k och kan lösa ut den ur matrisen.

Vi kan från projektionen approximativt beräkna ΔD_{ij} genom att utnyttja $D_{ij} = 2\sqrt{3} + \Delta D_{ij}$. För exempelvis D_{12} gäller:

$$D_{12} = \sqrt{(x_1 + \sqrt{3} - x_2)^2 + (2 + y_1 + 1 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2) + h$$

där h är högre ordningens termer, vilka vi försummar. Vi identifierar ΔD_{12} med $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2)$. Vi genomför beräkningarna för D_{13} och D_{23} och erhåller

$$\Delta D_{13} = -\frac{1}{2}(x_1 - x_3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_3) \text{ och } \Delta D_{23} = -(x_2 - x_3).$$

Potentialen V kan då skrivas

$$\begin{aligned}
 2V &= \sum_{i,j} k_{i,j} \Delta D_{i,j}^2 = \\
 &= k \left(\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2) \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}(x_1 - x_3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_3) \right)^2 + (x_2 - x_3)^2 \right) = \\
 &= (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3) K (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3)^T
 \end{aligned}$$

med matrisen K given av

$$K = \frac{k}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -4 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & \sqrt{3} & 0 - \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 6 & -3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En sådan matris kan som synes bli mycket stor och komplicerad. Det är med andra ord inte så muntert att vibrationsfrekvenserna fås ut genom rotdragning av lösningarna till den karaktäristiska ekvationen $\det(K - \lambda M) = 0$,⁶ eftersom det är mycket svårt att utan numeriska verktyg lösa en polynomekvation av sådan hög grad. Det finns däremot en genväg öppen. Med hjälp av den symmetrigrupp som molekylen eventuellt tillhör, kan K och M faktiskt *diagonaliseras*, vilket avsevärt förenklar lösandet av ekvationen. En diagonalisering kan genomföras genom att byta ut den bas som vektorerna ursprungligen är uttryckta i mot en symmetrianpassad normalsvägningsbas. Med andra ord genomförs basbytet

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_9 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_3 \end{pmatrix}$$

sådant att

$$\begin{aligned}
 B^T K B &= \text{diagonalmatris} \\
 \det(B^T K B - \lambda B^T M B) &= \det(K - \lambda M).
 \end{aligned}$$

⁶Wherret: [Group theory for atoms, molecules and solids](#) (se not 4, s. 10), s. 71-81.

Med hjälp av ett sådant byte kan man beräkna normalsvängningsfrekvenserna genom att lösa ekvationen

$$\det(B^T KB - \lambda B^T MB) = 0.$$

Det är betydligt mer beskedligt än att lösa det ickediagonaliserade fallet.

A.4.2 Representationer

Vi kommer nu att försöka finna en representation till molekylen som vi kan använda. Representationen tas fram genom att se verkan som gruppelmenten i D_3 har på våra vektorer. Dock behöver vi inte ta fram alla matrisdualer till representationerna, eftersom det egentligen är karaktärerna för gruppelmenten vi vill åt. En konjugatklassuppdelning av vår symmetrigrupp är $D_3 = \{I, 2c_3, 3c_2\}$, vilket innebär att den innehåller identitets-elementet, 2 trefaldiga rotationer samt 3 tvåfaldiga diton. Vi undersöker ett element per sort, och väljer c_3^1 som trefaldig rotation och som c_2 väljs den rotation som bestäms av rotationsaxeln som innehåller y_1 .

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3) &\xrightarrow{I} (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3) \\ (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3) &\xrightarrow{c_2^3} (-x_1, -x_3, -x_2, y_1, y_3, y_2, -z_1, -z_3, -z_2) \\ (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, z_3) &\xrightarrow{c_3^1} (-1/2x_2 + \sqrt{3}/2y_2, -1/2x_3 + \sqrt{3}/2y_3, -1/2x_1 + \sqrt{3}/2y_2, \\ &\quad -\sqrt{3}/2x_2 - 1/2y_1, -\sqrt{3}/2x_3 - 1/2y_3, -\sqrt{3}/2x_1 - 1/2y_1, z_2, z_3, z_1) \end{aligned}$$

Vi låter $\mathbf{D}$ vara den representation $D_3 \rightarrow \mathbb{R}^{9 \times 9}$ som beskrevs tidigare. Detta ger oss elementen i representationen (9×9 -matriser):

$$\mathbf{D}(I) = I_9, \quad \text{enhetsmatrisen av storlek 9,}$$

$$\mathbf{D}(c_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & & & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}(c_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & & & \\ -1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & & & \\ -\sqrt{3} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där de outskrivna elementen är 0.

A.4.3 Karaktärer

Vi låter χ vara vår karaktärsfunktion till representationen $\mathbf{D}$. Karaktärerna för ovanstående blir då:

$$\begin{aligned}\chi(I) &= 9 \\ \chi(c_2) &= -1 \\ \chi(c_3) &= 0.\end{aligned}$$

Från litteraturen kan vi använda en karaktärstabell för D_3 , se t.ex. [Wherret⁷](#). Vi använder den och lägger till en rad underst med karaktärerna för vår representation. Resultatet blir följande:

D_3	I	$3c_2$	$2c_3$	
A_1	1	1	1	
A_2	1	-1	1	
E	2	0	-1	
χ	9	-1	0	.

Vi kan behöva förklara tabellen. Den översta raden visar konjugatklasserna i D_3 , och hur många element det är i vardera klass. Den första kolumnen visar de *irreducibla* representationerna. Vi kan notera att A_1 är den triviala representationen. Den har dimension 1 ty $\chi_{A_1}(I) = 1$ och därmed avbildas alla element i D_3 på 1. Vidare kan vi notera att dimensionen av E är 2, ty $\chi_E(I) = 2$.

Vi tar nu reda på hur vår representation $\mathbf{D}$ är uppbyggd genom att bryta ned den i en direkt summa. Vi vet sedan tidigare att varje reducibel representation är isomorf med en direkt summa av de irreducibla representationerna. Vi har att

$$\mathbf{D} \cong m_1 A_1 \oplus m_2 A_2 \oplus m_3 E.$$

Från en tidigare sats vet vi att m_i :na är givna genom "reduktionsformeln":

$$m_i = (\chi \mid \chi_i),$$

där $\chi_1 = A_1$, $\chi_2 = A_2$ och $\chi_3 = E$. I det reella fallet, som här, blir formeln

$$m_i = \frac{1}{O(D_3)} \sum_{g \in G} \chi_i(g) \cdot \chi(g).$$

⁷Wherret: [Group theory for atoms, molecules and solids](#) (se not 4, s. 10), s. 304.

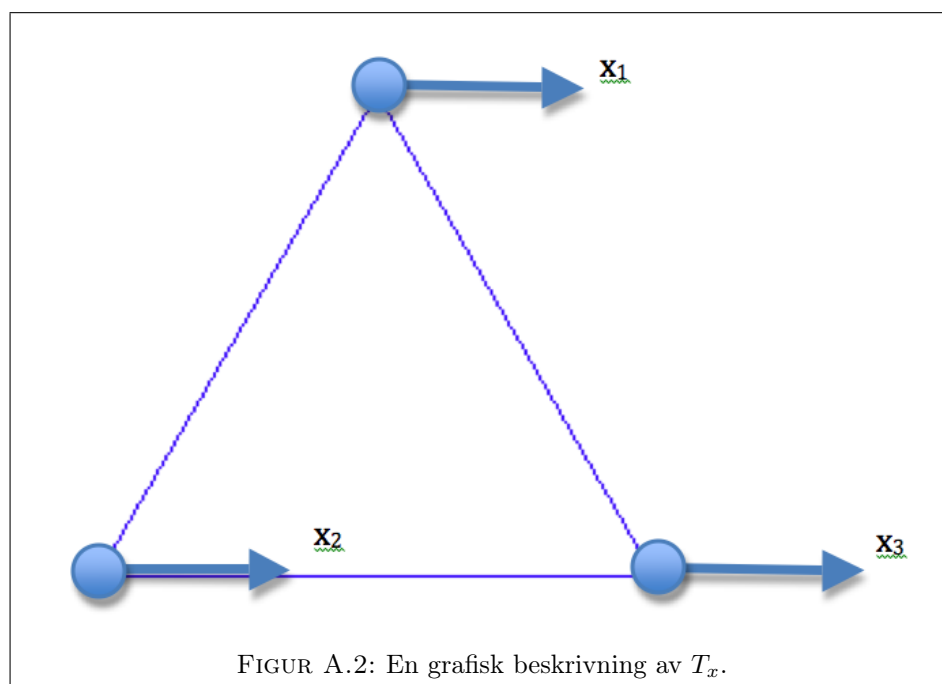
Vi beräknar nu våra m_i :n. Det enda vi behöver göra är att stoppa in karaktärerna från karaktärstabellen. Vi får:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0) = 1, \\ m_2 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 1 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 0) = 2, \\ m_3 &= \frac{1}{6}(1 \cdot 2 \cdot 9 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 0) = 3. \end{aligned}$$

En nedbrytning av vår representation $\mathbf{D}$ i en direkt summa är således

$$\mathbf{D} \cong A_1 \oplus 2A_2 \oplus 3E.$$

För att ta reda på vilken del av representationen som är translation, rotation respektive vibration (som vi är ute efter), så använder vi oss av de vektorer som definierar dessa typer av molekylär rörelse. En beskrivning av T_x visas i figur A.2. De andra translationerna definieras analogt. Vi har i translationsfallet:



$$\begin{aligned} T_x &= (x_1, x_2, x_3)^T, \\ T_y &= (y_1, y_2, y_3)^T \text{ och} \\ T_z &= (z_1, z_2, z_3)^T. \end{aligned}$$

Vi undersöker vad representationerna och karaktärerna för gruppelmenten är i representationen $\mathbf{D}^{trans}$, som står för translationerna.

$$\begin{aligned} I(T_x, T_y, T_z) &= (T_x, T_y, T_z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ c_2(T_x, T_y, T_z) &= (T_x, T_y, T_z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ c_3(T_x, T_y, T_z) &= (T_x, T_y, T_z) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proceduren kan behöva förklaras. Vi gör det genom att diskutera resultatet av $c_2(T_x, T_y, T_z)$. Det första elementet i matrisen, -1 , innebär att c_2 ger upphov till att translationen i x -led endast byter till motsatt riktning. Det andra elementet, 1 , innebär att translationen i y -led är oförändrad under verkan av c_2 . Det tredje elementet, -1 , talar om för oss att translationen i z -led endast byter till motsatt riktning under c_2 . Beräkningarna ovan ger oss följande element i representationen för translationen:

$$\mathbf{D}^{trans}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{trans}(c_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^{trans}(c_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den har karaktären

$$\chi^{trans}(I) = 3, \quad \chi^{trans}(c_2) = -1, \quad \chi^{trans}(c_3) = 0.$$

Vi tillämpar "reduktionsformeln" på samma vis som ovan. Antagandet är att $\mathbf{D}^{trans} \cong m_1 A_1 \oplus m_2 A_2 \oplus m_3 E$. Resultatet är $\mathbf{D}^{trans} \cong A_2 \oplus E$.

