

# Samma ämne -olika uppgifter



En jämförande studie av  
matematikuppgifter i TIMSS  
Advanced och nationella prov

Daniel Bokne & Olof Kristmansson  
Examensarbete 15 högskolepoäng, HT 07

# Förord

När vi på varsitt håll fick frågan om vi två tillsammans hade lust att skriva vårt examensarbete om TIMSS hade vi aldrig tidigare träffats. Båda tackade ja och vi träffade varandra för första gången när vi satte oss ner vid bordet för att planera arbetet. Åtskilliga svettiga timmar senare kan vi inte annat än tacka varandra för ett fruktbart och trevligt samarbete.

Detta arbete har varit lärorikt och intressant. Vi har fått nya kunskaper inte enbart kring provkonstruktion utan även kring hur olika taxonomier ger utslag för olika aspekter hos det som ska kategoriseras. När vi skildes sista arbetsdagen före jul, när merparten av arbetet var gjort, konstaterade vi att vi nu var kunskapsmässigt mogna för att sätta oss in i de olika taxonomier vi läst. Med det vill vi inte ha sagt att det arbete vi gjort varit av dålig kvalitet, utan snarare att vi lärt oss en hel del under resans gång. Arbetet hade underlättats betydligt om vi från början haft de kunskaper vi har idag. Det hade minskat antalet gånger vi behövt ta ett steg bakåt för att anpassa taxonomin. Men som sagt har det varit lärorikt.

Vi vill passa på att tacka Kristian Ramstedt som kommit med goda synpunkter på innehållet. Vi riktar även ett tack till den grupp, vid Umeå universitet, som deltagit i projektet som granskar TIMSS Advanced 2008; Peter Nyström, Tomas Bergqvist och Annika Kjellsson Lind. Annika som även varit vår handledare får ett extra varmt tack.

Daniel och Olof, Umeå 2008-01-14

# Sammanfattning

Examensarbetets syfte är att jämföra de provuppgifter inom matematik som ingår i TIMSS Advanced 2008 med provuppgifter från nationella prov för Matematik D och provbanksprov för Matematik E.

För att jämföra dessa två provkonstruktioner har 76 provuppgifter från TIMSS Advanced 2008 och 88 provuppgifter från nationella prov i Matematik D och provbanksprov i Matematik E kategoriserats. Detta har skett enligt en framarbetad taxonomi.

Jämförelsen mellan de två provkonstruktionerna visar både på skillnader och likheter. Innehållsmässigt hamnar stora delar av Matematik E utanför innehållet i TIMSS prov. Endast 7 procent av poängen i TIMSS prov ligger utanför det kunskapsområde som en Matematik D-elev fått tillgång till i skolan. Motsvarande siffra för en Matematik E-elev är 5 procent. En stor skillnad är den högre grad av sammanhang i vilket de matematiska problemen i de nationella proven presenteras jämfört med TIMSS prov.

Nyckelord: matematik, nationella prov, taxonomi, TIMSS Advanced

# Innehåll

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INLEDNING .....</b>                                               | <b>5</b>  |
| SYFTE .....                                                          | 5         |
| <b>BAKGRUND .....</b>                                                | <b>6</b>  |
| TIMSS .....                                                          | 6         |
| NATIONELLA PROV .....                                                | 6         |
| TIDIGARE STUDIER– MED FOKUS PÅ MATEMATIK OCH NATURVETENSKAP .....    | 7         |
| TEORETISK BAKGRUND .....                                             | 7         |
| Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?.....                           | 7         |
| Vilka tankeprocesser krävs hos eleven? .....                         | 7         |
| Vilka krav ställs på elevens svar?.....                              | 8         |
| Hur presenteras innehållet i uppgiften?.....                         | 9         |
| <b>METOD .....</b>                                                   | <b>10</b> |
| URVAL AV UPPGIFTER .....                                             | 10        |
| VAD RÄKNAS SOM EN UPPGIFT? .....                                     | 11        |
| Deluppgifter.....                                                    | 11        |
| Olika lösningsmetoder .....                                          | 11        |
| TAXONOMI.....                                                        | 11        |
| Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?.....                           | 11        |
| Vilka tankeprocesser krävs hos eleven? .....                         | 13        |
| Vilka krav ställs på elevens svar?.....                              | 16        |
| Hur presenteras innehållet i uppgiften?.....                         | 17        |
| Vilken är uppgiftens relativa vikt?.....                             | 20        |
| JÄMFÖRELSE .....                                                     | 21        |
| <b>RESULTAT .....</b>                                                | <b>22</b> |
| Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?.....                           | 22        |
| Vilka tankeprocesser krävs av eleven? .....                          | 24        |
| Vilka krav ställs på elevens svar?.....                              | 27        |
| Hur presenteras innehållet i uppgiften?.....                         | 28        |
| Vilken är uppgiftens relativa vikt?.....                             | 32        |
| Övriga noteringar kring uppgiften .....                              | 33        |
| <b>DISKUSSION .....</b>                                              | <b>34</b> |
| OM METOD .....                                                       | 34        |
| OM RESULTAT OCH TAXONOMIN .....                                      | 35        |
| Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?.....                           | 35        |
| Vilka tankeprocesser krävs av eleven? .....                          | 35        |
| Hur presenteras innehållet i uppgiften?.....                         | 37        |
| Vilken är uppgiftens relativa vikt?.....                             | 38        |
| Övriga noteringar kring uppgiften .....                              | 39        |
| SLUTSATS .....                                                       | 39        |
| <b>REFERENSER.....</b>                                               | <b>40</b> |
| <b>BILAGOR</b>                                                       |           |
| BILAGA 1: Nationelltprov Matematik D – vt05 .....                    | 9 sidor   |
| BILAGA 2: Provbanksprov Matematik E – vt05.....                      | 12 sidor  |
| BILAGA 3: Provuppgifter från TIMSS 1995 .....                        | 15 sidor  |
| BILAGA 4: Uppdragsavtal mellan Skolverket och Umeå universitet ..... | 2 sidor   |

# Inledning

Skolans utformning och huruvida den svenska skolan är bra eller dålig hör till två av de mest debatterade ämnena i samhället. Detta är inte förvånande med tanke på hur många personer som berörs av skolan. Skolan kan betraktas ur ett politiskt och samhällsekonomiskt perspektiv, eller ur ett individperspektiv på föräldranivå, lärarnivå eller elevnivå eller ur många andra perspektiv. Åsikterna går isär om vad man menar med kvalitet och om skolan skall fokusera på kunskaper eller social utveckling för eleverna. Från lärare som arbetar på universitet uttrycks en oro över studenters försämrade kunskaper inom naturvetenskapliga ämnen och i synnerhet matematik. (Möller, 2004) I de internationella studier där elevers kunskaper inom matematik och naturvetenskap mäts finns en trend att Sverige tappar mark jämfört med andra länder (Skolverket, 2007). Resultaten från dessa studier förekommer som argument i debatten om skolan. Exempelvis kan man i DN läsa: "Det svenska misslyckandet i den internationella undersökningen av elevers kunskaper i matematik är odiskutabelt. Desto mer energi kan nu ägnas åt frågan varför. Svaren har med brist att göra – på arbetsro och ämneskunskap hos lärarna." (Dagens Nyheter, 2004, huvudledare)

Skolverket visar intresse av dessa studier genom att aktivt delta i den typen av studier. Förutom att enbart se till resultatet försöker Skolverket utvärdera vad trenden beror på. Kan det vara så att studierna mäter andra kunskaper och färdigheter än vad den svenska skolan har som ambition att lära ut? Beror trenden på att eleverna i Sverige lär sig mindre i skolan än tidigare och vad är i så fall orsaken till detta?

Nästa internationella studie inom detta område som Sverige kommer delta i är TIMSS Advanced, vilken kommer att genomföras under våren 2008. Med anledning av detta har skolverket gett Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar, vid Umeå universitet, i uppdrag att analysera TIMSS Advanced i relation till de svenska styrdokumentet och proven.

I uppdragsavtalet mellan Skolverket och Umeå universitet står det: "Uppdraget innebär att genomföra en studie med syfte att utvärdera i vad mån TIMSS Advanced's ramverk och gymnasieskolans styrdokument överensstämmer. Utvärderingen ska avse överensstämmelsen både i innehållsmässiga och kognitiva hänseenden. Vidare skall TIMSS Advanced's ramverk och provinstrument jämföras med den tolkning av styrdokumentet som görs i de nationella proven (för de kurser nationella prov/prov i provbanken finns). Elever som deltar i TIMSS Advanced läser kurserna Matematik D och E samt fysik B på NV eller TE programmen." (bilaga 4, sidan 1).

Examensarbetet utgör en del av denna jämförelse mellan TIMSS Advanced och den svenska skolan.

## Syfte

Examensarbetets syfte är att jämföra de provuppgifter inom matematik som ingår i TIMSS Advanced 2008 med provuppgifter från nationella prov för Matematik D och provbanksprov för Matematik E.

Detta sker utifrån frågeställningen: Vilka skillnader och likheter finns det mellan provuppgifterna i TIMSS Advanced 2008 och provuppgifterna i de svenska nationella provningarna, i innehållsmässigt och kognitivt hänseende?

# Bakgrund

## **TIMSS**

TIMSS Advanced är en internationell utvärderingsstudie som utförs av International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS är en förkortning för "Trends in International Mathematics and Science Study" och undersöker som namnet anger hur trenderna i matematik och naturvetenskapliga kunskaper utvecklas i ett internationellt perspektiv. TIMSS har vart fjärde år, med början 1995, undersökt matematiska och naturvetenskapliga kunskaper hos elever i årskurs fyra respektive årskurs åtta. I den senaste studien, år 2007, deltog mer än 60 länder. Studien utgår från de deltagande ländernas styrdokument och bygger på en gemensamt överenskommen sammanställning av dessa. Sammanställningen resulterar i ett ramverk (eng. framework) som i sin tur ligger till grund för provuppgifterna (Skolverket, 2006). 1995 genomförde IEA även en studie av kunskaper i matematik och naturvetenskap hos avgångselever, motsvarande elever som går sista året i den svenska gymnasieskolan. I studien ingick 16 länder. I Sverige gjordes studien i tre grupper (Skolverket, 1998):

- Elever i samtliga avgångsklasser
- Matematikgruppen "Specialistundersökningen", i Sverige motsvarade denna grupp avgångselever på NT-linje eller NV program.
- Fysikgruppen "Specialistundersökningen", utgjorde samma grupp som ovan.

Våren 2008 kommer en liknande studie, TIMSS Advanced 2008, att genomföras i de två sistnämnda grupperna. De svenska elever som är aktuella i studien har läst Matematik D och Matematik E, respektive Fysik B. I nuläget har tio länder anmält sitt intresse att ingå i studien.

Provet i TIMSS Advanced 2008 består totalt av 72 uppgifter indelade i sju moduler. Modulerna kombineras till fyra olika prov, bestående av tre moduler vardera. Vissa moduler förekommer alltså i mer än ett prov. (IEA, 2006).

## **Nationella prov**

I den svenska läroplanen är ett av målen en likvärdig skola. För att möjliggöra en likvärdig skola erbjuder Skolverket nationella prov enligt vilka elever i hela landet kan testas på samma villkor. På Skolverkets hemsida presenteras att syftet med de nationella provsystemet skall vara att:

- bidra till ökad måluppfyllelse för eleverna
- förtydliga målen och visa på elevers starka och svaga sidor
- konkretisera kursmål och betygskriterier
- stödja en likvärdig och rättvis bedömning och betygssättning
- ge underlag för en analys av i vilken utsträckning kunskapsmålen nås på skolnivå, på huvudmannanivå och på nationell nivå.

Nationella prov ges i ämnena matematik, engelska och svenska. På gymnasiet är de nationella proven i Matematik A, Engelska A, Svenska B samt Svenska som andraspråk B obligatoriska. För en del ämnen som inte räknas som kärnämnen, däribland Fysik, erbjuder skolverket provbanksprov som ett stöd till lärare i att tolka kursplanen samt pröva hur väl eleverna uppfyller betygskraven. Nationella prov i matematik ges även i kurserna B, C och D. I

Matematik E erbjuds istället för nationellt prov provbanksprov. I denna rapport kommer de nationella proven för kursen Matematik D och provbanksprov för kursen Matematik E att benämnas som nationella prov, NP.

## ***Tidigare studier– Med fokus på matematik och naturvetenskap***

I uppdraget från Skolverket står det att rapporten ”i huvudsak skall följa den struktur som använts i studien ”Med fokus på matematik och naturvetenskap”.” (bilaga 4, sida 1). I den nämnda studien jämför Lindström de tre utvärderingarna TIMSS, PISA och NP år 2003. Den taxonomi som Lindström använt har använts som utgångspunkt för detta arbete. Då Lindströms studie gällde grundskolan har en hel del anpassningar av taxonomin behövt göras för att den ska vara användbar på gymnasienivå.

## ***Teoretisk bakgrund***

### **Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?**

Vilket ämnesinnehåll uppgifter berör är en central aspekt vid jämförelse mellan prov. Å ena sidan kan frågorna på ett prov beröra ämnesinnehåll som eleven inte behärskar. Å andra sidan kan eleven ha kunskaper inom andra ämnesområden än de som provet testar. Då återspeglar inte provresultatet elevens kunskaper totalt sett inom ämnet. De båda fallen kan förekomma samtidigt. Två prov rörande olika ämnesinnehåll kan därmed ge två olika bilder av hur stora kunskaper en elev har inom ämnet. Skulle ett prov testa andra ämnesmässiga kunskaper än vad skolan har som ambition att lära ut motsvarar inte provresultatet hur väl skolan lyckats lära ut ämnet. Ramstedts (1996) studie av centrala prov<sup>1</sup> i fysik visar på skillnader mellan flickors och pojkars resultat beroende av uppgiftens innehåll. Detta understryker vikten av att se till uppgifternas ämnesinnehåll.

Klassificering av ämnesinnehåll kan göras på olika sätt. I sammanställningen av hur mål och kriterier berörs av det nationella provet i Matematik D vt-05 (Umeå Universitet, 2008) har uppgifterna kategoriserats utifrån samtliga ämnesområden som de täcker in. En rad uppgifter anges beröra fler än ett ämnesområde. En annan utgångspunkt är att kategorisera efter primärt innehåll. Detta kan göras med huvud- och underkategorier, t ex *Pythagoras sats* är en underkategori till huvudkategorin *geometri*. Denna utgångspunkt har använts i en rad olika publikationer där uppgifter har skapats eller kategoriserats enligt en taxonomi (IEA, 2006, Skolverket, 2006, Ramstedt, 1996).

### **Vilka tankeprocesser krävs hos eleven?**

När det gäller matematikuppgifter är det inte bara ämnesinnehållet i själva uppgiften som är avgörande för hur svår uppgiften är att lösa. Det är till exempel skillnad mellan att beräkna  $3 + 2$  och att ur ett sammanhang förstå att man behöver beräkna  $3 + 2$  för att komma fram till önskad slutsats. De båda uppgifterna tillhör samma ämnesområde men prövar ändå olika förmågor. Förmågan att lösa problem är något annat än att behärska specifika ämnesområden. Polya skriver om att utveckla elevernas förmåga att lösa problem. Han delar upp problemlösningen i fyra faser. Först och främst måste vi förstå problemet, därefter måste vi se hur de olika sakerna hänger samman med varandra, hur det som söks är relaterat till det som är givet, d.v.s. göra upp en plan. Därefter måste vi genomföra planen och slutligen måste vi gå tillbaka och granska vad vi har gjort (Polya, 2003). Polya beskriver hur man kan lära sig lösa problem

---

<sup>1</sup> Centrala prov motsvarar dagens nationella prov.

man inte är bekant med genom att utveckla generella strategier för problemlösning. Hur väl en elev har utvecklat denna förmåga är naturligtvis intressant att undersöka i en taxonomi.