Nu gör vi samma sak för rotationsvektorerna. Det visar sig att

$$\chi^{rot}(I) = 3, \quad \chi^{rot}(c_2) = -1, \quad \chi^{rot}(c_3) = 0,$$

vilket är precis samma direkta summa som för translationen. Vi har således att $\mathbf{D}^{rot} \cong A_2 \oplus E$.

Eftersom nu $\mathbf{D} \cong \mathbf{D}^{trans} \oplus \mathbf{D}^{rot} \oplus \mathbf{D}^{vib} = A_1 \oplus 2A_2 \oplus 3E$ så är

$$\mathbf{D}^{vib} = A_1 \oplus E.$$

Vi får totalt 3 egenvärden som hör till vibrationerna, där A_1 bidrar med ett egenvärde eftersom den är 1-dimensionell och E bidrar med 2 egenvärden eftersom den är 2-dimensionell.

A.4.4 Basbyte till symmetrianpassad normalsvängningsbas

Vi vill finna en matris B som diagonaliserar K . Vi kan göra detta genom att ta fram en symmetrianpassad normalsvängningsbas för vår molekyl. Vi genomför då basbytet

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_9 \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

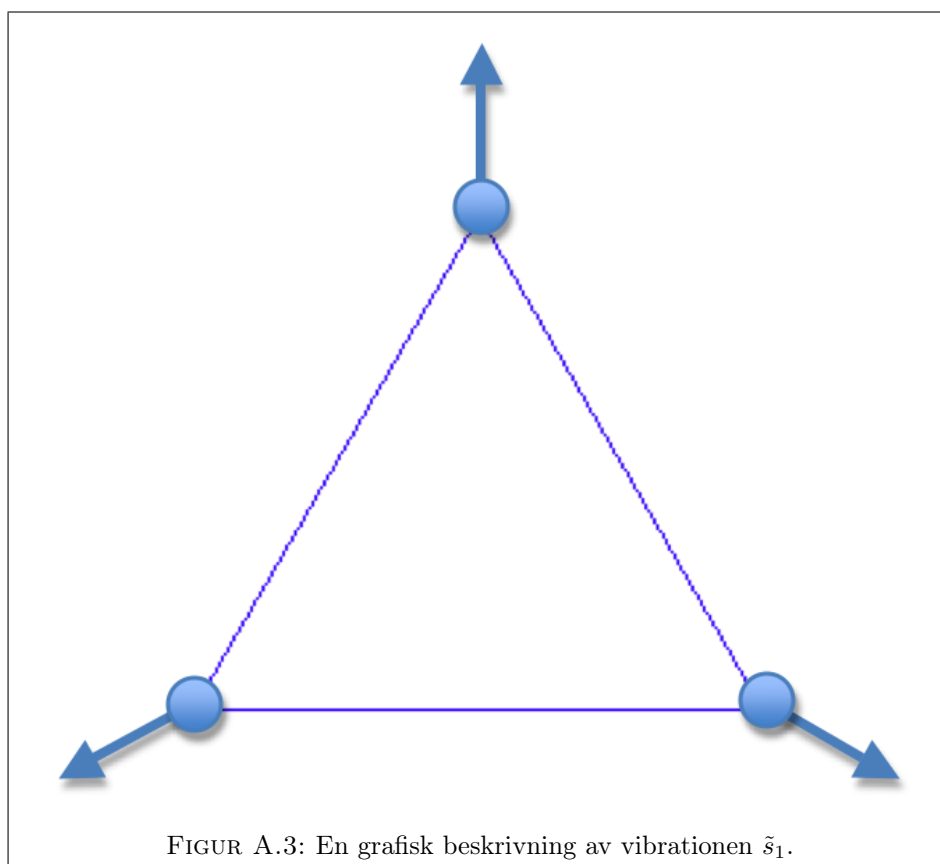
För en detaljerad beskrivning av hur de nya vektorerna i den symmetrianpassade normalsvängningsbasen tas fram hänvisas läsaren till Wherret⁸. Det är inte helt trivialt och proceduren låter sig inte förklaras inom ramen för denna uppsats. När dessa är framtagna kan vi tolka dem; de kommer att utgöra rotationer, vibrationer eller translationer. Här presenteras de nya baserna:

$$\begin{aligned} s_1 &= (y_1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3\right) \\ s_2 &= (x_1) + \left(-\frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right) + \left(-\frac{1}{2}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right) \\ s_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\ s_4 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_5 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ s_6 &= (2z_1) + (-z_2) + (-z_3) \\ s_7 &= (-z_2) + z_3 \\ s_8 &= (y_1) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}y_3\right) \\ s_9 &= (x_1) + \left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right) + \left(-\frac{1}{2}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_3\right) \end{aligned}$$

⁸Wherret: [Group theory for atoms, molecules and solids](#) (se not 4, s. 10), s. 53-63.

Nedan presenteras en tolkning av de nya s_i -vektorerne under motsvarande $\tilde{s}_i$. Tolkningen av en s_i -vektor går till så att i en figur av molekylen placeras bidraget från atom 1 i atom 1, bidraget från atom 2 placeras i atom 2 osv, som i figur A.3. Den resulterande figuren $\tilde{s}_i$ beskriver en molekylär rörelse. Vi låter t betyda translation, r betyda rotation och v betyda vibration. Parantesen anger vilken led translationen äger rum i eller vilken axel rotationen sker kring.

Vektor	$\tilde{s}_1$	$\tilde{s}_2$	$\tilde{s}_3$	$\tilde{s}_4$	$\tilde{s}_5$	$\tilde{s}_6$	$\tilde{s}_7$	$\tilde{s}_8$	$\tilde{s}_9$
Typ	v	r(z)	t(z)	t(x)	t(y)	r(x)	r(y)	v	v



En viktig iakttagelse är att vi kan verifiera det som påståtts tidigare: molekylen kommer att ha tre vibrationer. Vektorerna s_1 , s_8 och s_9 är dessa vibrationer.

$$B^T M B = m \begin{pmatrix} 3 & & & & & & & & \\ & 3 & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & \\ & & & & 3 & & & & \\ & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & 6 & & \\ & & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & & 3 \\ & & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

Liksom vi påpekat tidigare fås frekvenserna för normalvibrationerna ut som roten ur lösningarna till den karakteristiska ekvationen $\det(B^T K B - \lambda B^T M B) = 0$. Rötterna är

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3k}{m}, & \text{multiplicitet } 1, \\ \lambda_{2,3} &= \frac{3k}{2m}, & \text{multiplicitet } 2, \\ \lambda_{4,5,6,7,8,9} &= 0, & \text{multiplicitet } 6. \end{aligned}$$

Därmed har vi funnit vibrationsfrekvenserna

$$\sqrt{\frac{3k}{m}} \quad \text{och} \quad \sqrt{\frac{3k}{2m}}.$$

Rotationssymmetrier

Uppgift 1.

Välj en av dessa molekyler:

- Ammoniak
- Kloroform
- Difluorodiazine

Konstruera och granska er molekyl. Hittar ni några rotationssymmetrier i er molekyl?

Riv inte molekylen!

Rotationssymmetrier

Uppgift 2.

Undersök båda dessa två molekyler

- cis-1,2-dichloroeten
- trans-1,2-dichloroeten

Hur skiljer sig dessa två molekyler från varandra?

Kan ni urskilja några rotationssymmetrier, och i så fall vilka? Rita en figur av molekylen och bedöm var rotationsaxeln är belägen i figuren.

Riv inte molekylerna!

Rotationssymmetrier

Uppgift 3.

Se tillbaka på molekylerna från föregående uppgifter. Hur många gånger kan vi upprepa rotationen innan vi kommer tillbaka till startläget?

Kan ni upptäcka något samband mellan minsta rotationsvinkeln och antalet rotationer på axeln? Skriv gärna en formel som beskriver sambandet.

Rotationssymmetrier

Uppgift 4.

- a) Det finns en molekyl som liknar de båda molekylerna som ni träffade på i uppgift 2:
- 1,3-dichloroallene.

Jämför denna molekyls struktur med de två förra. Vad upptäcker ni för skillnader och likheter?

Kan ni upptäcka någon rotationssymmetri hos den? Redogör i så fall för dessa på samma sätt som ni gjort i tidigare uppgifter.

- b) Är det någon skillnad i symmetrier mellan denna molekyl och den närbesläktade
- 1,1-dichloroallene?

Redogör för era upptäckter!

Rotationssymmetrier

Uppgift 5.

Undersök en av följande molekyler:

- allene
- biphenyl med vinkeln 90° mellan kolringarna (en i papperets plan och en vinkelrätt mot det)
- 1,3,5-trichlorobensen

Hur många rotationsaxlar har dessa molekyler? Vilken är huvudaxel, och hur många rotationer har den?

Speglingsuppgifter

Uppgift 1.

Undersök de molekyler som ni har konstruerat i första uppgiften.

Finner ni några spegelplan i dessa molekyler? Välj en och skissa upp den tillsammans med sina spegelplan.

Använd gärna speglarna för att hitta spegelplan!

Speglingsuppgifter

Uppgift 2.

Enkelbindningar mellan molekyler kan rotera relativt fritt, så länge vissa lägen inte hindras genom att delar i molekylerna "kolliderar" och stöter bort varandra.

Undersök molekylen

- väteperoxid

Kan du upptäcka hur vinkeln mellan OH-grupperna påverkar hur spegelplanen är belägna, och antalet spegelplan?

Speglings- och rotationsuppgifter

Uppgift 3.

Duktiga kemister kan substituera (dvs. byta ut) väteatomerna som är bundna till kolatomerna mot andra molekylokompener (s.k. substituer).

Undersök hur man kan förstöra rotations- och spegelsymmetrierna i molekylen

- 1,3,5-trichlorobenzene

genom att substituera väteatomerna.

Försök att substituera så få väteatomer som möjligt!

Speglings- och rotationsuppgifter

Uppgift 4.

Man kan jämföra molekyler och avgöra vilken som är mest symmetrisk.

a) Vilken av följande molekyler är mest symmetrisk?

- Vattenmolekylen
- Ammoniak
- Allene

b) Hur många symmetrier har molekylen

- klorgas?



VETENSKAPENS HUS

Fortsätta undersöka symmetrier

Uppgift 1.

Som ni har sett kan man sätta samman symmetrier. Gör en "multiplikationstabell" över symmetrierna i ammoniakmolekylen.

Undersök multiplikationstabellen efter mönster, t.ex.

- vad blir sammansättningen av två speglingar? Av två rotationer? Av en spegling och en rotation?
- spelar det någon roll i vilken ordning man gör symmetrierna?

Laborationshandledning

Symmetrier och symmetriska molekyler.

Bakgrund

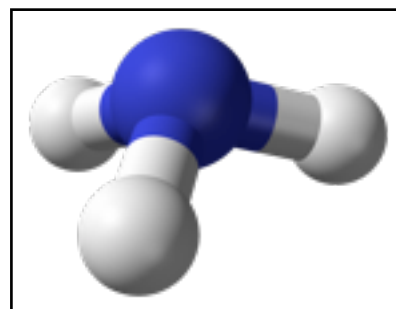
Inledning

Symmetrier finns överallt omkring oss, enligt vissa. Andra menar att symmetri är en matematisk konstruktion, tillämpbar endast på ideala objekt. Det är med andra ord möjligt att se symmetrier i molekyler, eftersom vår beskrivning av dessa sker i termer av matematik. Fria och atomer och molekyler av samma slag betraktas som *identiska* - de har alla exakt samma egenskaper utom vissa fysikaliskt mätbara storheter som hastighet och läge.

Vad är då en molekyl? Jo, i detta fall räcker det med att vi tänker på dem som en samling av atomer, minst två, som hålls samman av kemiska bindningar. Dessa bindningar verkar parvis mellan atomer, likt en stel pinne mellan två kulor. Bindningen består av valenselektroner (dvs. de elektroner som finns i atomernas "yttersta" skal) som två atomer "delar". I laborationen kommer ni att stöta på *enkel-* och *dubbelbindningar*. Om bindningarna är enkla eller dubbla bestäms av atomernas elektronkonfiguration. Varken assistent eller elever behöver själva komma underfund med vilka bindningar som skall användas när ni bygger en molekyl - de är på förhand givna i figurerna i molekyllbiblioteket. Bindningarna skiljer sig åt i flera avseenden men bara ett är viktigt här: en enkelbindning tillåter rotation kring bindningen (testa med modellen!) medan en dubbelbindning är stel. I en molekyl med aromatiska kolringar (där varannan bindning mellan kolatomerna är dubbel och den andra enkel, se t.ex. biphenyl och 1,3,5-trichlorobenzene) alternerar dubbel- och enkelbindningarna mellan kolatomerna så att man inte behöver ta hänsyn till att det är skillnad mellan bindningarna.

Symmetrier och symmetriska molekyler

Det finns huvudsakligen två sorters symmetrier: rotations- och spegelsymmetri. Dessa för det symmetriska objektet till en position som är oskiljbar från originalpositionen. Låt vårt symmetriska objekt exemplifieras av ammoniakmolekylen (**se figur t.h**). Den består av en kväveatom (blå), och tre väteatomer (vit) som är bundna till kväveatomen med enkelbindningar. De tre väteatomerna spänner upp en liksidig triangel och hela molekylen har geometrin av en triangulär pyramid.



Genom mittpunkten av N-atomen och vinkelrät mot triangelns plan går en *rotationsaxel*.

Rotationsaxlar definierar *rotationsoperationer*. En rotation med $\frac{2\pi}{3}$ rad = 120° kring denna axel

avbildar ammoniakmolekylen i en position som är oskiljbar från originalpositionen och är således

en symmetrioperation. Det är också en rotation med $\frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ och $2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$. En

axel med en minsta rotation med $\frac{2\pi}{n}$ rad = $\frac{360^\circ}{n}$ kan upprepas n gånger innan molekylen är

tillbaka i originalpositionen. En rotationsaxel definierar en rotation vars rörelse är vinkelrät mot axeln. Axelns ordning betecknar antalet gånger man kan utföra den minsta rotationen för att rotera objektet 360° . Om ett objekt har flera rotationsaxlar kallas den av högst ordning för *huvudaxel*.

Vinkelrät genom väteatomernas plan och tvärs igenom varje väteatom (och kväveatomen) går *spegelplan*. Ett sådant definierar en *speglingsoperation*. Dessa ska också avbilda vårt symmetriska objekt i en position som är oskiljbar från den ursprungliga. Att utföra en spegling i ett spegelplan är att flytta varje punkt på ena sidan planet till sin spegelbild på andra sidan planet. Formellt: låt p vara en punkt på avståndet d från spegelplanet S och låt l vara den linje som är vinkelrät mot S och som skär genom p . Om $d = 0$ ligger p i S och avbildas på sig själv. Annars avbildas p på den punkt som ligger på l med avståndet $2d$ från p och är på andra sidan S .

Punktgrupper och namngivning av dessa

De symmetrioperationer som går att utföra på ett geometriskt objekt utgör elementen i en grupp, en av alla möjliga s.k. *symmetrigrupper*. Gruppen innehåller alltså operationerna som utförs kring axlar eller i spegelplan på det symmetriska objektet.

Gruppoperatoren är sammansättning av dessa symmetrioperationer, dvs. att man först utför ena symmetrin på objektet, följt av den andra, och eventuellt sedan en tredje osv. Rotationer namnges

efter axelns minsta rotation, eftersom den genererar de andra rotationerna. En rotation med $\frac{2\pi}{n}$

betecknas c_n och en sammansättning av m sådana betecknas med c_n^m . En spegling i ett plan betecknas σ_v om planet innehåller huvudrotationsaxeln, och om spegelplanet är vinkelrät mot huvudaxeln betecknas det σ_h . Här står v för vertikalt och h för horisontellt. Ordningen på en c_n -rotation är n men ordningen på en c_n^m -rotation är beroende av både n och m . Vi kan finna ordningen x för en c_n^m -rotation genom att lösa ekvationen $xm = 0 \pmod{n}$. För en spegling är ordningen alltid 2.

De andra två andra typerna av symmetrioperation är *inversion* och *oegentlig rotation*. En inversion, betecknad i , är operationen $(x, y, z) \xrightarrow{i} (-x, -y, -z)$. En oegentlig rotation är en vanlig c_n -rotation följt av en horisontell spegling, σ_h . Dessa oegentliga rotationer betecknas S . Vi har alltså att $S_n^m = \sigma_h \bullet c_n^m$. Eftersom en σ_h -spegling och en c_n -rotation kommuterar spelar det inte någon roll i vilken ordning de två operationerna utförs. Man kan se en oegentlig rotation som en rotation av objektets spegelbild. Oegentliga rotationer dyker inte upp i laborationsuppgifterna.

Grupperna som består av dessa element kallas för punktgrupper. De finns i ett antal varianter. De som förekommer i labben listas här. En gruppens ordning är antalet element i gruppen. Ett elements ordning är minsta antalet gånger man behöver multiplicera elementet med sig självt för att få identitetselementet.

C_n	En rotationsaxel av ordning n . Gruppens ordning är således n .
C_{nv}	En rotationsaxel av ordning n samt n vertikala spegelplan. Gruppens ordning är $2n$.
C_{nh}	En rotationsaxel av ordning n samt 1 horisontellt spegelplan vilket ger n oegentliga rotationer. Gruppens ordning är $2n$.
$C_{n\infty}$	Oändligt många rotationsaxlar av ordning n , en axel av oändlig ordning samt oändligt många spegelplan.
D_n	En rotationsaxel av ordning n samt n axlar vinkelräta mot huvudaxeln av ordning 2. Gruppens ordning är $2n$.
D_{nv}	En rotationsaxel av ordning n , n axlar av ordning 2 samt n vertikala spegelplan. Gruppens ordning är $4n$.
D_{nh}	En rotationsaxel av ordning n , n axlar av ordning 2, 1 horisontellt spegelplan samt n vertikala spegelplan. Gruppens ordning är $4n$.