En känd taxonomi för att klassificera uppgifters kognitiva nivå är Blooms taxonomi. Enligt den klassificeras uppgifter som faktakunskaper, förståelse, tillämpning, analys, syntes och värdering. Den lägsta kognitiva nivån, faktakunskaper, handlar om att kort och enkelt upprepa någonting som man har lärt sig utantill. Därefter rangordnas uppgifterna i nämnd ordning så att förståelse, förmågan att förklara faktakunskaperna, är en högre kognitiv nivå än faktakunskaper och så vidare. Tillämpning är förmågan att sätta in och använda kunskapen i ett sammanhang. Analys handlar om att ta isär komponenter för att förstå strukturen. Syntes är förmågan att kombinera olika förståelser till nya strukturer som ger en ny förståelse. Att värdera innebär att kunna bedöma användningen av den nya strategin (Bloom, 1956).

Bergqvist (2006) skriver i sin avhandling om ytterligare aspekter på de kognitiva processer som krävs för att lösa en uppgift. Hon använder sig av Lithners klassificering där uppgifter klassificeras som att de antingen kräver imitativt resonemang eller kreativt resonemang. En uppgift som är av en obekant typ kräver en annan kognitiv förmåga, kreativt resonemang, än en uppgift som är av en bekant typ, imitativt resonemang. De uppgifter som endast kräver imitativt resonemang delas i sin tur upp i memorerat resonemang och algoritmiskt resonemang. Memorerat resonemang innebär att eleven har memorerat hela svaret. Det kan vara allt ifrån en uppgift där en definition ska anges till att utföra ett bevis som eleven har lärt sig utantill. Algoritmiskt resonemang innebär att eleven använder sig av standardmetoder som alltid fungerar på en viss typ av problem. I detta fall är det alltså inte själva svaret som är memorerat utan metoden som används för att lösa problemet. De uppgifter som klassificeras som att de kräver kreativt resonemang är även de uppdelade i två kategorier, lokalt kreativt resonemang och globalt kreativt resonemang. Uppgifter där eleven till största delen använder sig av algoritmiskt resonemang och endast lokalt behöver använda kreativt resonemang, för att t.ex. justera algoritmen, klassificeras som lokalt kreativt resonemang. Uppgifter där största delen av lösningen kräver kreativt resonemang klassificeras som globalt kreativt resonemang (Bergqvist, 2006).

I TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks (IEA, 2006) finns en taxonomi för indelning i kognitiva förmågor (benämns här efter som TIMSS taxonomi). Denna skiljer på tre olika kognitiva förmågor; veta, tillämpa och resonera. TIMSS taxonomi har likheter med såväl Blooms taxonomi som med de olika kognitiva förmågor som Bergqvist beskriver. Kategorin *veta*, som handlar om att återge faktakunskaper och utföra enkla mekaniska räkneoperationer, liknar den lägsta nivån i Blooms taxonomi och det som Bergqvist beskriver som *imitativt resonemang*. Kategorin *tillämpa*, som handlar om att välja metod för att lösa ett rutinproblem, liknar nivåerna *förståelse* och *tillämpning* i Blooms taxonomi eller det som Bergqvist beskriver som *lokalt kreativt resonemang*. Kategorin *resonera*, som handlar om att analysera ett problem av en typ som inte är känd och välja metod för att lösa detta, liknar nivåerna *analys*, *syntes* och *värdering* i Blooms taxonomi samt det Bergqvist beskriver som *globalt kreativt resonemang*.

### Vilka krav ställs på elevens svar?

Vilka svar som förväntas på en fråga påverkar frågans karaktär. I utvärderingen *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006), kategoriseras uppgifterna utifrån svarstyp. Även i undersökningen *Flickor, pojkar och fysik i ett internationellt perspektiv* (Ramstedt 1999) görs en uppdelning efter huruvida uppgifterna har flervalsoalternativ som svar eller ej.

Redovisning av beräkningar och resonemang bedöms som en del av svaret både i NP (Umeå universitet, 2008) och i TIMSS prov (Skolverket, 1998). Dessutom tas förmågan att uttrycka

sig matematiskt upp i svenska gymnasieskolans kursplaner för såväl Matematik D (Skolverket, 2000b) som Matematik E (Skolverket, 2000c).

”Kriterier för betyget Godkänt /// Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.” (Skolverket, 2000b).

### **Hur presenteras innehållet i uppgiften?**

Denna fråga berör i vilken *kontext* som problemet i uppgiften presenteras, men även uppgiftens fysiska format. Med kontext avses här det sammanhang i vilket uppgiftens text presenterar den matematiska frågeställningen. Ett sådant sammanhang kan vara ämnesinnehållets vardagsförankring.

Englund (1997) beskriver hur vardagsförankring i undervisning skapar ett meningserbjudande för eleven och underlättar förståelsen av ämnesinnehållet. Ett liknade resonemang som Englund har kring undervisning kan göras när det gäller provuppgifter. Om uppgiften kopplar innehållet till verkligheten eller ej, påverkar elevernas förståelse för problemet och därmed hur det kan lösas. Även små skillnader i kontext hos uppgifter<sup>2</sup> med samma ämnesinnehåll har visat sig kunna få stora skillnader i elevernas lösningsfrekvens (Bergqvist, 2005).

Förmågan att använda och tolka grafer och tabeller är en viktig del i matematiken som ägnas stor uppmärksamhet i de svenska kursplanerna (Skolverket, 2000a, 2000b).

---

<sup>2</sup> Två i övrigt likvärdiga uppgifter förekom på de två versionerna av nationella provet för kursen matematik B, vårterminen 2004. En uppgift handlade om att köpa pizza och en om att köpa kaffe. Eleverna som fick uppgiften om att köpa pizza hade en högre lösningsfrekvens än de elever som fick uppgiften om att köpa kaffe.

# Metod

Jämförelse av provuppgifter mellan TIMSS och NP kräver någon form av kategorisering, en taxonomi. Den taxonomi som används ska dela in uppgifterna i tydliga fack som är användbara för att tydliggöra skillnader och likheter mellan proven. En taxonomi anpassad för denna studies syfte har tagits fram. Utgångspunkten för taxonomin har varit den taxonomi som används i *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006). Utformningen av kategorisering enligt ämnesinnehåll och kognitiv nivå är till största del hämtad från *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* (IEA, 2006). För att få en taxonomi anpassad till studiens syfte, har ett antal testuppgifter räknats. Dessa har klassificerats enligt ovan nämnda taxonomier, och granskats efter ytterligare aspekter som på något sätt kan tänkas påverka uppgiftens lösbarhet. En hel del nya aspekter har tillkommit och en hel del ändringar i den befintliga taxonomin har gjorts för att taxonomin bättre skall passa studiens syfte. Vissa ändringar i taxonomin har även gjorts parallellt med att de aktuella provuppgifterna har klassificerats. Då ändringar har gjorts i taxonomin, har klassificeringen av samtliga, redan klassificerade, uppgifter anpassats till ändringen.

Med hjälp av den framtagna taxonomin har uppgifterna klassificerats av rapportens båda författare. Grundtanken var att vi tillsammans skulle klassificera uppgifter och justera taxonomin tills dess vi kände oss samstämmiga och nöjda med taxonomin. Därefter skulle vi göra ett test där vi klassificerade ett antal uppgifter var för sig, för att sedan jämföra resultatet. Om jämförelsen visade på ett tillförlitligt resultat skulle vi därefter klassificera uppgifter var för sig.

Jämförelsen visade dock på en viss skillnad i kategoriseringen. Då vi samtalade om uppgifterna visade det sig inte främst bero på att vi tolkat kriterierna olika utan snarare på att vi antingen sett uppgifterna ur olika perspektiv eller på att vi helt enkelt gjort slarvfel. Då det är många kategorier på varje uppgift är det lätt att koncentrationen sviker och att fel förr eller senare åstadkoms. För att uppnå en god reliabilitet valde vi att tillsammans kategorisera samtliga uppgifter. Utöver de i taxonomin angivna kategorierna noteras även eventuella anmärkningar på uppgifterna.

## **Urval av uppgifter**

Utgångspunkten för studien har varit att kategorisera samtliga uppgifter från TIMSS Advanced 2008 och jämföra dessa med ungefär lika många uppgifter från NP i kurserna Matematik D och Matematik E. De tidigare matematikkursernas innehåll berörs till stor del av dessa två kursers innehåll. Dock finns det visst ämnesinnehåll som endast berörs i de tidigare kurserna. TIMSS provuppgifter är inte kopplade till någon speciell gymnasiekurs i matematik. Att endast jämföra NP för Matematik D och Matematik E med TIMSS provuppgifter kan därmed leda till en skev jämförelse. Det ämnesinnehåll som endast finns med i de tidigare kurserna kommenteras i diskussionen.

Matematikdelen i TIMSS Advanced 2008 innehåller 72 uppgifter, varav fyra består av två deluppgifter. Totalt innehåller matematikdelen alltså 76 uppgifter. För att få motsvarande mängd uppgifter från NP krävs fyra prov. För att få en jämn fördelning på provuppgifterna har två prov från D-kursen i matematik och två prov från E-kursen i matematik valts ut. För Matematik D valdes det senaste genomförda provet, vårterminen 2007 och det senast genomförda provet där sekretessen är hävd, vårterminen 2005. Dessa två prov består av sammanlagt 43 deluppgifter. För Matematik E gjordes provvalet enligt samma princip vilket resulterade i att provbanksprovet från vårterminen 2005 och höstterminen 2004 kategoriserades. Dessa två består av sammanlagt 45 deluppgifter. Då provuppgifterna från

TIMSS är sekretessbelagda, har även några offentliggjorda uppgifter från TIMSS -95 (Skolverket, 1998) klassificerats. Dessa uppgifter används inte som underlag i jämförelsen mellan TIMSS och NP, utan endast som exempel på klassificeringar i denna rapport.

## ***Vad räknas som en uppgift?***

### **Deluppgifter**

Det finns skillnader mellan TIMSS prov och NP när det gäller uppgifternas omfång. De svenska nationella proven inom matematik har betydligt fler uppgifter som består av flera deluppgifter, av typen 8a, 8b, 8c, än TIMSS prov. Karaktären på deluppgifterna är ofta av en så varierande typ att deluppgifterna klassificeras olika. Motsvarande uppgifter i TIMSS är oftast uppdelade i flera olika uppgifter med eget nummer. För att motverka att denna skillnad i numrering skall påverka resultatet i denna studie behandlas varje deluppgift som en egen uppgift, både i TIMSS och NP.

### **Olika lösningsmetoder**

Det förekommer uppgifter som uppenbarligen går att lösa med flera olika metoder där de olika lösningsmetoderna motsvarar olika ämnesinnehåll i klassificeringen. I dessa fall kategoriseras uppgiften en gång för varje lösningsmetod. Exempel uppgift 3 i Bilaga 1.

## ***Taxonomi***

### **Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?**

I teoretisk bakgrund presenteras två utgångspunkter för kategorisering av provuppgifters innehåll. En utgångspunkt är att kategorisera varje uppgift utifrån dess primära innehåll, d v s vilket ämnesområde som i största utsträckning berörs, den andra är att kategorisera varje uppgift utifrån samtliga ämnesområden som uppgiften täcker in.

För de uppgifter som kräver kunskaper från flera olika innehållsområden kommer en kategorisering med den senare utgångspunkten bättre att beskriva uppgiftens bredd. Ett problem med en kategorisering utifrån samtliga berörda innehållsområden är behovet av gränsdragning. Hur mycket av ett ämnesinnehåll behöver uppgiften beröra för att den skall kategoriseras enligt detta ämnesinnehåll?

En annan svårighet uppstår när en uppgift går att lösa på olika sätt, där de olika sätten motsvarar olika ämnesinnehåll. Hur mycket behöver de olika lösningarna innehållsmässigt skilja sig åt för att motivera dubbel kategorisering?

Mot bakgrund av dessa svårigheter valdes metoden att kategorisera uppgifternas ämnesinnehåll efter primärt innehåll, med huvud- och underkategori.

Taxonomi som använts utgår från TIMSS uppställning över ämnesinnehåll. I de fall uppgifter i NP inte stämt överens med något delområde i TIMSS uppställning har antingen befintliga områden breddats genom en omformulering eller också har nya delområden tillkommit. De delområden som har tillkommit är 1.7, 2.6 och 2.7.

**Tabell 1: Ämnesinnehåll**

| Kod | Huvudområde         | Kod | Delområde                                                                                                                    |
|-----|---------------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | Algebra             | .1  | Komplexa tal.                                                                                                                |
|     |                     | .2  | Serier och summor.                                                                                                           |
|     |                     | .3  | Kombinatorik, sannolikhet, statistik.                                                                                        |
|     |                     | .4  | Ekvationslösning och olikheter, inklusive logaritm- och exponentialfunktioner.                                               |
|     |                     | .5  | Konstruera eller känna igen grafer, tabeller, ordnade par och text som motsvarar en given funktion.                          |
|     |                     | .6  | Beräkna en given funktions värde och tecken för ett givet variabelvärde eller intervall, inklusive funktioner av funktioner. |
|     |                     | .7  | Lösning och hantering av trigonometriska funktioner och ekvationer.                                                          |
| 2   | Derivata/Integraler | .1  | Gränsvärden, kontinuitet och deriverbarhet.                                                                                  |
|     |                     | .2  | Derivera polynom och funktioner. Tillämpa produkt-, kvot- och kedjeregeln.                                                   |
|     |                     | .3  | Problemlösning med hjälp av derivator.                                                                                       |
|     |                     | .4  | Användning av första och andraderivator för bestämning av extrempunkter och för att skissa funktionens graf.                 |
|     |                     | .5  | Integrera funktioner, tillämpa integraler, numeriska lösningar av integraler.                                                |
|     |                     | .6  | Differentialekvationer, analytiska och numeriska lösningar och tolkningar.                                                   |
|     |                     | .7  | Ställa upp integraler som beskriver rotationsvolymen.                                                                        |
| 3   | Geometri            | .1  | Använda geometriska egenskaper för att lösa problem. Bevisa enkla geometriska samband i två eller tre dimensioner.           |
|     |                     | .2  | Lös problem med hjälp av gradienter, skärning med y-axel och skärning med räta linjer i två dimensioner.                     |
|     |                     | .3  | Ekvationer och samband för cirkeln.                                                                                          |
|     |                     | .4  | Använda trigonometri för att lösa problem som involverar trianglar.                                                          |
|     |                     | .5  | Enklare hantering av vektorer.                                                                                               |

## Vilka tankeprocesser krävs hos eleven?

### Kognitiv nivå

Klassificeringen kognitiv nivå syftar till att återspegla graden av resonemang och vilken tankeverksamhet som krävs för att lösa en uppgift. Definitionerna av denna taxonomins kognitiva nivåer är baserad på TIMSS Advanceds ramverk. Ett stort arbete lades ner på att ta fram en bra indelning av de kognitiva nivåerna. Svårigheten låg i att formulera kategorierna så att de ger en entydig klassificering av uppgifterna. Resultatet är en fri tolkning av TIMSS taxonomi med stänk av såväl den indelning som Bergqvist använder sig av som av Blooms taxonomi. Då det visade sig finnas uppgifter som testar kunskaper som inte lärs ut i svensk gymnasieskola, tillkom kategori 4, *förutsättningar saknas*. Kategoriseringen i fyra nivåer kan grovt ses som:

1. Texten i uppgiften anger vilken metod som skall användas
2. Eleven väljer metod/strategi för ett bekant problem
3. Eleven väljer metod/strategi för icke bekant problem
4. Eleven saknar nödvändiga förkunskaper

Problemets komplexitet är en viktig faktor. Går problemet att lösa i ett steg eller måste ett eller flera delresultat först beräknas eller resoneras fram. Uppgifterna från nationella prov i Matematik D kategoriseras utifrån en tänkt elev som läser matematik till och med D-kursen. Uppgifterna från provbanksprov i Matematik E kategoriseras utifrån en tänkt elev som även läser Matematik E. De uppgifter från TIMSS där elevens förutsättning kraftigt påverkas av huruvida eleven läser E-kursen eller ej, kategoriseras både utifrån D-kurseleven och utifrån E-kurseleven. Hur bekant eleven är med en uppgift avgörs genom jämförelse mellan uppgiften och de övningsuppgifter som finns i ett av de vanligaste läromedlen i matematik i svensk gymnasieskola. Det läromedel som använts i denna studie är *Matematik 3000* (Björk, 2000; Björk, 2001), för C- och D-kursen samt E-kursen. Författarnas tänkta målgrupp för dessa läromedel "Naturvetenskap och teknik" motsvarar de elever som TIMSS Advanced har som målgrupp.

**Tabell 2: Kognitiv nivå**

| Kognitiv nivå        | Kod | Uppgifter där eleven                                                                                              |
|----------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Veta                 | 1   | redogör för fakta och koncept eller utför given procedurer                                                        |
| Tillämpa             | 2   | använder faktakunskaper för att välja eller ställa upp modeller och lösa bekanta problem                          |
| Resonera             | 3   | generalisera/analysera ett resultat eller ställa upp modeller för komplexa eller obekanta problem samt lösa dessa |
| Förutsättning saknas | 4   | måste ha kunskaper utöver innehållet i den aktuella kursen.                                                       |

De tre nivåerna (*Förutsättning saknas* undantaget) angivna i Tabell 2 är inbördes rangordnade, där *Resonera* motsvarar den högsta nivån och *Veta* den lägsta. Varje uppgift kategoriseras efter den högsta kognitiva nivå som krävs för att nå full poäng och högsta betygs-/kvalitetsnivå. För att tillhöra en nivå krävs det att minst ett av villkoren som anges i listorna nedan är uppfyllt. Samtliga villkor behöver alltså inte uppfyllas.

## **Veta**

Grundläggande för att en uppgift ska klassificeras som *Veta* är att det i uppgiften anges vilken metod som ska användas. I kategorin *Veta* ingår det att kunna utföra matematiska procedurer, förstå matematiskt språk, symboler och grundläggande egenskaper hos tal.

- Återge definitioner, terminologi, beteckningar, matematiska konventioner, tals egenskaper, geometriska samband.
- Känna igen matematiskt lika uttryck, t ex olika skrivsätt för samma funktion eller samband.
- Utföra matematiska procedurer, t ex beräkna derivatan av polynom eller lösa en enkel ekvation.
- Utläsa information från grafer tabeller eller andra liknande källor

## **Tillämpa**

För att en uppgift skall klassificeras som *Tillämpa* krävs någon form av val av metod för att lösa problemet, samt att uppgiftens typ är bekant. Problemen kan vara såväl renodlat matematiska som ha verklighetsanknytning.

- Välja ut en lämplig metod eller strategi för att lösa ett problem som kan lösas med vanligt förekommande metoder.
- Skapa en alternativ likvärdig framställning av ett givet matematiskt uttryck, samband, eller mängd information
- Ställa upp en lämplig modell, t ex en ekvation eller ett diagram för att lösa rutinproblem.
- Lösa rutinproblem, problemtyper som studenterna sannolikt har stött på i skolan. T ex lösa problem som kräver derivering av ett polynom eller tillämpning av geometriska samband.

## **Resonera**

För att en uppgift skall klassificeras som *Resonera* krävs att matematiska beräkningar eller metoder härleds via resonemang. Behovet av resonemang kan bero på att sammanhanget är nytt eller på att problemets lösning involverar flera steg, som baseras på kunskap från flera olika områden inom matematiken.

- Undersök given information och välj ut de matematiska fakta som är nödvändiga för att lösa ett särskilt problem. Bestäm och beskriv eller använd förhållande mellan variabler eller objekt i matematiska sammanhang. Gör relevanta slutledningar från den givna informationen.
- Utvidga den domän inom vilken ett matematiskt resonemang och en problemlösning är tillämpningsbar. Detta genom att återge resultatet i mer generell form.
- Kombinera matematiska procedurer för att nå resultat och kombinera resultat för att nå ytterligare resultat. Koppla ihop olika kunskapsområden och relaterade framställningar och koppla samman relaterade matematiska idéer.
- Bevisa om en utsaga är sann eller falsk genom att referera till matematiska resultat eller samband.
- Lösa problem av en typ, såväl i matematiska sammanhang som verklighetsbaserade, som eleven osannolikt har stött på tidigare. Tillämpa matematiska procedurer i okända eller komplexa kontexter.

### **Förutsättning saknas**

Uppgifter som klassificeras som *Förutsättning saknas* är uppgifter där eleven helt enkelt saknar förutsättningar för att lösa problemet, oavsett tankeprocess. Då TIMSS är en internationell studie som involverar många länder, förekommer även vissa uppgifter där innehållet inte finns representerat i de svenska kursplanerna. Vissa av dessa uppgifter går att lösa ändå med en hög kognitiv nivå, medan andra innehåller begrepp som är avgörande för uppgiftens lösning. Som exempel skulle en uppgift där determinanten av en matris efterfrågas klassificeras som en fyra, eftersom begreppet determinant normalt inte är bekant för en svensk gymnasieelev. Eleven saknar förutsättningar för att kunna lösa den typen av uppgift. Om däremot begreppet förklaras i uppgiften och detta leder till en rimlig chans för en oinvigd att klara uppgiften, klassificeras den som någon av de kognitiva nivåerna 1-3.

### **Beräkningar**

I *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006) definierar Lindström krav på beräkningar i tre steg; Inga beräkningar, Mindre avgörande beräkningar och Mera avgörande beräkningar. Då Lindstöms rapport behandlar prov i grundskolan, är definitionerna för krav på beräkningar inte anpassade till prov på gymnasienivå. Följden av att använda samma kriterier skulle bli att de flesta uppgifterna på gymnasienivå skulle klassificeras som den högsta beräkningsnivån. Därför har gränserna för *Beräkningar* förskjutits så att det ställs högre krav på beräkningarna för att klassificeras som den högsta beräkningsnivån. Förutom att skalan har förskjutits har kategorierna fått andra namn, som stämmer bättre överens med den nya indelningen.

**Tabell 3: Beräkningar**

| Beräkningar    | Kod | På denna uppgift krävs                                                                                                                                           |
|----------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ingen/triviala | 0   | inga beräkningar eller endast enkel huvudräkning                                                                                                                 |
| Rakt på        | 1   | det papper och penna alternativt miniräknare för att hålla reda på beräkningarna. Endast en svårare beräkning krävs för att komma fram till svaret på uppgiften. |
| Komplexa       | 2   | ett eller flera delresultat för att kunna utföra den slutgiltiga beräkningen.                                                                                    |

Beräkningar som klassificeras som *Rakt på* innehåller i regel endast en svårare beräkning som exempelvis att beräkna en integral. *Komplexa* beräkningar betecknar i regel uppgifter som kräver ett eller flera delresultat för att nå fram till det slutgiltiga svaret. Som delresultat räknas beräkningar som i sig klassificeras som *Rakt på*, men kan även vara bestämning av giltighetsintervall eller hänsynstagande till andra villkor som spelar en avgörande roll för att lösa uppgiften korrekt. Ett exempel på en *komplex* beräkning är att man måste beräkna två olika integraler för att bestämma arean av ett område.

Med denna kategorisering finns en viss överlappning mellan kognitiv nivå och beräkningar, men de har olika huvudfokus. Både den kognitiva nivån *resonera* och beräkningsnivån *komplexa beräkningar* berör uppgiftens komplexitet. För den kognitiva nivån krävs att de kunskaper som kombineras baseras på olika områden inom matematik. Detta krav ställs inte för att beräkningarna skall kategoriseras som *komplexa*.

### Miniräknare tillåten

TIMSS tillåter miniräknare på samtliga uppgifter, medan de nationella proven består av två delar, en del där miniräknare är tillåten och en del där miniräknare inte är tillåten. Denna kategori kom till för att kartlägga denna skillnad.

**Tabell 4: Miniräknare tillåten**

| Miniräknare | Kod | Miniräknare är               |
|-------------|-----|------------------------------|
| Nej         | N   | ej tillåten på denna uppgift |
| Ja          | J   | tillåten på denna uppgift.   |

### Hjälpmedel

De hjälpmedel som är tillåtna utöver penna och linjal är miniräknare och formelsamling. Samtliga prov som undersöks tillåter formelsamling. Formelsamlingen som följer med NP är betydligt mer omfattande än vad TIMSS formelblad är. Detta kan betyda att TIMSS ställer högre krav på utantillkunskaper, men det kan lika gärna betyda att NP:s formelsamling innehåller en mängd fakta som inte kommer till nytta på det aktuella provet och därmed ställer större krav på eleven att målmedvetet söka hjälp av formelbladet. Samtliga uppgifter där formelsamlingen innehåller definitioner eller samband som används vid beräkningen markeras med ett F (formelsamling).

Att miniräknare är ett tillåtet hjälpmedel betyder inte att den är till någon hjälp för att lösa en uppgift. För att kunna avgöra om det finns en skillnad mellan andelen poäng där man får ha miniräknare och där miniräknare är till någon hjälp, samt för att kartlägga informationen i formelbladen konstruerades denna aspekt i taxonomin. De uppgifter där beräkningarna tar väsentligt längre tid utan miniräknare markeras med ett M (miniräknare).

**Tabell 5: Hjälpmedel**

| Hjälpmedel                    | Kod | Vid lösning av uppgiften ger                                                       |
|-------------------------------|-----|------------------------------------------------------------------------------------|
| Ingen                         | 0   | varken formelsamling eller miniräknare är väsentlig hjälp                          |
| Formelsamling                 | F   | formelsamlingen innehåller definitioner eller samband som används vid beräkningen. |
| Miniräknare                   | M   | Beräkningar tar väsentligt längre tid utan räknare                                 |
| Formelsamling och miniräknare | FM  | båda villkoren F och M gäller.                                                     |

### Vilka krav ställs på elevens svar?

#### Svarstyp

En del uppgifter i de prov som utvärderas kan ge fler än en poäng, där olika typer av svar krävs för olika poängsteg. Dessa uppgifter klassificeras utifrån vilken typ av svar som krävs för att nå full poäng, eller högsta betygsnivå, på den aktuella uppgiften. Denna indelning är hämtad från *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006) varefter uttrycken har översatts till svenska.

**Tabell 6: Svarstyp**

| Svarstyp         | Kod | Uppgiften besvaras genom                                                                                                                                  |
|------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Flervals         | FV  | val av flera givna svarsalternativ, där antal korrekta alternativ anges i uppgiften.                                                                      |
| Komplex flervals | KFV | val av flera givna svarsalternativ där okänt antal alternativ är korrekt eller där flera olika begrepp ska paras ihop med en definition eller ett fenomen |
| Kortsvar         | KS  | uträknat värde eller enstaka ord, exempelvis $x_1=2$ $x_2=0$                                                                                              |
| Långsvar         | LS  | elevens egenkonstruerade redovisning eller utsaga som motiveras eller vars giltighet kommenteras                                                          |
| ... rita         | _r  | att bara rita bild, graf eller ställa upp tabell (KS_r), eller att komplettera en utsaga med att rita (LS_r).                                             |

### Krav på redovisning

Denna kategori kom till för att möjliggöra en jämförelse av hur väl de båda provtyperna prövar förmågan att i skift uttrycka sig matematiskt. TIMSS uppgifter kräver som standard endast ett svar på uppgiften. I de fall där redovisning krävs står det speciellt angivet. I NP är förhållandet det omvända, om inget annat anges krävs redovisning för full poäng på uppgiften. I de fall då redovisning inte krävs står det uttryckligen att "endast svar fordras". Alla uppgifter som klassificeras som långsvar klassificeras även som *Redovisning krävs*.

**Tabell 7: Krav på redovisning**

| Redovisning | Kod | För full poäng erfordras                           |
|-------------|-----|----------------------------------------------------|
| Krävs       | J   | redovisade beräkningar eller resonemang            |
| Krävs inte  | N   | ingen redovisning av beräkningar eller resonemang. |

### Hur presenteras innehållet i uppgiften?

#### Textmängd

För vissa elever är det avgörande hur mycket text uppgiften presenteras med. Om man drar det till sin spets och tänker sig en lätt matematisk uppgift som beskrivs med en lång uppsats så blir uppgiften mer ett test av läsförståelse än en matematisk uppgift. En uppgift med mycket text prövar förmågan att sälla ut och använda väsentlig information.

I *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006) har textmängden räknats i antal rader. Andra tänkbara metoder för bestämning av textmängd är att räkna antal ord eller tecken som texten består av. Metoden att räkna antalet tecken ger olika utslag för långa respektive korta ord samt är oberoende av teckensnitt och spaltbredd. Metoden att räkna antalet textrader påverkas av spalt- och teckenbredd vilket gör kategoriseringen efter antal rader mindre pålitlig. Uppgifterna som kategoriseras i detta arbete finns endast tillgängliga i tryckt form, vilket medför ett mycket stort arbete att räkna antalet tecken i texten till varje uppgift. Med denna bakgrund används medelvägen att räkna antal ord som underlag i denna kategorisering. Enskilda siffror, tecken, variabelbenämningar eller ekvationer räknas inte som ord. Exempelvis räknas ordet "en" som ett ord men inte siffran "1".

**Tabell 8: Textmängd**

| Textmängd | Kod | Uppgiften presenteras |
|-----------|-----|-----------------------|
| Inga ord  | 0   | utan några ord        |
| Ett ord   | 1   | med ett ord           |
| Två ord   | 2   | med två ord           |
| Etc.      | ... | ...                   |

I de fall där en inledande text berör flera av de följande deluppgifterna har för var och en av dessa deluppgifter antal ord registrerats som summan av orden i den genomsamma texten och deluppgiftens specifika text. I flervalsuppgifter räknas ord som ingår i de olika svarsalternativen. Renodlade instruktioner, som t ex ”endast svar krävs”, räknas inte med i textmängden.

### Grafik

Med grafik avses bilder, tabeller, grafer och diagram som förekommer i uppgifterna. Samma klassificering som i *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006) har använts med tillägget *ingen* för uppgifter som saknar grafik.

**Tabell 9: Grafik**

| Grafik          | Kod | Uppgiften presenteras                                                                        |
|-----------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ingen           | N   | utan hjälp av grafik                                                                         |
| Dekoration      | D   | med bild som på något sätt illustrerar uppgiften men som inte tillför nödvändig information  |
| Informativ bild | B   | med bild med nödvändig eller klargörande information för att kunna besvara uppgiften         |
| Tabell          | T   | med tabell med nödvändig eller klargörande information för att kunna besvara uppgiften       |
| Diagram/graf    | G   | med diagram/graf med nödvändig eller klargörande information för att kunna besvara uppgiften |

I uppgifter med mer än en sorts grafisk illustration anges samtliga typer av grafik. En uppgift med både en informativ bild och en tabell, kategoriseras som BT. Grafik i gemensam text till deluppgifter, värderas utifrån dess betydelse för varje deluppgift. Exempel på detta är uppgift 11 i Bilaga 2.