Gruppteori

När vi beskriver symmetrier i geometriska objekt i det tredimensionella rummet används gruppteori. Därför ges här en kort repetition av detta. En grupp är en mängd G , ändlig eller oändlig, och en binär operator

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(g, h) \mapsto g \bullet h \quad g, h \in G.$$

För att denna konstruktion ska vara en grupp ska den också uppfylla tre axiom.

1. Det finns ett *identitets*element I i G sådant att $a \bullet I = I \bullet a = a$, $a, I \in G$.

Man kan tänka på identitets

elementet som det element som ”inte gör nåt”, som exempelvis 0 vid addition av tal, eller 1 vid multiplikation.

2. Varje element a i G har en invers a^{-1} sådan att $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = I$.

Man kan tänka på a^{-1} som det element som gör a ogjort. Exempelvis är -3 inversen till 3 under addition eftersom deras summa är 0, och 1/5 är inversen till 5 under multiplikation.

3. Operatoren ska vara *associativ* med vilket betyder att för alla a, b, c i G så gäller $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

Man kan tänka på associativitet som att det inte ska spela någon roll i vilken ordning vi evaluerar en massa sammansatta element.

Sammansättningen av element i G behöver inte vara kommutativ. Om den är det så gäller för alla grupp

element a, b i gruppen att $a \bullet b = b \bullet a$. Då kallas gruppen Abelsk.

Labbspplägg

Introduktion

Här kan man höra sig för vad elevgruppen anser om symmetrier. Man kan t.ex. be dem peka ut symmetriska objekt i rummet och sedan be dem förklara varför objektet i fråga är symmetriskt. Man

kan sedan tala om att det finns en matematisk definition och att vi kommer att labba med två symmetrier idag. Här kan Power Point-presentationen av labben användas! Titta igenom den. Den visar en kul grej, vilket är att de flesta människor tror att de är symmetriska, men i själva verket ser annorlunda ut om ansiktshalvorna byter plats (visa bilderna i presentationen). Även molekyler spegelbilder kan vara annorlunda från den molekyl man speglar. Exempel på det är carvone- och limonene-molekylen. Den ena spegelbilden av carvone doftar kummin och den andra grönmynta. Limonene-molekylens olika varianter doftar skarp citrusdoft respektive rund citrusdoft (som apelsin och citron). Det kan vara effektivt att skicka runt kummin och grönmynta respektive apelsin och citron, och låta gruppen dofta på det. Man kan faktiskt känna likheter även mellan kummin- och myntadoften.

Om gruppen är osäker på vad en molekyl är, kan man gå igenom det med dem.

Rotationssymmetrier

Dela inte ut byggsatserna eller något material än! Man kan börja med att definiera rotationssymmetrin och tala om den i helklass. Det här är en ganska enkel symmetri ”att se”. Man kan exemplifiera med t.ex. vattenmolekylens rotationer, genom att rita molekylen på tavlan samt genom att visa upp en modell och använda en penna som rotationsaxel. En användbar liknelse är säga att rotationsaxeln är som ett grillspett som spetsar molekylen. Sedan kan man dela ut uppgift 1, byggsatser och molekylbibliotek.

När gruppen är klar med uppgift 1 kan man samla ihop gruppen och be dem redogöra för hur det gått. Man kan gå igenom en grupps molekyl på tavlan. Sedan delar man ut uppgift 2. Om någon grupp blir klar snabbare än de andra kan man ge dem en annan molekyl från molekylbiblioteket att undersöka.

När den är klar går man igenom båda molekylerna och låter gruppen upptäcka och redogöra för skillnaderna mellan dem. Här är poängen att rotationsaxeln byter riktning, medan symmetrigruppen är intakt. Sedan uppgift 3, om det finns tid.

I uppgift 3 kan man hjälpa eleverna att finna sambandet genom att definiera de två okända, n respektive m , som beskriver hur stor den minsta rotationen är respektive antalet rotationer på axeln.

När gruppen är klara med uppgift 3 kan man gå igenom den med gruppen. Sedan kan man utmana eleverna och säga att de ska få pröva på en riktigt svår molekyl som inte alla klarar (sant). Ofta brukar någon grupp klara uppgift 4. Den gruppen kan få visa de andra grupperna hur man ska tänka.

Inför uppgift 5 diskuterar man att det kan finnas flera rotationsaxlar i samma molekyl. Diskutera huvudaxel och biaklar med eleverna och exemplifiera med etenmolekylen. Dela ut uppgift 5. Låt eleverna få redogöra för sina resultat när du bedömer att de är klara.

Spegelsymmetrier

Man kan börja med att definiera vad en spegelsymmetri är. Man kan sedan uppmuntra eleverna att använda speglar för att verifiera spegelplanen. Man kan visa hur eleverna kan arbeta med speglarna. Dela ut uppgift 1 och speglar.

När uppgift 1 är klar kan man be eleverna redogöra för spegelplanen i sina molekyler. Difluorodiazine kan vara svår, eftersom spegelplanet ligger i molekylen. Eleverna uttrycker ibland förvåning över att en rotation kan vara svårskild från en rotation, t.ex. i vattenmolekylen, när en spegling i planet som går mellan väteatomerna ser ut att ge samma resultat som en rotation med 180° kring rotationsaxeln. Man kan demonstrera skillnaden genom att sätta en prick på sidan av en väteatom på en modell och sedan genomföra en spegling och sedan en rotation och visa på skillnaden i prickens position.

Man kan inleda uppgift 2 med att enkelbindingar kan rotera fritt, och definiera vad vi menar med bindningsvinkeln θ i den molekylen ($\theta = 0^\circ$ när väteatomerna befinner sig i linje). Diskutera med gruppen vilka bindningsintervall som är aktuella ($\theta = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$ och $0 < \theta < 180^\circ$). Dela ut uppgift 2.

När uppgift 2 är klar kan man med elevernas hjälp sammanfatta den på tavlan. Inför uppgift 3 kan man tala om att duktiga kemister kan byta ut ("substituera" på kemiska) komponenter som sitter på kolringar. Det används bland annat för att skapa och förstöra symmetrier. Hur man kan göra detta ska eleverna få undersöka nu. Dela ut uppgift 3.

När uppgift 3 är klar kan man be eleverna redogöra för hur de gjort för att förstöra symmetrierna i molekylen. De kommer säkert att tycka att det är roligt eftersom det finns många olika fyndiga sätt att göra det på.

Inför uppgift 4 kan man tillsammans med eleverna finna ett sätt att kvantifiera symmetrier på. Genom att räkna antalet symmetrioperationer som molekylen har och jämföra det antalet med andra molekyler kan man avgöra vilken som är mest symmetrisk. Den med störst antal är mest symmetrisk. Dela ut uppgift 4.

Summera de båda begreppen rotation och spegling och sedan kan det vara dags för en rast och en fika.

Spår 1

Det är bra att inleda detta spår med ett samtal om modellernas begränsningar, om hur de aldrig fullt kan representera vår värld. Exempelvis så vibrerar ju alla atomer i en molekyl med sina egenfrekvenser. Ammoniakmolekylen har också fuffens för sig; den genomför kväveinversion vilket innebär att väteatomerna vänds ut och in som på ett trasigt paraply.

Det är också intressant att vi i matematiken måste "märka" atomer för att kunna arbeta med symmetrierna. Kemin kan ju inte ta någon sådan hänsyn; en rotation eller spegling som är en symmetrioperation avbildar ju molekylen i en exakt identisk konfiguration, och vi har inga medel för att kunna göra skillnad på om vi roterat eller reflekterat molekylen. Den är identisk före och efter operationerna!

Ni kan också tala om att modellerna aldrig kan vara symmetriska; det finns alltid små skavanker som skiljer plastkulorna från varandra. De representerar matematiska objekt, men är det inte själva.

När vi talat om detta kan man repetera för eleverna vad en multiplikationstabell är. Man kan exemplifiera med tabellen

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Det kan vara bättre att använda ammoniakmolekylen än vattenmolekylen för multiplikationstabellsbygge. På den behöver man bara märka väteatomerna 1, 2 och 3 för att se skillnad mellan resultatet efter en rotation och efter en spegling. Ammoniaks multiplikationstabell ser ut såhär:

C_{3v}	E	C_3	C_3^2	σ^1	σ^2	σ^3
E	E	C_3	C_3^2	σ^1	σ^2	σ^3
C_3	C_3	C_3^2	E	σ^2	σ^3	σ^1
C_3^2	C_3^2	E	C_3	σ^3	σ^1	σ^2
σ^1	σ^1	σ^2	σ^3	E	C_3	C_3^2
σ^2	σ^2	σ^3	σ^1	C_3^2	E	C_3
σ^3	σ^3	σ^1	σ^2	C_3	C_3^2	E

Där E är identitets-elementet (dvs. en rotation med $s \cdot 360^\circ$, $s = 0, 1, 2, 3 \dots$), C_n^m är en rotation kring rotationsaxeln med $m \cdot (360^\circ/n)$ och σ^i är en spegling genom centralatom och väteatom på position i .

Sedan kan man säga att gruppen ska få labba med ammoniakmolekylens symmetrier och sätta ihop en multiplikationstabell över dessa. Beroende på hur du bedömer gruppens färdigheter kan man begränsa uppgiften till att handla om endast rotationssymmetrierna om man vill.

Börja med att definiera/rita på tavlan hur alla lägen ser ut genom att rita hur ammoniakmolekylen ser ut när de olika symmetrierna verkat på den. Indexera väteatomerna! Man kan sedan exemplifiera vad en sammansättning av rotationer är med hjälp av ammoniakmolekylen. Det räcker då med att man ritar bilder på före operationen och sedan efter operationen. Man behöver inte använda avancerade beteckningar, som C_n^m , utan det räcker med att skriva gradtalet, t.ex.