### Ämnesord

Svårighetsgraden på de ämnesord som ingår i uppgiftens text klassificeras efter hur sent i utbildningen ordet har introducerats samt hur vanligt förekommande det är. Uppgifterna klassificeras efter det ord i texten som har högst nivå. Kategoriseringen efter ämnesord utgår från den klassificering som använts i *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006). Denna klassificering visade sig dock snabbt vara intetsägande, då den är tänkt för uppgifter på grundskolenivå. För att uppnå en större spridning mellan olika uppgifter har två kategorier tillkommit och övriga omformulerats. Kategori 0, omformulerades till att även omfatta begrepp inom ämnessfären som används i vanligt tal, för att inte utesluta räkneord och ord som triangel eller cirkel. Det verkade meningslöst att en och samma kategori skulle innehålla ordet ”ett” och ordet ”ekvation”. Då många uppgifter visade sig innehålla

grundläggande ord inom senare matematik delades kategori 2 upp i två olika kategorier, kategori 2 och 3. På så sätt blir det en skillnad mellan de uppgifter som innehåller de mest grundläggande ämnesorden och de som innehåller mindre vanligt förekommande ämnesord. Då några uppgifter i TIMSS prov visade sig innehålla ord som normalt inte lärs ut i svenskt gymnasium, tillkom även kategori 4, *okänd vokabulär*. För att en uppgift ska klassificeras som *okänd vokabulär*, krävs det att något ord i uppgiften inte finns med i *Matematik 3000* (Björk, 2000; Björk, 2001).

**Tabell 10: Ämnesord**

| Ämnesord                              | Kod | I presentationen av uppgiften förekommer                                                                                                                    |
|---------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Inga eller allmänna i vardagsspråk    | 0   | inga ord som är speciella för ämnet eller ämnesspecifika ord som förklarats samt begrepp inom ämnessfären som används i vanligt tal                         |
| Grundläggande ämnesvokabulär          | 1   | ord som är specifika för det aktuella ämnet som eleven mött tidigare i sin utbildning, exempelvis funktion, riktningskoefficient                            |
| Grundläggande specialiserad vokabulär | 2   | ord som definieras i Tabell 11                                                                                                                              |
| Övrig specialiserad vokabulär         | 3   | ord som är specifika för det aktuella ämnet och som eleven vanligen förväntas ha lärt under det senaste skolåret och som inte ingår bland orden i Tabell 11 |
| Okänd vokabulär                       | 4   | ord som är specifika för det aktuella ämnet och som eleven sannolikt aldrig har stött på.                                                                   |

Med ord som eleven mött tidigare i sin utbildning åsyftas även ämnesspecifika ord som förekommer inom kurserna Matematik A och Matematik B. Vi valde att inte ta med kursen Matematik C. Orsaken till detta är att C- och D-kursen i stor utsträckning berör samma ämnesområde. Vilket gör att begreppet derivata, som introduceras i C-kursen, i stor utsträckning på nytt tas upp i D-kursen. För att avgöra om ordet derivata hör till C- eller D-kursen måste ordets innebörd analyseras i varje enskilt fall. Kategoriseringen skulle då snarare bli utifrån vilka begrepp som används, än vilka ämnesord.

**Tabell 11: Listning av grundläggande specialiserad vokabulär.**

|                                          |                                                        |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
|                                          | Grundläggande specialiserad vokabulär                  |
| Elever som har läst Matematik D          | Derivata, talföljd, integral                           |
| Elever som dessutom har läst Matematik E | Komplexa tal, komplexa talplanet, differentialekvation |

### Verklighetsanknytning

Aspekten *Verklighetsanknytning* är direkt hämtad ur *Med fokus på matematik och naturvetenskap* (Skolverket, 2006). De olika kategorierna har fått nya namn för att bättre återspegla vad de visar på.

**Tabell 12: Verklighetsanknytning**

| Veklighetsanknytning | Kod | Uppgifter som ställs i ett sammanhang                                                                                                                     |
|----------------------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ingen                | 0   | Som inte anknyter till en värld utanför ämnets interna konkretioner                                                                                       |
| Konstlad             | 1   | som baseras på en verklighet utanför ämnesteorin och anknyter till praktiska situationer men med frågor som troligen inte skulle ställas i verkligheten   |
| Verklig              | 2   | som är verklighetsanknutet (vardagsliv, samhällsligt, yrkesliv, forskning) med frågeställningar som kan förutsättas relevanta i det angivna sammanhanget. |

I vissa lägen är det svårt att avgöra om en uppgift är *konstlad* eller *verklig*. Bedömningen i tveksamma fall har därför varit om frågeställningen framstår som verklig eller inte ur en gymnasieelevs perspektiv.

## Vilken är uppgiftens relativa vikt?

### Poäng

Aspekten poäng har tillkommit för att möjliggöra en viktning av andra aspekter som jämförs. De nationella proven har betydligt färre uppgifter än vad TIMSS prov har. Det är inte rättvisande att enbart se till hur många uppgifter som behandlat respektive område, då vissa uppgifter är betydligt mer omfattande än andra och ger en mer nyanserad bild av elevens kunskaper. En uppgift som kan ge fem poäng blir fem gånger så betydelsefull för det totala resultatet som en uppgift som ger en poäng. Poängsättningen av en uppgift bör ha någon förankring i hur stor arbetsinsats som krävs för att lösa uppgiften, kvalitativt eller kvantitativt. Därmed är det av intresse att titta även på hur många poäng respektive uppgift ger. Poäng anger kort och enkelt hur många poäng uppgiften som mest kan ge. I de fall uppgiften är en så kallad soluppgift<sup>3</sup> (α), räknas antalet G och VG poäng som uppgiften kan ge. Solen värderas inte som poäng.

**Tabell 13: Poäng**

| Poäng | Kod | Maximala poängen för uppgiften eller deluppgiften |
|-------|-----|---------------------------------------------------|
| 1     | 1   | summan av g-poäng och vg-poäng är ett             |
| 2     | 2   | summan av g-poäng och vg-poäng är två             |
| Etc   | ... | ..                                                |

Vi har inte haft tillgång till poäng på alla TIMSS uppgifter, vilket har tvingat fram en metod för att möjliggöra en ungefärlig viktning. För samtliga flervalsuppgifter ges en poäng. Övriga uppgifter där endast ett svar efterfrågas har tilldelats en poäng. Om uppgiften efterfrågar mer än ett svar (där ett svar kan vara ett konstaterande om ett ogiltigt svar) alternativt om det är en uppgift som klassificerats som beräkningar 2 ges den 2 poäng. För uppgifter där redovisning krävs ges en poäng extra. Uppgifterna kan alltså högst tilldelas tre poäng.

<sup>3</sup> Uppgifter där svaret förutom poäng även bedöms enligt kriterierna för betyget mycket välgodkänt.

## **Jämförelse**

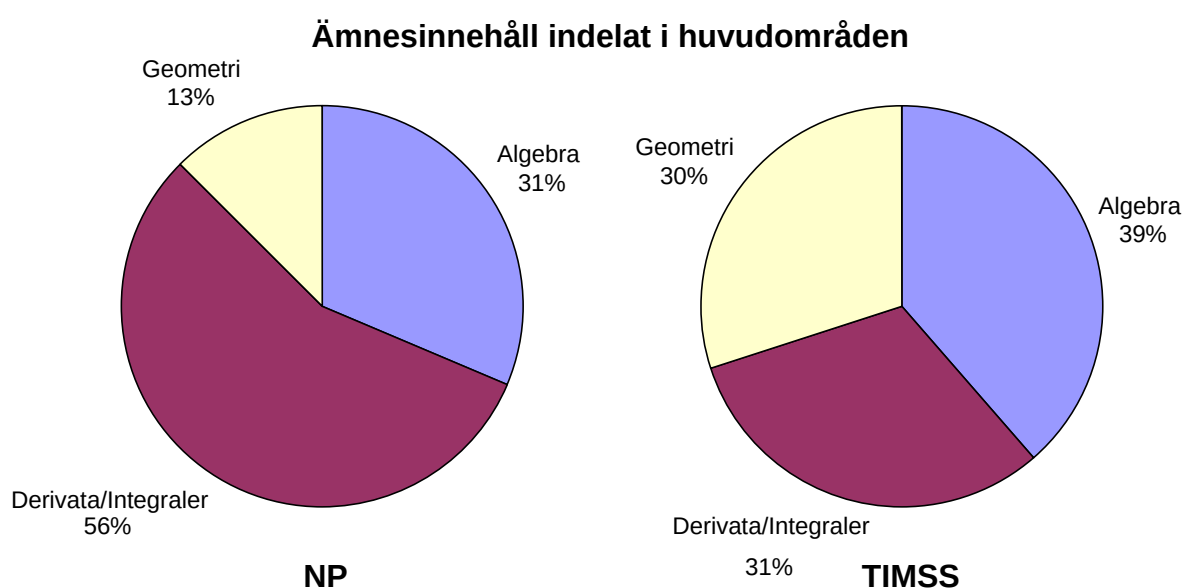
Jämförelse av samtliga undersökta aspekter har gjorts med hjälp av Excels summeringsfunktioner. För samtliga aspekter har antalet uppgifter inom respektive kategori summerats. Dessutom har det totala antal poäng som uppgifter i respektive kategori kan ge beräknats. Det hela resulterar i två diagram för respektive provtyp och aspekt. Ett av diagrammen beskriver den procentuella andelen uppgifter inom respektive kategori. Det andra beskriver den procentuella andelen poäng som uppgifterna inom respektive kategori kan ge. Utifrån diagram och tabeller har de båda provtyperna jämförts varpå resultat presenteras i resultatdelen.

# Resultat

## Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?

### Huvudområde

Jämförelse av innehållet sorterat efter huvudkategorier visar på en viss skillnad mellan de båda provtyperna. TIMSS Advanceds prov har en relativt jämn fördelning mellan de tre huvudkategorierna. Mer än hälften av poängen i NP tillhör kategorin *Derivata/Integraler* och 13 procent tillhör kategorin *Geometri*. Andelen poäng inom kategorin *Algebra* är ungefär lika stor i de båda provtyperna. Det är små skillnader mellan om det huvudsakliga ämnesinnehållet jämförs som andel uppgifter eller som andel poäng. De diagram som presenteras här visar andelen poäng som respektive huvudområde kan ge.



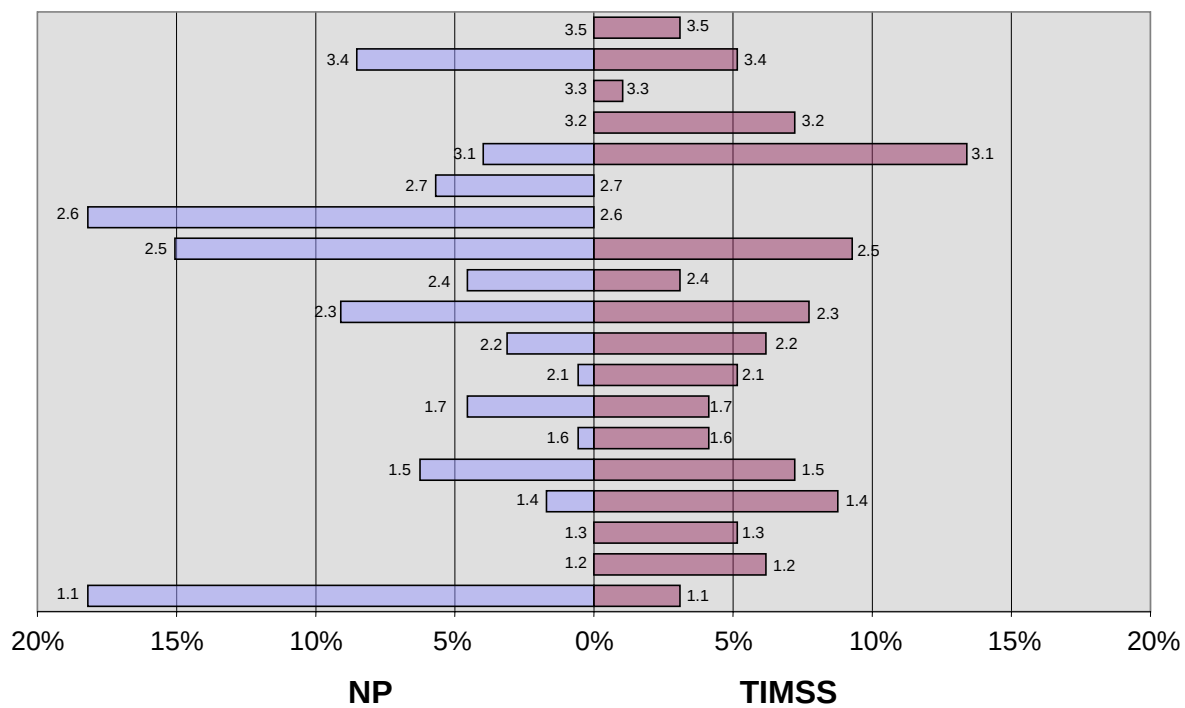
**Figur 1: Procentuell fördelning av poäng mellan ämnesinnehåll, kategoriserat i huvudområden, för NP respektive TIMSS.**

### Delområde

Jämförelsen av poängfördelningen mellan de innehållsmässiga delområdena visar på en del skillnader. Några delområden finns endast representerade bland TIMSS uppgifter<sup>4</sup>; 1.2 *serier och summor*, 1.3 *kombinatorik, sannolikhet och statistik*, 3.2 *lösa problem m h a gradienter*, 3.3 *ekvationer och samband för cirkeln* och 3.5 *vektorer*. De delområden som endast finns representerade i NP är; 2.6 *differentialekvationer* och 2.7 *rotationsvolym*. Andra kategorier som visar på en stor skillnad är 1.1 och 3.1. 1.1 *komplexa tal*, förekommer betydligt mer i NP än i TIMSS och 3.1 *använda geometriska egenskaper för att lösa problem*, förekommer betydligt mer i TIMSS än i NP.

<sup>4</sup> Dessa delområden, undantaget 3.5 *vektorer*, berörs i Matematik B eller Matematik C. Se resultatdiskussionen på sida 35.

## Ämnesinnehåll indelat i delområden

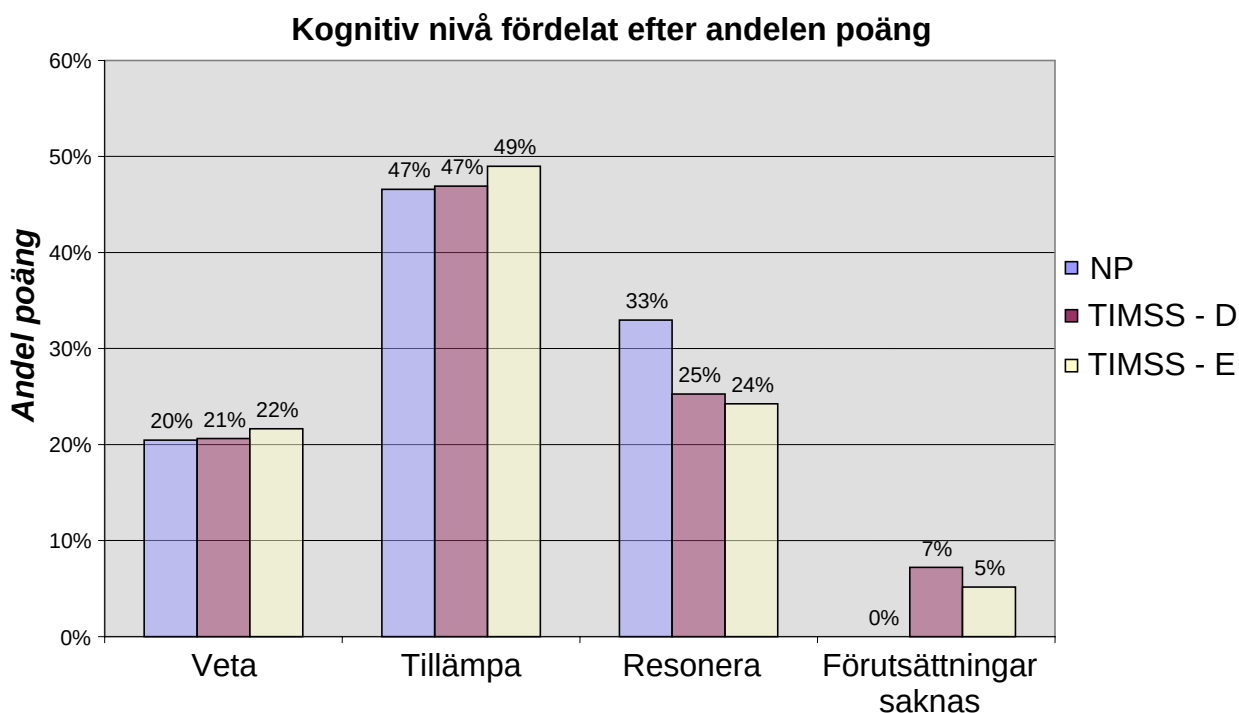


Figur 2: Procentuell fördelning av poäng mellan ämnesinnehåll, kategoriserat i delområden, för NP respektive TIMSS.

## Vilka tankeprocesser krävs av eleven?

### Kognitiv nivå

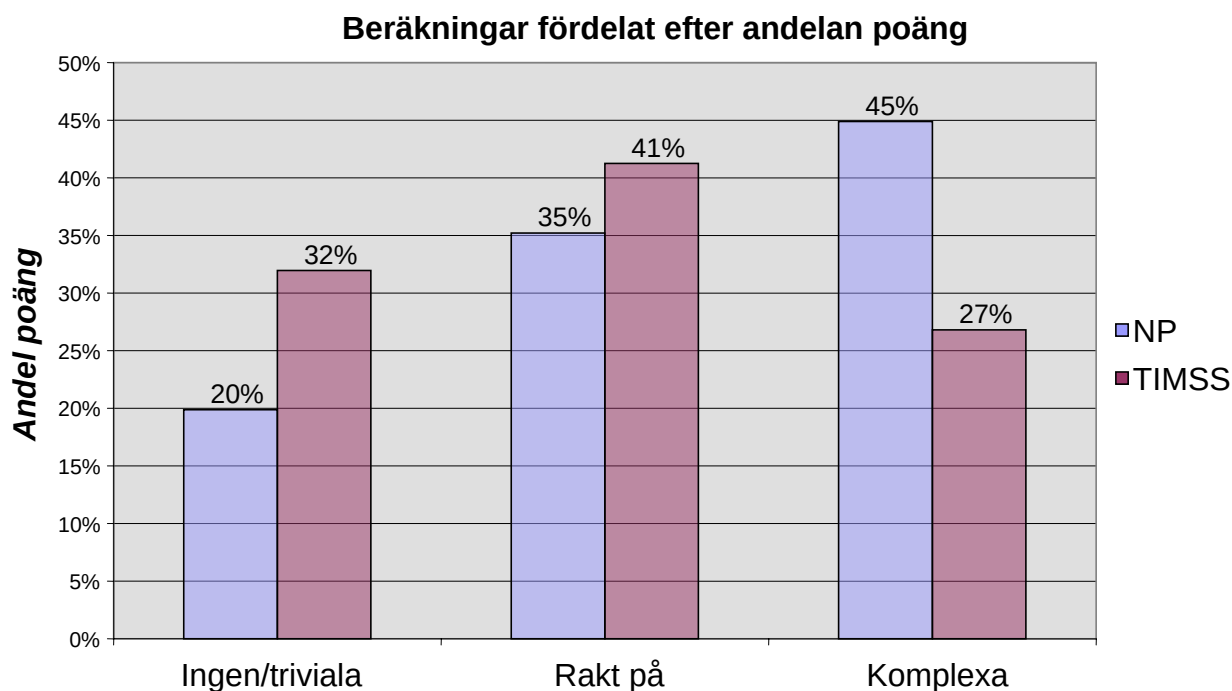
Jämförelsen av den kognitiva nivån visar på stora likheter mellan TIMSS och NP. Den största kategorin är i båda fallen *Tillämpa*. Några av provuppgifterna i TIMSS har klassificerats som *Förutsättningar saknas*, vilket inte finns i NP. En elev som läser till och med D-kursen i matematik saknar förutsättningar att lösa uppgifter som motsvarar 7 procent av poängen i TIMSS. För en elev som även läst E-kursen är motsvarande siffra 5 procent.



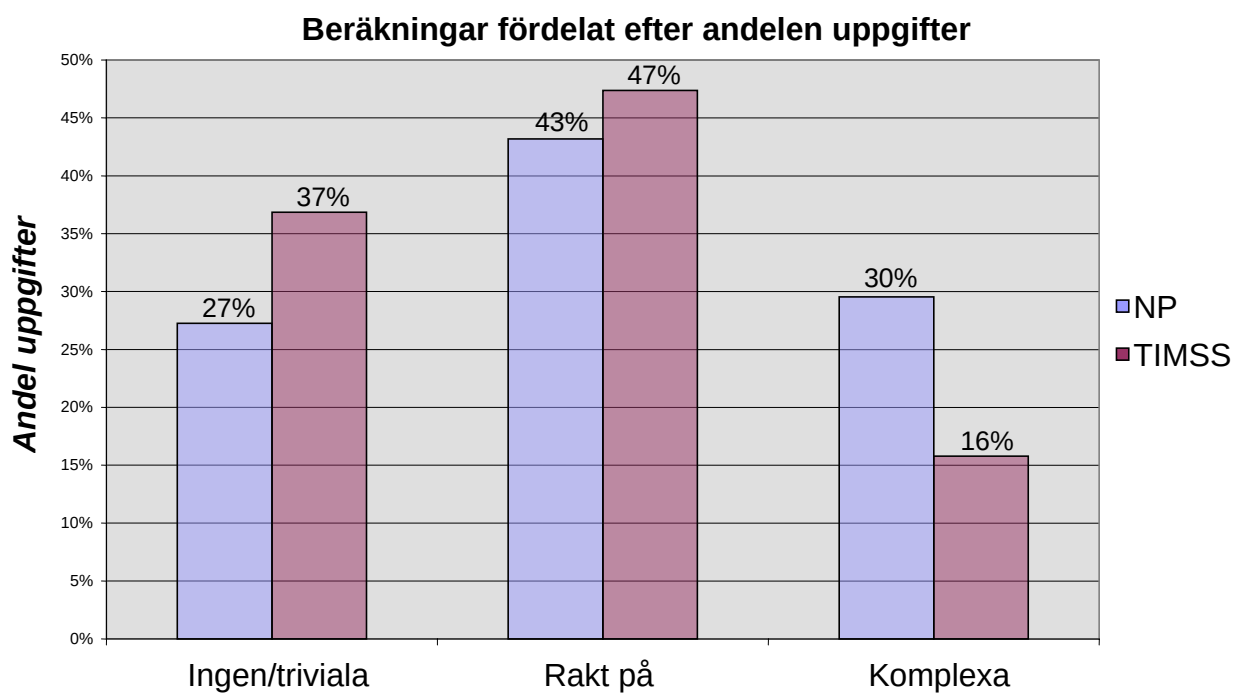
**Figur 3: Procentuell fördelning av poäng mellan kognitiva nivåer, för NP respektive TIMSS. För staplarna TIMSS - D har TIMSS bedömts utifrån en elev som läser till och med D-kursen i matematik. För staplarna TIMSS - E har TIMSS bedömts utifrån en elev som även läser E-kursen i matematik.**

### Beräkningar

I jämförelsen av beräkningar framgår det att uppgifterna i NP förutsätter mer komplexa beräkningar än vad uppgifterna i TIMSS gör. I fallet beräkningar syns en tydlig skillnad om hänsyn tas till poäng eller antal uppgifter.



**Figur 4:** Procentuell fördelning av poäng mellan olika grader av beräkning, för NP respektive TIMSS.



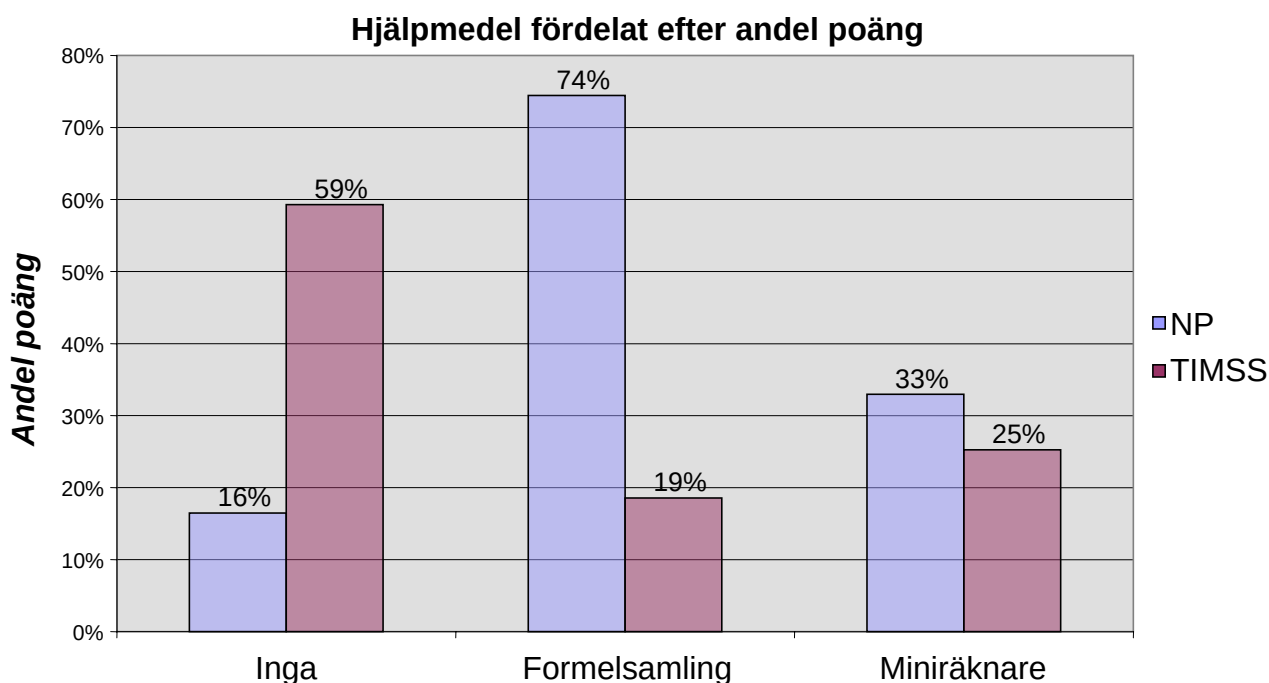
**Figur 5:** Procentuell fördelning av uppgifter mellan olika grader av beräkningar, för NP respektive TIMSS.

### Miniräknare

Miniräknare är tillåten på samtliga uppgifter i TIMSS. I NP är miniräknare tillåtet hjälpmedel för 51 procent av uppgifterna. Dessa uppgifter motsvarar 61 procent av poängen på dessa prov.

## Hjälpmedel

Figur 6 visar på hur stor del av respektive provtyp något av hjälpmedlen, miniräknare eller formelsamling, är till hjälp. På många uppgifter är både miniräknare och formelsamling till hjälp, vilket innebär att den totala procentsatsen är större än 100 procent. På NP är formelsamlingen till hjälp på tre fjärdedelar av provets poäng. Motsvarande andel för TIMSS är en femtedel.

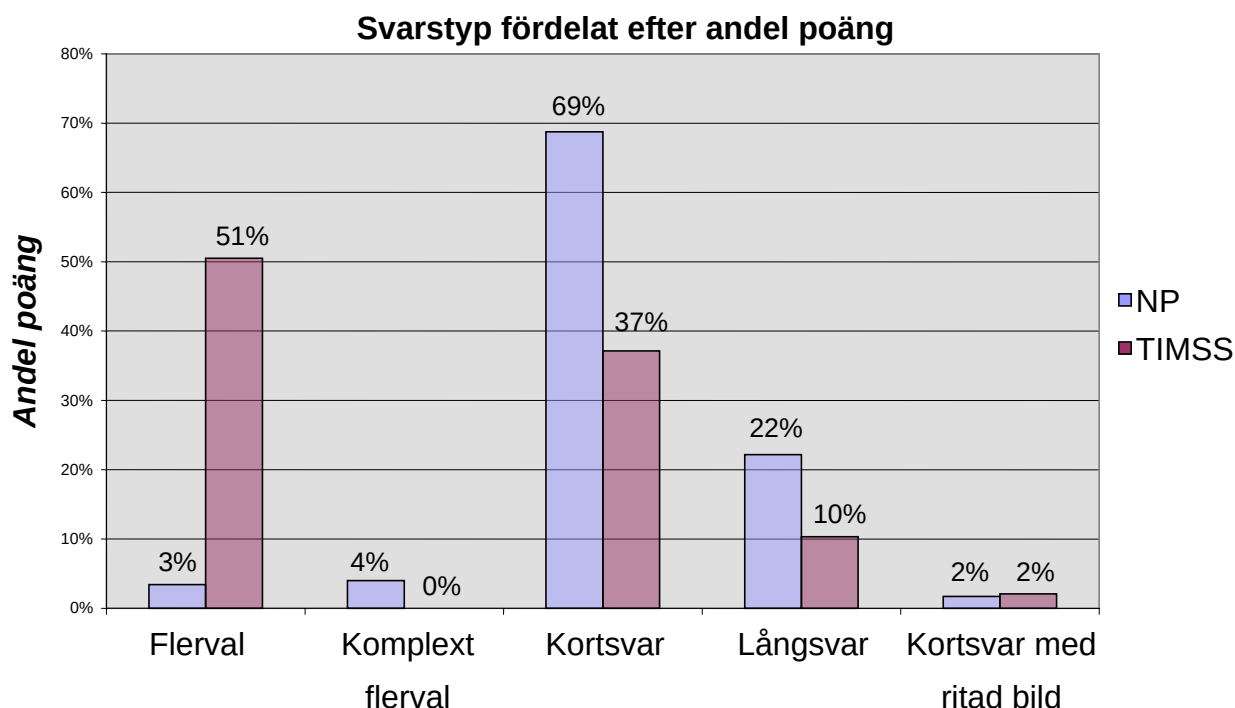


**Figur 6:** Staplarna *Formelsamling* anger andelen poäng där formelsamlingen kan vara till hjälp vid lösning av uppgiften. Staplarna *Miniräknare* anger andelen poäng där uppgiften tar väsentligt längre tid att klara utan miniräknare. Staplarna *Inga* anger andelen poäng hos de uppgifter som inte uppfyller något av de två andra villkoren.

## Vilka krav ställs på elevens svar?

### Svarstyp

Ungefär hälften av poängen på TIMSS provuppgifter tillhör kategorin *Flerval* och 37 procent av poängen tillhör *Kort svar*. Resten är fördelat på övriga svarstyper. På NP är den största kategorin *Kort svar*, med 69 procent och den näst största kategorin *Lång svar*, 22 procent. Övriga kategorier är endast representerade i ett fåtal uppgifter och poäng.