$120^\circ + 360^\circ = 480^\circ = 120^\circ$ (eftersom en rotation med 480° är ekvivalent med en rotation på 120°). Eller med en spegling, kalla speglingarna s_1 , s_2 och s_3 så att t.ex. $240^\circ + s_1 = s_3$ eller $s_1 + s_3 = 240^\circ$.

Dela ut uppgift 1. När uppgift 1 är klar kan man med gruppens hjälp skriva upp multiplikationstabellen. Med hjälp av den kan man sedan diskutera identitetselement, inverser, gruppens ordning, elements ordning och kommutationsbegreppet.

Om eleverna är snabba och det finns tid över kan grupperna få bygga en komplex molekyl, gärna *phenalene*. Man kan då diskutera fenomenet att komplexa molekyler ofta har en enkel symmetrigrupp (ofta den triviala eller som i det här fallet C_3) medan enkla molekyler har komplexa symmetrigrupper, t.ex. klorgas, vatten och ammoniak.

Labben kan avslutas med en sammanfattning av det dagens labb har bjudit på.

Tips och erfarenheter från testklasser

Det är viktigt att hålla ett högt tempo och uppmärksamma när eleverna är klara med uppgifterna. En klar elevgrupp tenderar att börja bygga fritt med materialet, vilket kan kallas att "lattja". Om så sker med fler elevgrupper i rummet, kan du avbryta uppgiften, påkalla uppmärksamhet och gå igenom elevernas resultat på tavlan. Om en grupp gör detta, kan du ge dem en extrauppgift som bygger på någon molekyl du gillar från molekylbiblioteket. Du kan utmana eleverna att utföra instruktionerna i den aktuella uppgiften också på denna molekyl, för att aktivera eleverna inom ämnets gränser och för att förhindra "lattjande".

När man går in på Spår 1 blev mina elever uppmuntrade och entusiastiska när de förstått principen av sammansättningar och multiplikationstabeller och jag sa att de bedrivit högskolematematik.

Berätta alltid om molekylernas egenskaper/användningsområden, som beskrivs i assistentversionen av molekylbiblioteket! Det bidrar till att ge eleverna ett sammanhang.

Spår 2

Dessvärre befinner sig detta spår vid skrivandet av denna handledning endast i idéstadiet. Det är tänkt att man här ska gå åt det mer kemiska hållet (i motsats till spår 1), och att man laborerar med några karakteristiska egenskaper bland symmetriska molekyler, tittar på tillämpningar av symmetrier i kemin samt att undersöker vilka konsekvenser symmetriska molekyler har i vår vardag. Intresserade får gärna läsa min rapport som sammanfattar utvecklingen av denna laboration. Där står mer om spår 2.

Facit till uppgifter

Ett inledande tips till assistenterna: det blir mycket lättare att förstå svaret på uppgifterna i facit om man samtidigt bygger molekylerna, skissar på papper och jämför med facit.

Rotationsuppgifter

Rotation 1:

- Ammoniak: Rotationsaxel vinkelrätt mot väteatomernas plan och genom kväveatomen.
- Kloroform: Rotationsaxel som går genom väte-kol-bindningen.

- Difluorodiazine: Rotationsaxel som går vinkelrätt genom molekylen mitt i dubbelbindningen.

Rotation 2:

- De skiljer sig genom olika konfiguration på klor- och väteatomerna.
- De har båda rotationsaxlar med rotationer på 180°. Rotationsaxlarna är vinkelräta mot varandra om molekylerna jämförs.

Rotation 3:

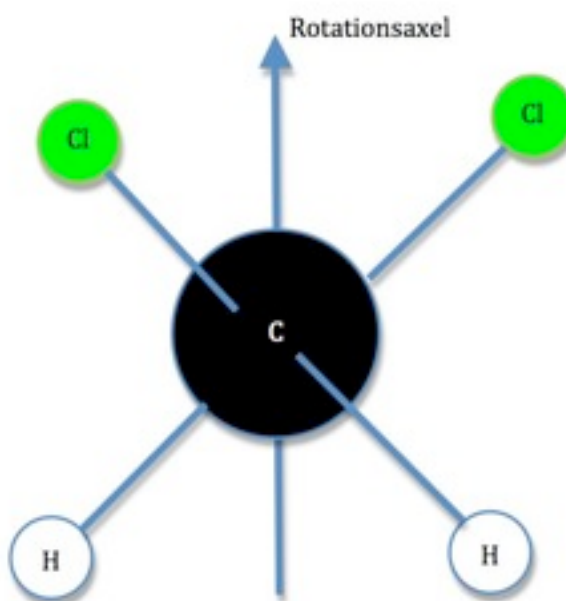
- Ammoniak: upprepas 3 gånger.
- Kloroform: upprepas 3 gånger.
- Difluorodiazine: upprepas 2 gånger.
- cis-1,2-dichloroeten: upprepas 2 gånger.
- trans-1,2-dichloroeten: upprepas 2 gånger.

- Samband: $n = \frac{360^\circ}{m}$, där n är minsta rotationen och m är antalet rotationer på axeln.

Rotation 4:

a)

- Skillnader och likheter: tre kolatomer, sammanlänkade med dubbelbindningar. Första molekylerna stött på med atomer som "sticker ut" i de tre rumsdimensionerna samtidigt.
- Rotationssymmetri: Svår att upptäcka, men finns där och är en rotationsaxel av ordning 2. Håll molekylerna så att du tittar på den ena yttersta kolatomen så att resten av molekylerna breder ut sig bakom och klor- och väteatomerna spänner upp ett rätblock. **Se figur t.h!**



b)

- det är samma typ av symmetri (axel av ordning två) men lättare att hitta: rotationsaxeln går genom alla tre kolatomerna.

Rotation 5:

- allene: 3 st. rotationsaxlar av ordning 2.
- biphenyl (90°): 3 st. rotationsaxlar av ordning 2. (Håll modellen så att en av kolringarna ligger framför den andra och luta modellen så att den tecknas som ett X. Då kan man hitta alla tre rotationsaxlar av ordning 2)
- 1,3,5-trichlorobenzene: 1 st. axel av ordning 3 (axeln går vinkelrätt mot molekylen och genom kolringens centrum), 3 st. axlar av ordning 2 (de går genom klor/väteatomerna och i molekylen plan).

Spegling

Spegling 1:

- Ammoniak: Tre spegelplan som går genom vardera väteatom samt kväveatomen.
- Kloroform: Tre spegelplan som går genom vardera väteatom samt kol -och kloratomen.
- Difluorodiazine: Ett spegelplan som ligger i molekylens plan och skär genom varje atom.

Spegling 2:

Vinkel, θ	Antal spegelplan
$\theta = 0^\circ$	2
$\theta = 180^\circ$	1
$0 < \theta < 180^\circ$	0

Not: alla konfigurationer täcks in av dessa vinklar/intervall.

Spegling 3:

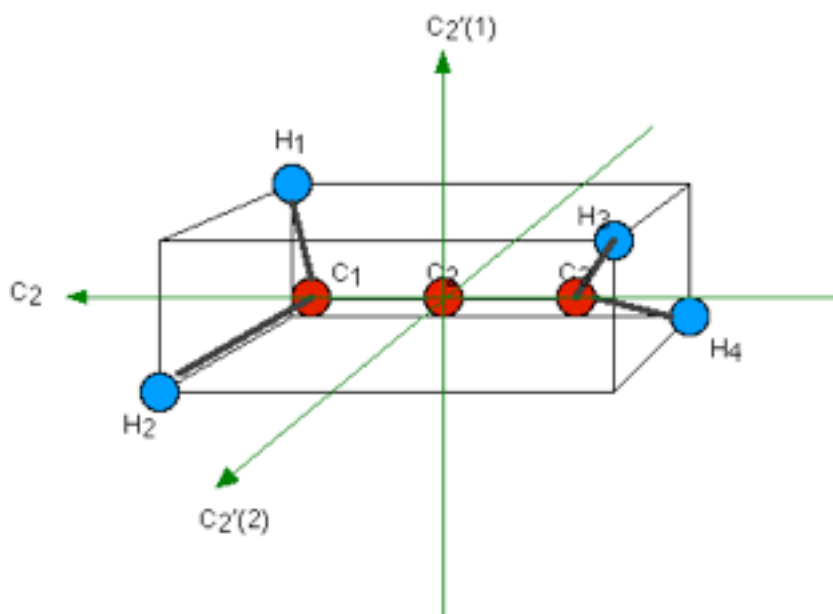
Till den här uppgiften finns inte något facit, eftersom möjligheterna är så stora. Tanken är att man kan förstöra symmetrierna genom att bygga på stora, bulkiga molekylsegment som inte bara ligger i molekylens plan.

Spegling 4:

a)

Under förutsättning att ni kommit överens om att mest symmetrisk är ekvivalent med flest symmetrioperationer vinner allene.

- *ammoniak* har 6 st. symmetrioperationer (3 st. spegelplan och 3 st. rotationer).
- *allene* har 8 st. symmetrioperationer (2 st. spegelplan och 3 st. rotationsaxlar av ordning 2 vilket ger totalt 6 rotationer!). **Se figur på nästa sida med de tre rotationsaxlarna C_2 (huvudaxel, de två spegelplanen innehåller axeln), $C_2'(1)$ och $C_2'(2)$.**
- *vatten* har 4 st. symmetrioperationer (2 st. spegelplan och en axel av ordning 2).



b)

Klorgas har oändligt många symmetrier! Längs bindningen finns oändligt många spegelplan och rotationsaxeln som går genom bindningen är av oändlig ordning ty där är varje rotation inom intervallet $0 < \theta < 2\pi$, $\theta \in \mathbb{R}$ en symmetrioperation.

Spår 1

Se multiplikationstabellerna på sida 5. Ammoniaks symmetrigrupp C_{3v} är en Abelsk grupp - gruppelementen kommuterar. Den är därför snäll att labba med.