**Figur 7: Procentuell fördelning av poäng mellan de olika svarstyperna, för NP respektive TIMSS.**

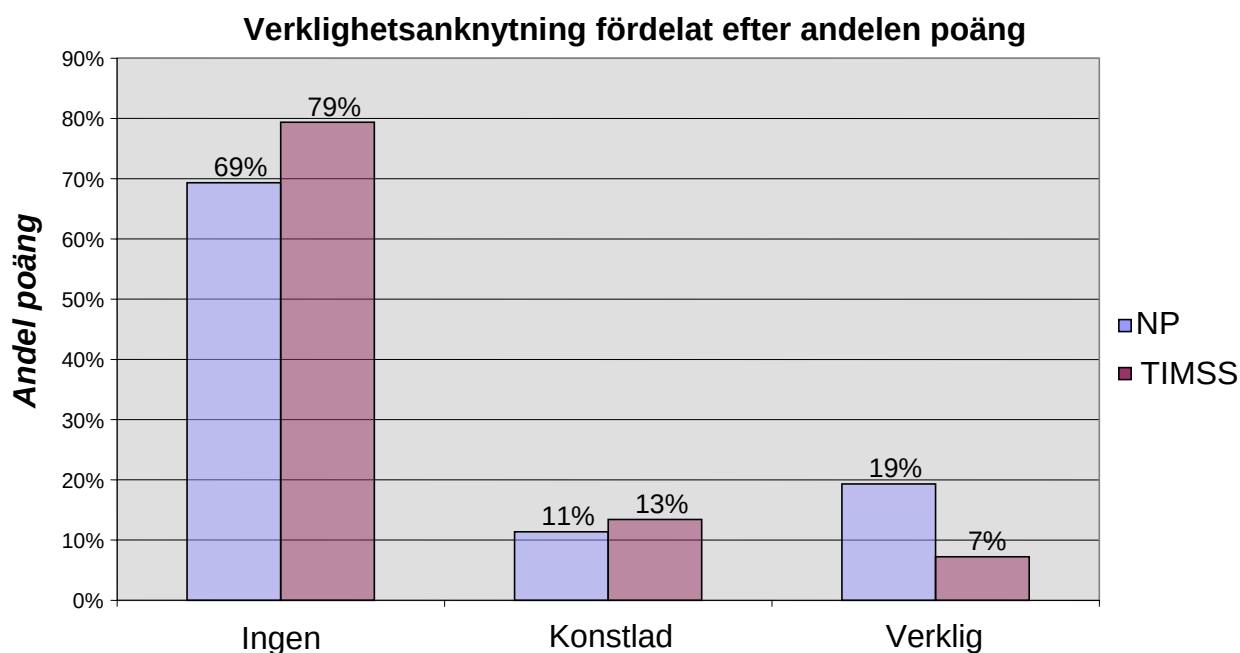
### Redovisning

Andelen uppgifter där det krävs redovisning av beräkningar och resonemang är i NP 77 procent och i TIMSS prov 17 procent. Motsvarande andel poäng är i NP 87 procent och i TIMSS 33 procent. Det finns inga uppgifter, i varken NP eller TIMSS prov, där svarstypen är *flerval* eller *komplex flerval* där redovisningar av beräkningarna krävs.

## Hur presenteras innehållet i uppgiften?

### Verklighetsanknytning

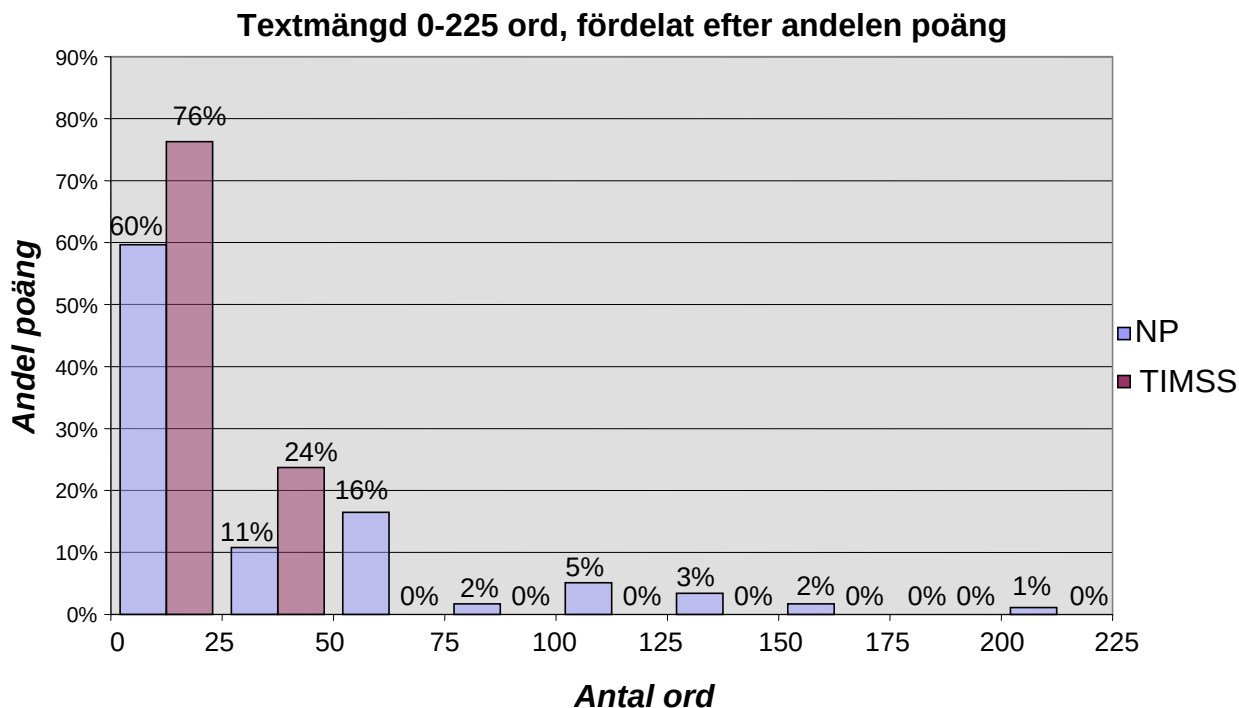
När det gäller verklighetsanknytning kan man se en viss skillnad, framförallt när det gäller *Verklig* verklighetsanknytning. Cirka 30 procent av poängen i NP ges av uppgifter som har någon form av verklighetsanknytning, medan motsvarande siffra för TIMSS prov är cirka 20 procent. Av uppgifterna med verklighetsanknytning har NP en större andel poäng från uppgifter med *Verklig* än med *Konstlad* verklighetsanknytning. I TIMSS prov är förhållandet det omvända.



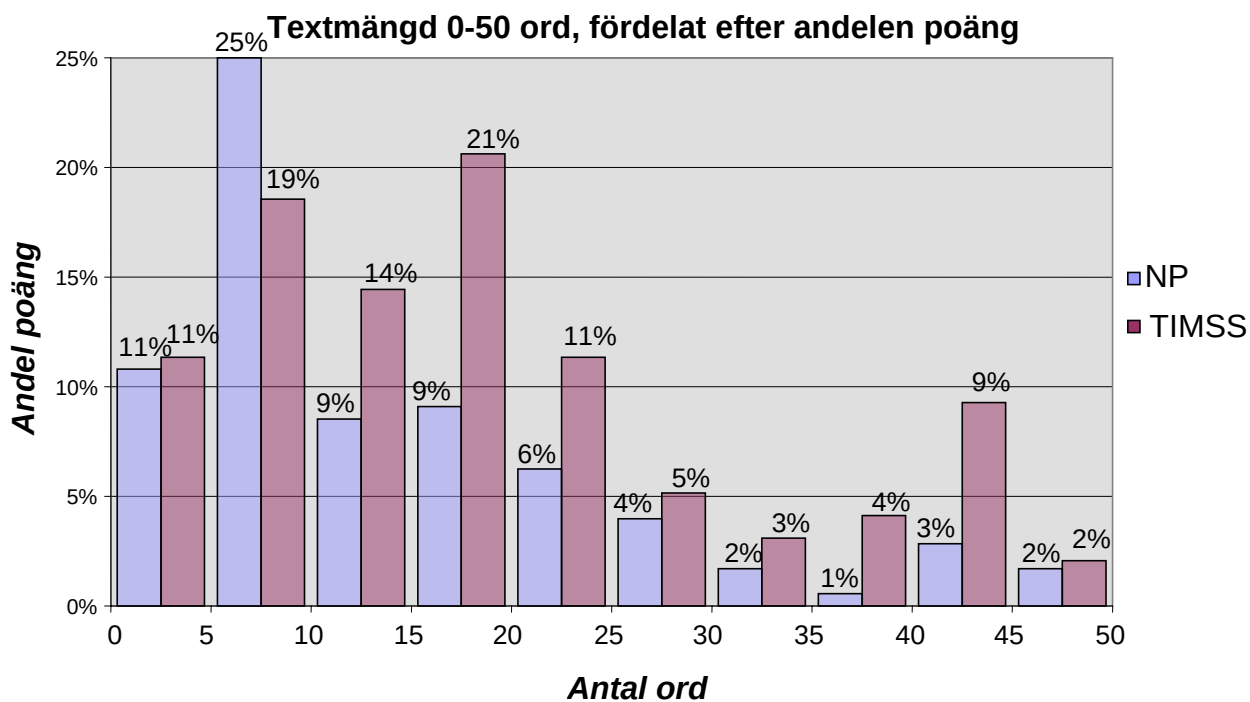
**Figur 8: Procentuell fördelning av poäng enligt uppgifternas grad av verklighetsanknytning, för NP respektive TIMSS.**

### Textmängd

Uppgiftstexterna i NP har 31 ord per uppgift i medeltal och medianen är 15 ord. För uppgifterna i TIMSS ligger medeltalet på 17 ord och medianen på 15 ord. TIMSS prov har inga uppgifter med mer text än 50 ord. 30 procent av poängen på NP tillhör uppgifter med mer än 50 ord. Den uppgift på NP som innehöll mest text innehöll 222 ord.



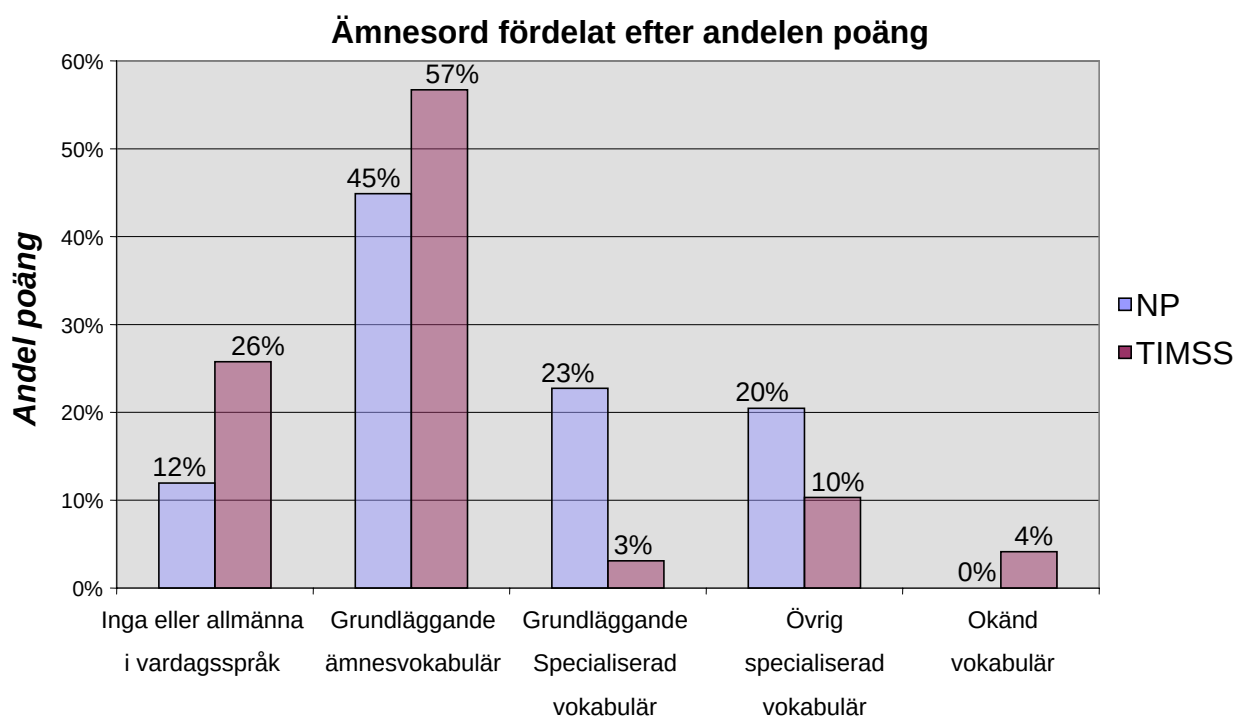
Figur 9: Andelen poäng fördelat efter textmängd. Uppgifternas textmängd är indelade i 25-ordsintervall.



Figur 10: Andelen poäng fördelat efter textmängd. Uppgifternas textmängd är indelade i 5-ordsintervall. Diagrammet återger endast textmängd med mellan noll och 50 ord. 30 procentenheter av poängen i NP tillhör uppgifter med mer än 50 ord. För samtliga uppgifter se Figur 9.

## Ämnesord

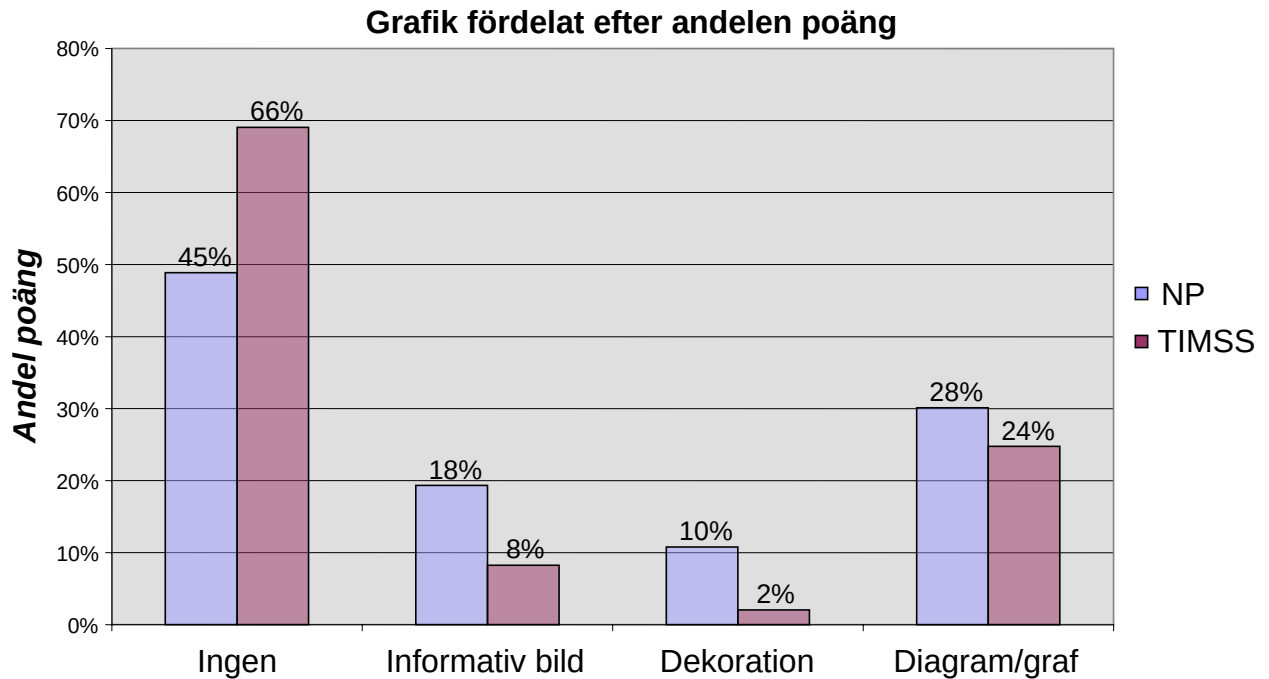
NP använder sig i större utsträckning av ämnesspecifika ord än vad TIMSS gör. I TIMSS prov finns några ord som inte ingår i den svenska gymnasieutbildningen och därmed klassificeras som *Okänd vokabulär*.