- Sammansättning av två rotationer = rotation.
- Sammansättning av två speglingar = rotation.
- Sammansättning av rotation och spegling = spegling.

Identitetselementet är rotation med $0^\circ = 360^\circ = 720^\circ$ osv.

En spegling är alltid sin egen invers. De har därför alltid ordning 2.

Identitetselementet 0° är sin egen invers. Den har per definition ordning 0.

Rotationerna 120° och 240° är varandras inverser.

Eftersom $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ = 0^\circ$ har rotationen med 120° ordning 3.

Eftersom $240^\circ + 240^\circ + 240^\circ = 720^\circ = 360^\circ + 360^\circ = 0^\circ$ har rotationen med 240° ordning 3.

Mer om symmetrier

Här finns ett antal länkar för er som vill veta mer om symmetrier, symmetriska molekyler.

http://en.wikipedia.org/wiki/Point_groups_in_three_dimensions

Här står om de symmetrigrupper som kallas punktgrupper som är aktuella i labben.

http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_symmetry

Här står allmänt om molekylär symmetri.

<http://www.ch.ic.ac.uk/local/symmetry/>

Hemsida där man kan se rotationer interaktivt i en Java-applet.

<http://www.queensu.ca/cloe/projects/public/symmetry/index.htm>

Diskuterar varför man studerar symmetrier.

Molekylbibliotek och bygghandledning

Bygghandledning

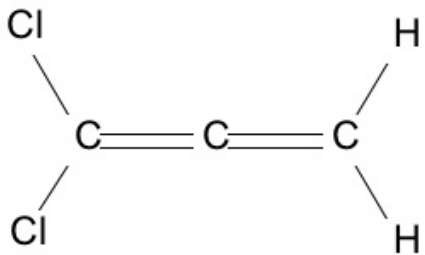
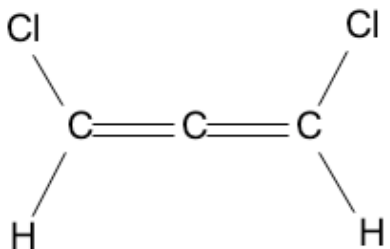
Atomer:

- kolatom, C = svart
- syreatom, O = röd
- kloratom, Cl = grön
- fluoratom, F = också grön
- kväve, N = blå
- väteatom, H = vit

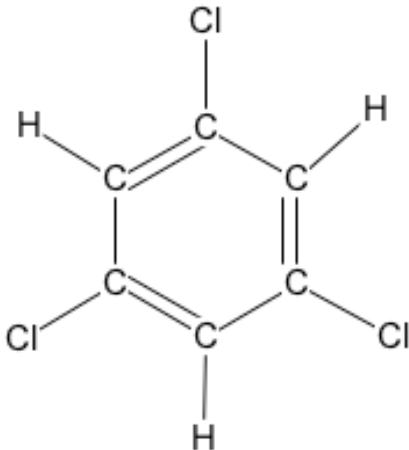
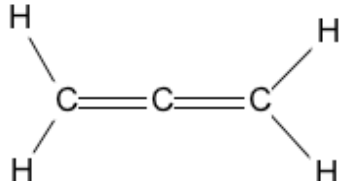
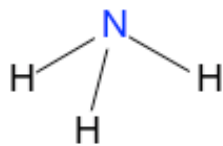
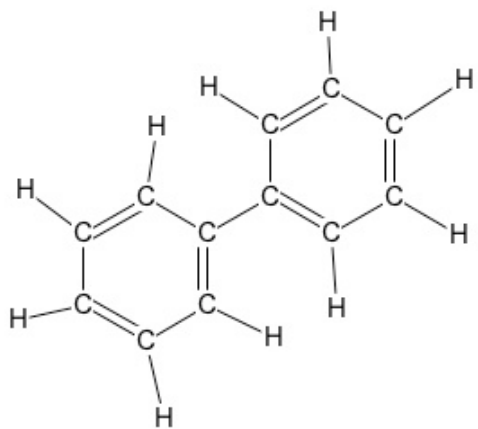
Bindningar

- en kort grå = enkelbindning
- två långa mjuka grå = dubbelbindning

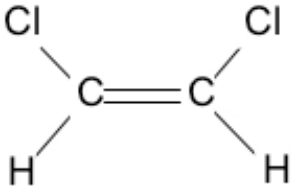
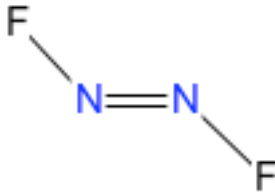
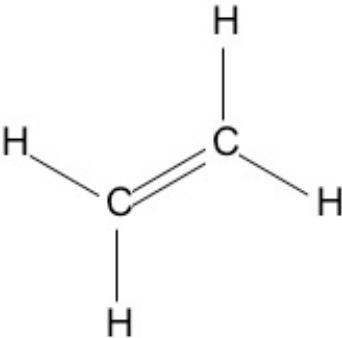
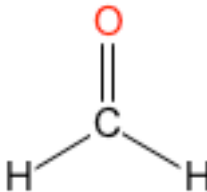
Molekylbibliotek

Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
1,1-dichloroallene	$C_3H_2Cl_2$	
1,3-dichloroallene	$C_3Cl_2H_2$	

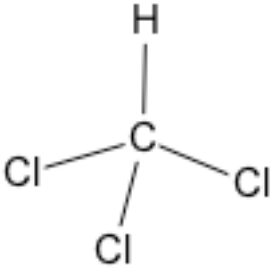
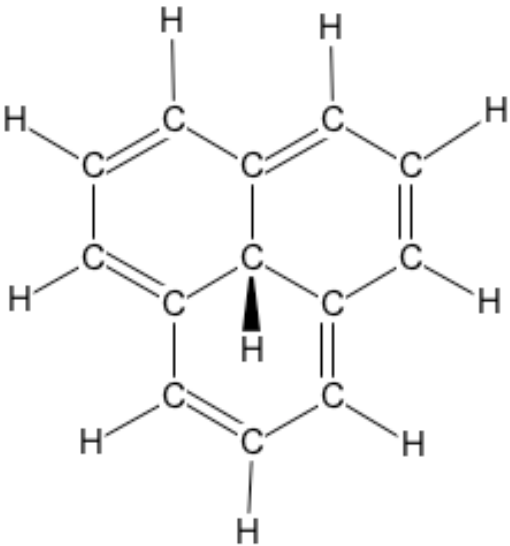
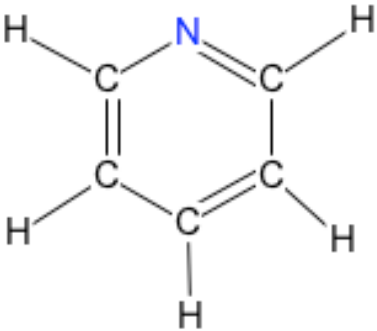
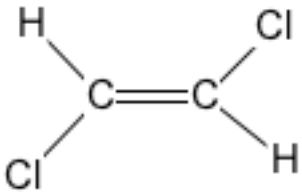


Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
1,3,5-trichlorobenzene	$C_6Cl_3H_3$	
allene	C_3H_4	
ammoniak	NH_3	
biphenyl	$C_{12}H_{10}$	



Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
cis-1,2-dichloroeten	$C_2Cl_2H_2$	
difluorodiazine	N_2F_2	
eten	C_2H_4	
formaldehyd	CH_2O	
klorgas	Cl_2	$Cl - Cl$



Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
kloroform	CHCl_3	
phenalene	$\text{C}_{13}\text{H}_{10}$	
pyridine	$\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$	
trans-1,2-dichloroeten	$\text{C}_2\text{H}_2\text{Cl}_2$	



Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
vatten	H_2O	
väteperoxid	H_2O_2	



Molekylbibliotek och bygghandledning

Bygghandledning

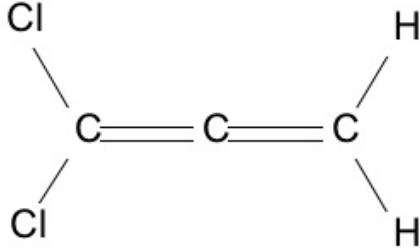
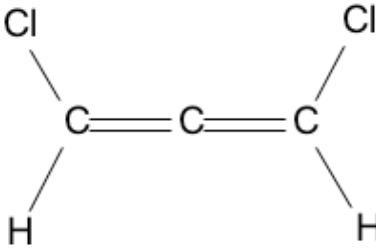
Atomer:

- kolatom, C = svart
- syreatom, O = röd
- kloratom, Cl = grön
- fluoratom, F = också grön
- kväve, N = blå
- väteatom, H = vit

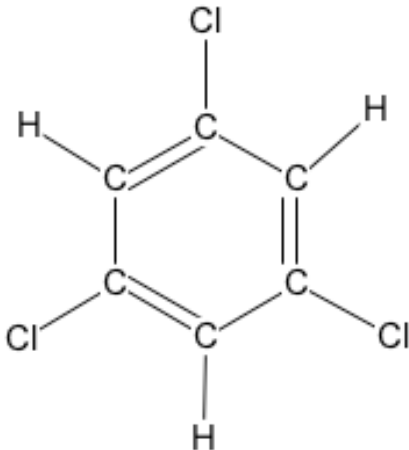
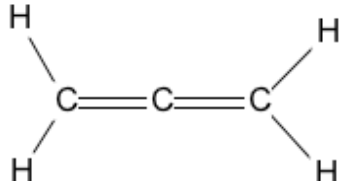
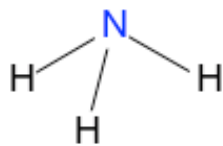
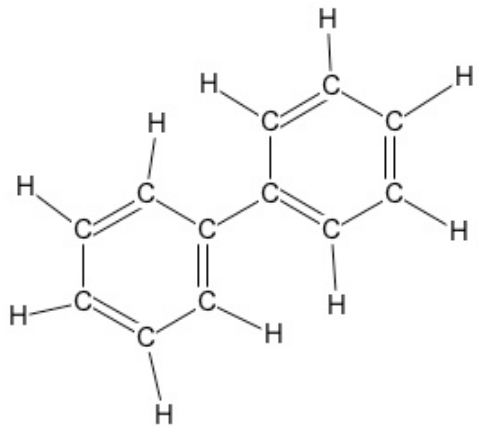
Bindningar