Figur 11: Andelen poäng hörande till uppgifter kategoriserade utifrån ämnesorden i texten.

## Grafik

Bland de klassificerade uppgifterna i NP finns det fyra uppgifter, totalt 16 poäng, där mer än en typ av grafisk illustration finns med. För TIMSS provuppgifter är motsvarande antal två uppgifter, totalt två poäng. Dessa uppgifter ger följaktligen ett bidrag till mer än en typ av grafik i kategoriseringen. Ett resultat av detta blir att summan av staplarna blir mer än 100 procent. NP använder sig i större grad av grafik än vad TIMSS gör.

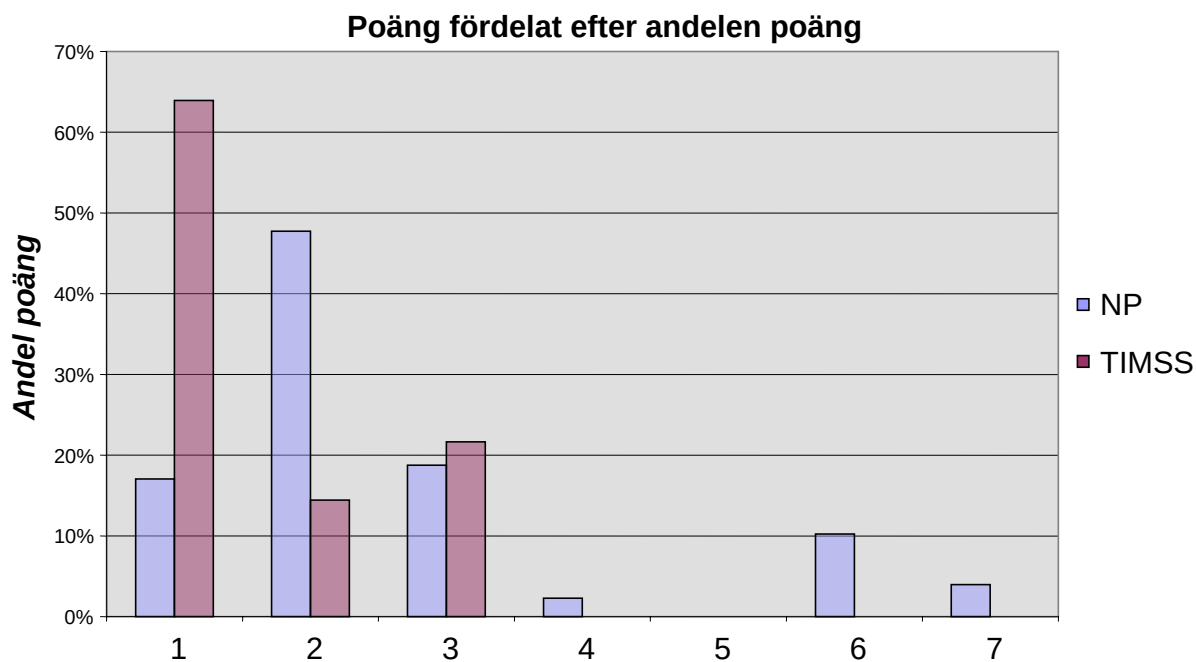


Figur 12: Staplarna anger hur stor andel poäng som tillhör uppgifter där respektive grafik typ ingår.

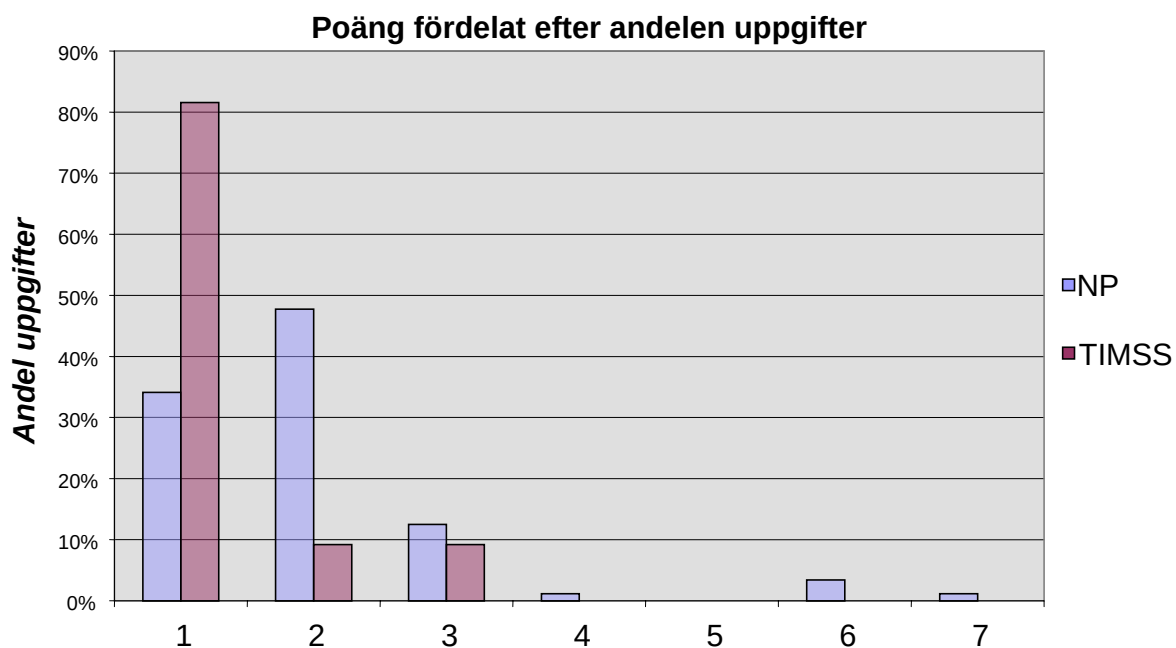
## Vilken är uppgiftens relativa vikt?

### Poäng

Fördelningen av hur många poäng som kan fås på respektive uppgift presenteras i två diagram. Figur 13 visar hur andelen poäng är fördelade mellan uppgifter med olika maximal poäng. Figur 14 visar andelen uppgifter indelat efter deras maximala poäng. För NP är både medel- och medianpoängen hos uppgifterna två poäng. För uppgifterna i TIMSS är medelpoängen 1,3 poäng och medianen ett poäng.



Figur 13: Andelen poäng hörande till uppgifterna kategoriserade utifrån uppgifternas maximala poäng.



Figur 14: Andelen uppgifter kategoriserade utifrån uppgifternas maximala poäng.

## Övriga noteringar kring uppgiften

### TSM-uppgifter

Av de anmärkningar som noterats för uppgifterna finns det en typ som är återkommande. Anmärkningarna rör de uppgifter där det är möjligt att pröva sig fram till rätt svarsalternativ med miniräknare. Denna metod ger i regel inte ett exakt värde men tillräckligt noggrant för att stämma överens med endast ett av svarsalternativen. I en bemärkelse kan man kringgå att lösa uppgiftens matematiska problem. Dessa uppgifter är genomgående flervalsuppgifter där miniräknare är tillåtet hjälpmedel.

Ett exempel på detta är uppgift 15 i bilaga 3, där svaret kan fås genom att skriva ut fler termer i summan och addera dessa på miniräknaren. Det finns även uppgifter där ett uttryck med flera obekanta skall förenklas. I dem kan man testa vilket svarsalternativ som är korrekt genom att ersätta de obekanta med några värden. Ytterligare ett exempel är grafiska lösningar av gränsvärden och ekvationer. Denna anmärkning finns endast bland TIMSS provuppgifter, där 18 procent av poängen kan klaras med denna metod.

Denna metod att lösa uppgifter benämns som *Testa Svarsalternativ med Miniräknare-metoden*, *TSM-metoden*. De uppgifter som går att lösa med *TSM-metoden* benämns som *TSM-uppgifter*.

# Diskussion

## **Om metod**

Urvalet av uppgifter från TIMSS och NP har gjorts enligt olika metoder. Från TIMSS Advanced 2008 ingår samtliga uppgifter i de fyra provvarianter som kommer att genomföras. Från NP ingår samtliga uppgifter från fyra genomförda prov, två för Matematik D-prov och två Matematik E-prov. Underlaget från NP är följaktligen ett stickprov. För NP finns en möjlighet att utöka antalet uppgifter genom att inkludera fler prov för Matematik D och E i underlaget. Huruvida ett ökat antal uppgifter från NP för Matematik D och E skulle öka reliabiliteten är svårt att avgöra utan att jämföra hur mycket olika NP för samma kurs skiljer sig åt mellan olika provtillfällen. För att en sådan jämförelse ska vara signifikant behöver fler än två prov jämföras.

Att vi endast behandlat NP hörande till D- och E-kursen i matematik och inte nationella prov för A-, B- och C-kursen i matematik påverkar validiteten negativt när det gäller ämnesinnehåll. Detta eftersom TIMSS prov syftar till att mäta elevernas kunskaper inom matematik innan högskoleutbildning, det vill säga samtliga kurser under gymnasiet. Medan det är naturligt att det ämnesinnehåll som ligger i fokus inom D- och E-kursen utgör en stor andel av poängen på proven för dessa kurser. Detta får konsekvensen att visst ämnesinnehåll, exempelvis serier och summor, som endast tas upp i C-kursen, i jämförelsen endast finns representerade i TIMSS provuppgifter.

Skulle vi ha tagit med nationella prov från A-, B- och C-kursen skulle detta troligen ge en annan bild av ämnesinnehållet, men det skulle sannolikt innebära andra komplikationer. Vilken elev skulle man utgå ifrån i bedömningen av kognitiv nivå hos uppgifterna i A-kursens nationella prov? En elev som skall genomföra TIMSS Advanced, d v s minst läser Matematik D eller en elev som endast läst A-kursen? För den elev som läst D-kursen skulle antagligen uppgifternas kognitiva nivå vara låg. Medan den elev som inte läser fler kurser inom matematik än A-kursen skulle sakna förutsättningar för att lösa de flesta uppgifter i TIMSS Advanced. Om nationella prov från andra kurser än Matematik D och Matematik E skulle ingå i jämförelsen skulle antalet uppgifter från de nationella proven totalt sett behövt ökas. Med samma antal uppgifter som använts i denna studie skulle då endast ett nationellt prov från varje kurs ingå. Då det finns en viss variation mellan olika nationella prov inom samma kurs skulle valet av prov påverka resultatet, reliabiliteten i studien skulle försämrats.

Samtliga uppgifter har kategoriserats av rapportens författare, två blivande lärare. Det kan hända att resultatet skulle ha sett annorlunda ut om lärare med många års erfarenhet skulle ha gjort kategoriseringen. För att få en hög reliabilitet borde kategoriseringen kanske dessutom göras av många lärare med lång erfarenhet. Genom att samtliga uppgifter kategoriserats av två personer är reliabiliteten högre än om de endast kategoriserats av en person. Samtliga oklarheter har diskuterats och vridits på tills båda känt sig nöjda med kategorin uppgiften hamnat i. Taxonomin har skapats med utgångspunkt i redan befintliga taxonomier av rapportens båda författare.

Att samma personer som skapat taxonomin också genomför kategoriseringen av uppgifterna kan vara både positivt och negativt. Till det positiva hör att taxonomin lätt har kunnat justeras när något visat sig vara oklart. En annan fördel är att vi som genomfört kategoriseringen varit väl bekanta med taxonomin. Detta kan samtidigt innebära en risk för hemmablindhet. När vi har formulerat taxonomin har vi haft en bakomliggande tanke om vad aspekterna skall återspegla. Risken finns att vi har genomfört kategoriseringen utifrån vår bakomliggande tanke och inte utifrån den taxonomi vi faktiskt formulerat.

Uppgifterna har kategoriserats varefter de har viktats efter uppgiftens maximala poäng. Det resultat som vi presenterar är i huvudsak en jämförelse utifrån andelen poäng tillhörande uppgifter inom varje kategori. Att jämföra hur många poäng som går att få med en viss kunskap bör vara mer intressant än hur många uppgifter som går att klara med en viss kunskap. Resultatet på ett prov bedöms i första hand utifrån antal uppnådda poäng, inte utifrån antalet klarade uppgifter. Det går att dra jämförelsen ett steg längre och istället kategorisera varje poäng för sig. Vissa stora uppgifter innehåller mer än ett delinnehåll, där de olika poängen uppgiften kan ge i själva verket borde klassificeras olika. En sådan jämförelse skulle dock innebära ett betydligt större arbete.

Jämförelser av samtliga aspekter i taxonomin har gjorts mellan de två provtyperna. Det skulle även vara intressant att göra korsjämförelser, exempelvis hur uppgifter i ett visst delinnehåll är fördelat på olika kognitiva nivåer. Antalet uppgifter som klassificerats är dock för litet för att den typen av jämförelser skulle visa på ett signifikant resultat.

## **Om resultat och taxonomin**

### **Vilket ämnesinnehåll berör uppgiften?**

Resultatet visar på att TIMSS prov har en jämn fördelning mellan de tre huvudkategorierna. Detta stämmer väl överens med ambitionerna i TIMSS ramverk. Kategoriseringen utifrån ämnesinnehåll är hämtad från TIMSS ramverk och därmed är det inte konstigt att just TIMSS provuppgifter är jämnt fördelade mellan de tre kategorierna. NP har en ojämnhet mellan de tre huvudkategorierna, vilket inte heller det är särskilt anmärkningsvärt. Kurserna Matematik D och Matematik E innehåller till största delen derivator och integraler, vilket naturligtvis även återspeglas i de nationella proven. På samma sätt är geometri en liten del av kurserna Matematik D och Matematik E.

Av de delinnehåll som finns representerade i TIMSS prov men inte i NP är det endast vektorer som inte ingår i någon av kursplanerna för gymnasiet. I gengäld ägnar NP ganska stor uppmärksamhet åt differentialekvationer och rotationsvolym, vilket inte får någon uppmärksamhet i TIMSS prov. Anmärkningsvärt är att de delinnehåll som är betydligt mer representerade i NP än i TIMSS prov tillhör Matematik E och dessutom är stora delar av Matematik E. Största delen av Matematik E ligger således utanför TIMSS prov och ramverk. Den största delen av innehållet i Matematik E som ingår i TIMSS prov är komplexa tal.

En anmärkning till ämnesinnehåll i den använda taxonomin är att det kan verka märkligt att delområden som t ex *serier och summor* samt *kombinatorik, sannolikhet och statistik* hör till huvudområdet *algebra*. Orsaken till detta är att vi utgått från ämnesindelningen som finns i TIMSS ramverk varefter delområden har lagts till och i vissa fall breddats. För att inte skapa ett fjärde huvudområde bestående av några få överblivna delområden, däribland *kombinatorik, sannolikhet och statistik*, har dessa breddade områden fått stå kvar under *algebra*.