- en kort grå = enkelbindning
- två korta mjuka grå = dubbelbindning

Molekylbibliotek

Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
1,1-dichloroallene C_{2v} Används som reaktant i synteser i organisk kemi.	$C_3H_2Cl_2$	
1,3-dichloroallene C_2 Används som reaktant i synteser i organisk kemi.	$C_3Cl_2H_2$	

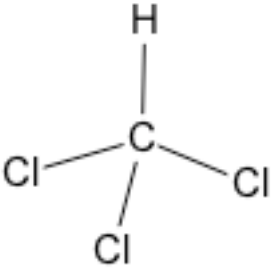
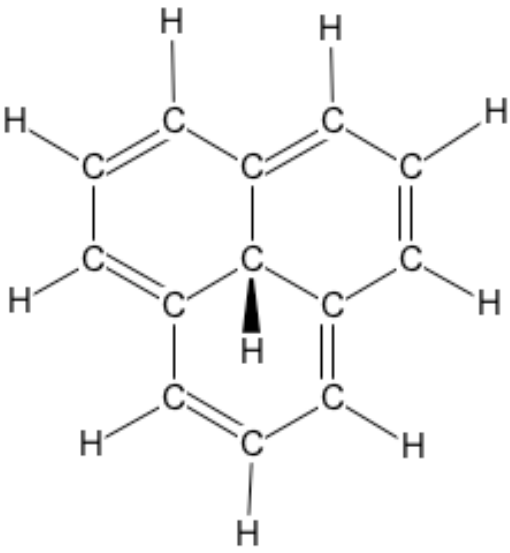


Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
1,3,5-trichlorobenzene $C_{3v} + \sigma_h + 3C_2$ Starkt carcinogen, används i laboratorium för att lösa fullerener (t.ex. C_{60}-kolbollar).	$C_6Cl_3H_3$	
allene D_{2v} Används som komponent i svetsgasen MAPP från företaget Petromont.	C_3H_4	
ammoniak C_{3v} Mycket stark och stickande lukt. Knock-outande boxare piggades upp med ammoniak förr.	NH_3	
biphenyl D_{2v} Förhindrar tillväxt av mögel och annan svamp, används som konserveringsmedel (E230) för att skydda citrusfrukt vid transport. Lätt giftigt för människor.	$C_{12}H_{10}$	

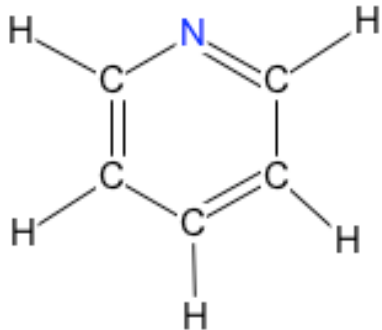
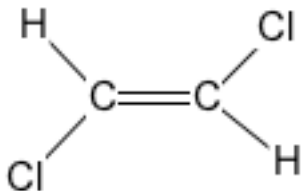
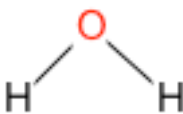
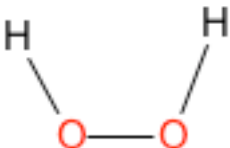


Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
cis-1,2-dichloroeten C_{2v} Används i industrin för att lösa upp vaxer, fetter och polymerer (plaster). Användes förr som bedövningsmedel tillsammans med eter eftersom den påverkar centrala nervsystemet. Orsakar illamående, kräkningar, skakningar och yrsel.	$C_2Cl_2H_2$	
difluorodiazine C_{2h} Används för att vulkanisera (härda) fluoroelastomerer (plaster liknande teflon)	N_2F_2	
eten D_{2h} Många användningsområden: svetsgas, bedövningsmedel (85% eten/15% syrgas), påskyndar mognadsprocessen hos frukt.	C_2H_4	
formaldehyd C_{2v} Används inom medicinen t.ex. för att döda de flesta bakterier och svampar samt deras sporer. Finns vaccin, vårtbehandlings-medel	CH_2O	



Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
klorgas Cl_2 Används för att rena vatten i reningsverk, som desinfektionsmedel i konsumentprodukter och för att bleka t.ex. papper och textil. Även i krig som kemiskt vapen.	Cl_2	$\text{Cl} - \text{Cl}$
kloroform CHCl_3 Den klassiska vätskan som hålld på en trasa används i bl.a. Tintin för att söva intet ont anande offer.	CHCl_3	
phenalene C_3 En förorening som bildas vid förbränning av fossila bränslen.	$\text{C}_{13}\text{H}_{10}$	



Namn / Trivialnamn	Formel	Struktur
pyridine C_{2v} Används för att denaturera kylarvätska och etanol, men också som hjälpsubstans vid klädfärgning.	C_5H_5N	
trans-1,2-dichloroeten C_{2h} Se cis-1,2-dichloroeten	$C_2H_2Cl_2$	
vatten C_{2v} Världens mest använda kemikalie?	H_2O	
väteperoxid C_{2v} vid 0° bindn.vinkel (eclipsed H) C_{2h} vid 180° bindn.vinkel C_2 annars Kraftfullt blekmedel. Används också som desinfektionsmedel men även som raketbränsle.	H_2O_2	



VETENSKAPENS HUS

Symmetrier och symmetriska molekyler

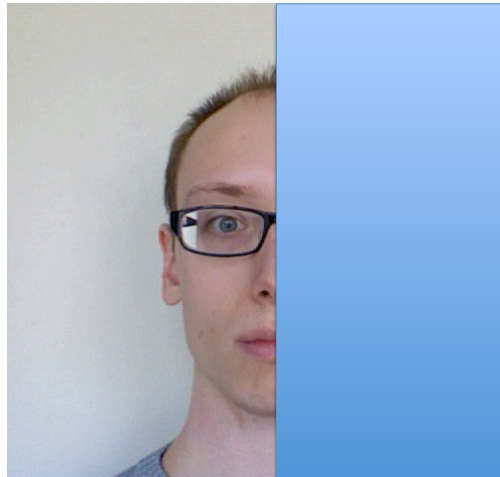


Är ett ansikte symmetriskt?



Original

Är ett ansikte symmetriskt?



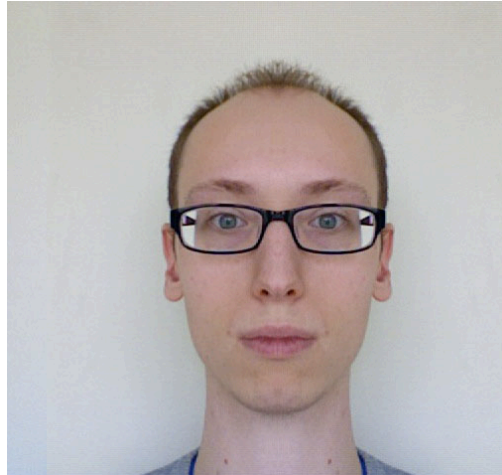
Kopiera vänster ansiktshalva

Är ett ansikte symmetriskt?



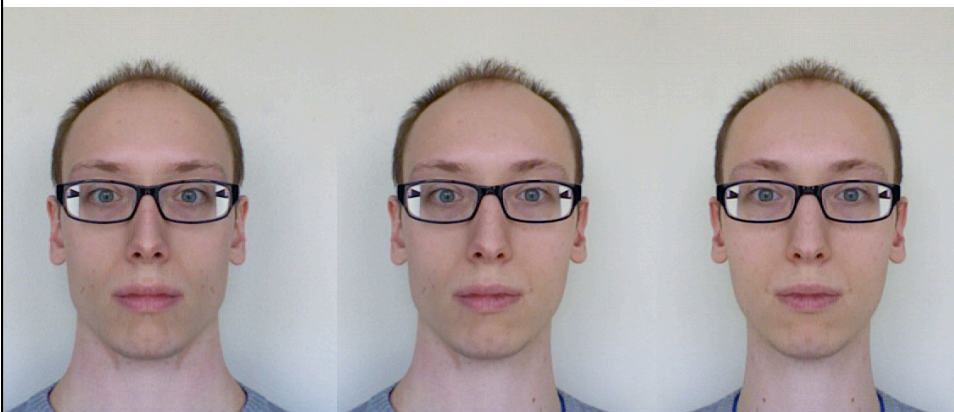
Vänster ansiktshalva dubblerad

Är ett ansikte symmetriskt?



Höger ansiktshalva dubblerad

Alla tre

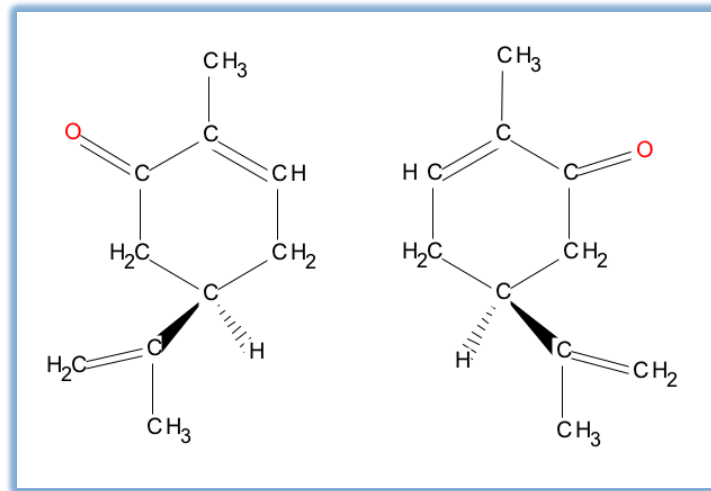


Vänster

Original

Höger

Carvone



Myrta

Kummin

Elevsvar, utvärdering av testlaboration 31 maj

Fråga 1: Vad känner du att du lärt dig under laborationen?

Fråga 2: Var det något som kunde varit bättre/tydligare?

Grupp 1 (kl. 9-12)

Elev 1	Fråga 1	Jag har lärt mig mer om vinklar och symmetri samt hur molekyler ser ut i 3D
	Fråga 2	Nej, det var tydligt och bra även om det nog krävs lite mer och repetition för att verkligen förstå vad vi gjort.
Elev 2	Fråga 1	Hur spegel- och rotationssymmetri fungerar. En inblick i hur matte är efter gymnasiet. En repetition på namngivning.
	Fråga 2	Inte vad jag kommer på. Det var tydligt och kändes genomtänkt. Lite kortare tid till att bygga molekyler skulle kanske göra att man behöll fokusen lite bättre.
Elev 3	Fråga 1	Identitets-elementet, rotationsgrejen och spegelgrejen. Alltså i stort sätt allt som vi har gått igenom har jag lärt mig.
	Fråga 2	Nej, inte vad jag kan komma på, kanske att man kunde klyva dem, att du skulle ha sagt det innan vi började.
Elev 4	Fråga 1	Jag har lärt mig mkt, har fått lite större förståelse för spegel och rotationsplaner.
	Fråga 2	Mer genomgång i början så att man förstår lite mer vad man kommer göra och förstår hur och varför....
Elev 5	Fråga 1	Har lärt mig om allt du gått igenom, symmetri, rotations, spegelbild.
	Fråga 2	Nej det var bra.
Elev 6	Fråga 1	Jag har lärt mig om hur molekylers symmetri fungerar.
	Fråga 2	Hmm. Kanske gått igenom mer i början så att man visste mer om vad man höll på med.
Elev 7	Fråga 1	Allt var nytt, vi har inte gått igenom symmetri/rotation så det är något jag absolut har lärt mig.
	Fråga 2	Kanske att förklara mer specifikt [sic] i början vad symmetri är, vad som förklarar begreppet osv.
Elev 8	Fråga 1	Om symmetrier och hur konstigt det är.
	Fråga 2	Lite mer blandade uppgifter.
Elev 9	Fråga 1	I stort sett allt om symmetrier.
	Fråga 2	Lite svårare.
Elev 10	Fråga 1	Jag har lärt mig mycket om olika sorters symmetrier. Jag visste inte att det fanns så många olika sorter förut.
	Fråga 2	Inte vad jag kan komma på. Jag förstod allting som vi gick igenom.
Elev 11	Fråga 1	Kunskap om symmetrier och identitets-element, och rotationsförhållanden.
	Fråga 2	$0^\circ = 0^\circ \neq n - 1^\circ$:)
Elev 12	Fråga 1	Nytt sätt att tänka vad gäller spegelsymmetri och rotation. Bra kunskaper för fortsatta studier inom kemi.
	Fråga 2	Bra lektion!

Grupp 2 (kl. 13-16)

Elev 13	Fråga 1	Har lärt mig mer om hur symmetri faktiskt fungerar, lättare att förstå nu och hitta olika symmetrier
	Fråga 2	Kanske kunde hålla på lite längre men generellt sett var det bra.
Elev 14	Fråga 1	Har fått ökad förståelse och lärt mig rotations- och spegelsymmetri. Jag har även introducerats för "sätta samman symmetrier".
	Fråga 2	Det kunde varit lite längre, tiden gick väldigt fort! Bra gjort! Det var roligt :D
Elev 15	Fråga 1	Då vi delvis gått igenom detta på kemin i skolan var det inget som kändes helt nytt. Dock fick jag ökad förståelse för det mesta, framför allt skillnader mellan spegelsymmetri & rotationssymmetri.
	Fråga 2	Tydligheten var det inget fel på alls. Dock kändes det ibland som att det gick lite för långsamt (fick för mkt tid till varje uppgift). Folk blev okoncenterade och intresset sjönk.
Elev 16	Fråga 1	Skillnaden mellan spegelsymmetri och rotationssymmetri.
	Fråga 2	Du kunde tagit exemplet med pricken på en molekyl tidigare inför hela gruppen.
Elev 17	Fråga 1	Jag har lärt mig mer om betydelsen i huruvida molekylen är trans eller cis m.m. t.ex. när det gäller spegelsymmetri och rotationssymmetri.
	Fråga 2	Allt var bra och förståeligt.
Elev 18	Fråga 1	Jag har lärt mig om symmetrier, spegelsymmetri och att bygga några molekyler och se deras symmetrier.
	Fråga 2	Allt var bra förklarat.
Elev 19	Fråga 1	Jag har lärt mig att lite bättre sätta samman symmetrier typ. (spegel symmetrier)
	Fråga 2	Kunde förklarat lite noggrannare på vissa saker, vissa delar var lite svåra vissa delar för enkelt.
Elev 20, 21	Fråga 1	Jag har förstått hur spegelsymmetri fungerar (vilket jag ej gjorde förut).
	Fråga 2	Jag tycker att det var tydligt, och om man ej förstod förklarades det, så det var inga problem.
Elev 22	Fråga 1	Jag har lärt mig hur man hittar olika symmetrier då man bygger molekyler.
	Fråga 2	Nej, allt var tydligt.
Elev 23	Fråga 1	Skillnaden mellan rotationssymmetri och spegelsymmetri... Större klarhet kring molekylers struktur.
	Fråga 2	Molekylbiblioteket kanske skulle ha gått igenom inför gruppen... Prick-exemplet var väldigt tydligt, ger bättre förståelse än siffror och kvadrater

Text till lärare

Laboration: Symmetriska molekyler

Det här är en laboration som handlar om symmetrier och de symmetriegenskaper som molekyler kan ha. Målet med laborationen är att låta deltagarna resonera kring molekyler och deras symmetrier. Vi använder oss av de matematiska - symmetribeskrivningarna - för att beskriva och tänka kring symmetrier och för att se vilka symmetriegenskaper som molekyler har.

Deltagarna kommer att använda sig av molekylbyggsatser, speglar, papper och penna, för att tillsammans lösa uppgifter och diskutera kring molekyler och symmetrier.

Förkunskaper: Lämpar sig för alla gymnasieelever, men passar perfekt för klasser som läser kemi och matematik på gymnasiet.

Litteratur

URL: <http://www.molymod.com/>.

URL: <http://www.zometool.com/>.

Adkins, William A. och Steven H. Weintraub: Algebra. An Approach via Module Theory, New York 1993.

Axelsson, Harriet m. fl.: Matematik - ett kommunikationsämne, utg. av Ronny Ahlström m. fl. (Nämnaren Tema), Göteborgs universitet, Göteborg 1996.

Bloom, Mattson och Wedman: Kunskapstyper och frågeord, stencil, 2001.

Eriksson, Karl Henrik: Matematik - ett kommunikationsämne, i: Göteborgs universitet, Göteborg 1996, kap. Om barns förmåga att bilda begrepp, s. 54–58.

Field, Richard: The Internet Encyclopedia of Philosophy, URL: <http://www.iep.utm.edu/dewey> (hämtad 2010-05-12).

Granström, Kjell: Ledarskap i klassrummet, i: (Forskning i fokus 33), 2007.

Guggenheim, E. A., J. E. Mayer och F. C. Tompkins: The International Encyclopedia of Physical Chemistry and Chemical Physics, London 1963.

Immel, Stefan: Molecular Structures of Organic Compounds - Chirality, URL: <http://csi.chemie.tu-darmstadt.de/ak/immeltutorials/chirality/index.html> (hämtad 2010-05-20).

IUPAC - International Union of Pure and Applied Chemistry, URL: <http://www.iupac.org/> (hämtad 2010-05-20).

JChemPaint, URL: <http://sourceforge.net/apps/mediawiki/cdk/index.php?title=JChemPaint> (hämtad 2010-05-20).

Korp, Helena: Kunskapsbedömning - hur, vad och varför (Forskning i fokus 13), Stockholm 2003.

Matematikverkstad (introduktion i A4-format), URL: http://ncm.gu.se/media/namnaren/xtra/feb07/MVsnabbinfo_a4.pdf (hämtad 2010-05-18).

Newton, Isaac: Letter to Robert Hooke, brev, febr. 1676.

Raman, K. V.: Group Theory and Its Applications to Chemistry, New Delhi 1990.

Rystedt, Elisabeth och Lena Trygg: Laborativ matematikundervisning - vad vet vi?, Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet, Göteborg 2010.

- Säljö, Roger: Lärande i praktiken: ett sociokulturellt perspektiv, 1. utg., Stockholm 2000.
- Serre, Jean-Pierre: Linear Representations of Finite Groups, New York 1977.
- Skolverket: KE1201 - Kemi A, Kursplan, juli 2000.
- Dens.: KE1202 - Kemi B, Kursplan, juli 2000.
- Dens.: MA1201 - Matematik A, Kursplan, juli 2000.
- Dens.: MA1206 - Matematik - breddning, Kursplan, juli 2000.
- Stensmo, Christer: Pedagogisk filosofi, Lund 1994.
- Trygg, Lena: NCM Matematikverkstad, URL: <http://ncm.gu.se/mv> (hämtad 2010-05-18).
- Verb i kursplanen, URL: http://ncm.gu.se/media/nywebb/matematikverkstad/huvudsidaMVwebb/verb_ma.pdf (hämtad 2010-05-18).
- Wherret, Brian S.: Group theory for atoms, molecules and solids, London 1986.