### **Vilka tankeprocesser krävs av eleven?**

#### **Kognitiv nivå**

Slående är likheten i fördelning mellan uppgifternas kognitiva nivåer hos NP och TIMSS. Den skillnad som finns är de uppgifter som klassificerats som kognitiv nivå fyra, *förutsättningar saknas*. Det är naturligt att NP inte har några kognitiva fyror eftersom NP utgår ifrån de svenska kursplanerna och därmed inte prövar kunskaper som svenska elever inte haft tillfälle att lära sig i skolan. En elev som endast läser Matematik D har en större

andel kognitiva fyror än en elev som även läser Matematik E. Skillnaden mellan eleverna som läser eller inte läser E-kursen orsakas av de uppgifter i TIMSS som berör komplexa tal.

De uppgifter som rör ämnesområden vilka inte ingår i de kurser som svenska elever har läst, har klassificerats som den kognitiva nivån *förutsättningar saknas*. Detta kan anses vara felaktigt då aspekten *kognitiv nivå* syftar till att kartlägga vilka tankeprocesser som krävs för att lösa en uppgift och då det inte existerar tillräckliga tankeprocesser om förutsättningar saknas. Ett alternativ skulle vara att sortera ut dessa uppgifter i en aspekt för sig. En följd skulle bli att de uppgifter där eleven saknar förutsättningar inte skulle höra till någon *kognitiv nivå*. En sådan klassificering skulle varken ge mer eller mindre information än klassificeringen som gjorts, utan skulle endast innebära att en del av informationen flyttades till en ny aspekt i taxonomin.

Intressantare är hur elevernas resultat på TIMSS prov skall tolkas. Skall resultatet användas för att jämföra matematikkunskaper mellan olika länder, så är andelen uppgifter där eleverna saknar förutsättningar en viktig parameter. Skall resultatet i TIMSS användas för att mäta trender inom ett land mellan två olika provtillfällen kan det vara intressant att bortse från de uppgifter där elever saknar förutsättningar. Skall resultatet av TIMSS Advanced 2008 användas i detta syfte bör den maximala poängen räknas om. För de elever som läser Matematik D skulle omräkningsfaktorn vara 93 procent av den totala poängen på provet och 95 procent för de elever som läser Matematik E.

## Beräkningar

Det finns en tydlig skillnad mellan NP och TIMSS prov när man jämför graden av *Beräkningar*. En större andel av uppgifterna i NP ställer krav på beräkningar i flera steg, än uppgifterna i TIMSS. Skillnaden blir ännu större om man jämför andelen poäng hörande till dessa uppgifter. Detta återspeglar att de uppgifter som kräver beräkningar i flera steg också ger många poäng.

## Hjälpmedel

Definitionen för att en uppgift ska klassificeras som "F" i aspekten hjälpmedel lyder: "formelsamlingen innehåller definitioner eller samband som används vid beräkningen". Denna formulering innebär att många uppgifter i NP hamnar i kategorin "F", då formelsamlingen som följer med NP är ganska omfattande och innehåller mycket information som ofta används. Kategoriseringen återspeglar därmed inte i vilken mån eleverna har hjälp av formelsamlingen, eftersom mycket av det som står i formelsamlingen är utantillkunskaper för många elever. Av större intresse skulle kanske vara att undersöka i hur många uppgifter det finns relevant hjälp för lösning av uppgiften. Detta är svårt att göra med hög reliabilitet, då det kräver att man känner till vilken information i formelsamlingen som elever tar hjälp av.

Den jämförelse som gjorts skall snarare ses som ett uttryck för hur utantillkunskaper värderas i respektive provtyp. Som exempel kan nämnas att NP:s formelsamling innehåller formeln för beräkning av en triangels area, medan samma formel inte finns med i TIMSS formelsamling. NP mäter följaktligen inte huruvida eleverna kan denna formel utantill, utan snarare ifall eleverna kan tillämpa den. TIMSS prov mäter, förutom tillämpningen, om eleverna behärskar den typen av basala kunskaper eller inte. Figur 6 skall följaktligen inte tolkas som att NP:s formelsamling innehåller mer hjälp än TIMSS formelsamling, utan som att utantillkunskaper värderas högre i TIMSS prov än i NP.

Miniräknare är tillåten på samtliga av TIMSS uppgifter men endast på hälften av uppgifterna i NP. Trots detta är andelen poäng tillhörande uppgifter där miniräknaren är till nytta ungefär lika stor i de båda provtyperna. *TSM-uppgifter* har klassificerats utifrån att eleven löser det

matematiska problemet. Skulle de istället ha klassificerats utifrån *TSM-metoden* så skulle andelen poäng där miniräknare är till hjälp öka för TIMSS prov. Under rubriken *Övriga noteringar kring uppgiften* på sidan 39 kommenteras dessa uppgifter ytterligare.

## Vilka krav ställs på elevens svar?

### Svarstyp

Det finns stora skillnader mellan vilka typer av svar som förekommer i NP och TIMSS prov. Över hälften av poängen i TIMSS provkonstruktion tillhör uppgifter där ett val sker mellan flera svarsalternativ. För NP dominerar kortsvarsuppgifter. En iakttagelse som är direkt kopplad till om uppgiften har flervalssvar eller inte är möjligheten för eleven att chansa. Flervalssuppgifterna i TIMSS består vanligtvis av fem alternativ, vilket ger eleven 20 procents chans att klara uppgiften genom att kryssa för ett slumpvis valt alternativ. En fördel med flervalssuppgifter är att rättningen blir likvärdig och är enkel att genomföra. En kritik man kan rikta mot flervalssuppgifter är att de inte förekommer i verkliga livet. I riktiga situationer där matematiska beräkningar görs ges inga svarsalternativ.

### Redovisning

NP kräver i betydligt större utsträckning redovisning av beräkningar än vad TIMSS gör. NP ger därmed en bredare grund för att se i vilken grad en elev har tagit till sig förmågan att uttrycka sig matematiskt.

Samtliga poäng tillhörande respektive uppgift har kategoriserats utifrån om redovisning krävs för att nå full poäng på uppgiften. I vissa flerpoängsuppgifter som kräver redovisning kan enligt rättningsanvisningarna enstaka poäng fås även utan redovisning, exempelvis ett poäng för korrekt svar. Om varje poäng kategoriserats för sig skulle andelen poäng som kräver redovisade beräkningar därför kunna minska något. Enligt NP:s rättningsmall är det endast enstaka poäng i NP som skulle påverkas av en sådan kategorisering. Hur stor andel av poängen i TIMSS prov som skulle påverkas vet vi inte eftersom vi inte haft tillgång till TIMSS rättningsanvisningar.

En förklaring till att andelen poäng, hörande till uppgifter, där redovisning av beräkningar inte krävs i TIMSS prov är hela 67 procent är den stora andelen flervalssuppgifter i TIMSS. Men detta kan inte ses som hela förklaringen. 33 procent av poängen som tillhör de uppgifter som inte har flervalssvar, kräver inte att beräkningarna redovisas. Motsvarande andel för NP är 6 procent. Dessutom är den stora andelen flervalssuppgifter ett val som gjorts i konstruktionen av TIMSS prov. Slutsatsen av detta är att TIMSS provkonstruktion helt enkelt lägger mindre vikt vid redovisning av beräkningar än NP.

## Hur presenteras innehållet i uppgiften?

### Verklighet

Resultatet från aspekten verklighetsanknytning tyder på att NP:s provkonstruktörer anstränger sig lite mer än TIMSS provkonstruktörer för att uppgifter ska ha *verklig* verklighetsanknytning. Konstruktionen av uppgifter med *verklig* verklighets anknytning försåras av att TIMSS prov skall användas i flera olika länder, där ungdomars vardag och kultur skiljer sig åt. Som exempel kan uppgift 12 (Bilaga 1) från ett nationellt prov nämnas. Att beräkna antal kvadratmeter en lägenhet har är inte relevant i USA när meter inte används som längdenhet. Uppgifter med *konstlad* verklighetsanknytning kan lätt bli ett förlöjligande av matematiken. Den typen av uppgifter antyder att matematiken egentligen inte är tillämpbar i verkligheten, utan endast med tillgjorda exempel som ingen är intresserad av.

## Textmängd, ämnesord och grafik

NP har såväl mer text och mer ämnesspecifika ord som större inslag av grafik än vad TIMSS prov har. Hur påverkar detta elevernas resultat på proven?

Uppgifter med en större textmängd testar elevens förmåga att utläsa vilket matematiskt problem som skall lösas, men även vilken information som är väsentlig och vilken som är överflödigt. Samtidigt som en stor mängd beskrivningar prövar läsförståelse och förståelse av ämnesord och liknande, kan texten mycket väl vara ett hinder för elever som har svårt för språk. Om detta stämmer bör vissa elever, som har lätt för logiskt tänkande men svårt för att läsa, prestera bättre på TIMSS prov än på nationella prov. TIMSS visar att möjligheten finns att pröva matematisk kunskap utan användande av stora textmängder och svåra ord.

När det gäller inslaget av grafik kan ett liknande resonemang föras. Uppgifter som innehåller grafik testar elevens förmåga att ur diagram och figurer utläsa väsentlig information. Däremot bör elevens språkliga förmåga inte påverka elevens lösning i dessa fall.

Mängden ämnesspecifika ord i uppgifterna återspeglar om förståelsen för de matematiska begreppen testas eller inte. Förutom att färre ämnesspecifika ord förekommer i TIMSS prov än i NP, finns även en del notationer förklarade i TIMSS. Exempelvis i uppgift 8 (Bilaga 3) tydliggör texten att  $z$  med ett streck ovan är konjugatet till  $z$ . I vilken grad den begreppsmässiga förståelsen är en viktig del av matematiken lämnas åt någon annan att diskutera. Vi konstaterar endast att det läggs större vikt vid detta i NP än i TIMSS.

Själva metoden att räkna antalet ord i en uppgift för att bestämma textmängden visade sig innebära en del svårigheter. En konsekvens av att mängden siffror och matematiska symboler inte togs i beaktning blir att själva utformningen av texten påverkar textmängden. Därmed kan en uppgift som beskrivs med hjälp av många svåra ekvationer och tecken ändå framstå som att den beskrivs med ringa textmängd. Ord som summa har räknats men inte tecken som  $\Sigma$ . Det samma gäller med det matematiska begreppet fakultet och dess symbol,  $!$ . Förutom att provkonstruktörernas val av tecken kontra ord påverkar textmängden i uppgiften, påverkas även aspekten ämnesord på samma sätt. Mängden ekvationer eller formler i beskrivningen av en uppgift skulle således vara ytterligare en intressant aspekt att undersöka.

Betraktar man att uppgifterna i NP innehåller mer text, fler ämnesord, mer grafik och oftare anknyter till verkliga situationer än uppgifterna i TIMSS prov, kan man dra slutsatsen att NP lägger större vikt vid uppgiftens kontext och vid språklig förståelse. NP kräver i större grad än TIMSS prov att eleven ur en mängd information kan ställa upp det matematiska problemet och lösa detta.

## Vilken är uppgiftens relativa vikt?

### Poäng

NP har en större spridning i antal poäng per uppgift än vad TIMSS har. I genomsnitt ger NP även fler poäng per uppgift än vad TIMSS gör. Detta kan tyckas naturligt då TIMSS prov till stor del består av flervalsuppgifter, där svaret antingen är rätt eller fel, medan NP har många stora och beskrivande uppgifter som kan ge många poäng.

När uppgifterna har viktats i förhållande till antal poäng de kan ge, har ingen hänsyn tagits till g-poäng eller vg-poäng. Det finns ingen uppenbar metod för att ta hänsyn till vg-poäng. Speciellt svårt blir det eftersom uppdelningen i g- och vg-poäng endast förekommer i NP och inte i TIMSS. På något sätt bör vg-poäng värderas högre än g-poäng, eftersom vg-poängen är en förutsättning för att uppnå det högre betyget.

## Övriga noteringar kring uppgiften

### TSM-uppgifter

*TSM-uppgifter* testar antingen hur duktig eleven är på att använda miniräknaren, eller hur väl eleven behärskar det aktuella ämnesområdet. Vid bedömning av sådana uppgifter vet man inte vilken kunskap som prövats, då eleven inte behöver redovisa sina beräkningar. Både *TSM-metoden* och metoden att lösa det matematiska problemet är användbara på olika sätt. *TSM-metoden* är inte minst ett värdefullt redskap för att testa korrektheten i sina beräkningar. Men när *TSM-metoden* används för att lösa en uppgift, kringgås i viss mån uppgiftens matematiska innehåll. Med tanke på att hela 18 procent av poängen på TIMSS prov kan fås via *TSM-metoden* förefaller det orimligt att provets konstruktörer inte är medvetna om att denna typ av uppgifter existerar. Detta måste tolkas som att de båda metoderna värderas som likvärdiga i TIMSS prov.

### Slutsats

En stor likhet mellan de båda provtyperna är fördelningen av uppgifter mellan olika kognitiva nivåer. Trots att det finns stora skillnader mellan de båda proven, vad gäller hjälpmedel, krav på beräkningar, informationsmängd och liknande, så är summan av den kognitiva nivån ungefär lika. TIMSS prov sticker ut genom att ha några kognitiva fyror. Dessa visar på andelen poäng som inte är tillgängliga för svenska elever. Det är intressant att iaktta att en Matematik D-elev har förutsättningar att klara 93 procent av provet och att en Matematik E-elev har förutsättningar att klara 95 procent av provet. Skillnaden mellan hur stor andel av TIMSS prov en Matematik D-elev, respektive en Matematik E-elev har förutsättningar att klara är alltså endast två procentenheter. Denna skillnad orsakas av de uppgifter som tillhör delområdet *komplexa tal*. Detta faktum tillsammans med en studie av skillnaderna mellan de båda provtypernas fördelning mellan olika delinnehåll visar på att större delen av Matematik E-kursen ligger utanför TIMSS prov. De uppgifter som både Matematik D och Matematik E-elever saknar förutsättningar för att lösa, behandlar antingen vektorer eller innehåller *okänd vokabulär* som är nödvändig att förstå för uppgiftens lösning.

När det gäller hur de matematiska problemen i uppgifterna presenteras skiljer sig NP och TIMSS prov åt på en rad punkter. Dessa kan sammanfattas i:

- att uppgifterna i NP är mer sammansatta och att problemen i större grad kräver beräkningar i flera steg än uppgifterna i TIMSS prov där varje uppgift testar mer avgränsade kunskaper

- att uppgifterna i NP i högre grad framställs i något sammanhang och beskrivs med hjälp av mer text och grafik än vad uppgifterna i TIMSS prov gör

- att uppgifterna i TIMSS i högre grad testar utantillkunskaper än NP

- att NP ger utrymme för att bedöma metoder, redovisningar och elevens matematiska språk, medan TIMSS prov lägger större fokus vid huruvida svaret är korrekt eller inte.

Med tanke på de stora skillnaderna mellan de båda provtyperna är det rimligt att anta att somliga elever presterar olika på de båda proven. Beroende av typ och variation på de uppgifter eleverna är vana vid att lösa kommer denna skillnad vara olika stor.

# Referenser

## Tryckta källor

Bergqvist, Ewa & Lind, Anna (2005). *Är det lättare att dela med fyra än med två när man läser matte c? : En jämförelse av svårighetsgrad mellan olika versioner av matematikuppgifter i Nationella kursprov*. (BVM nr 12) Umeå universitet: Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar. Umeå.

Bergqvist, Ewa (2006). *Mathematics and mathematics education: two sides of the same coin: some results on positive current related to polynomial and creative reasoning in university exams in mathematics*. Umeå: Print & Media, Umeå universitet.

Björk, Lars-Eric & Brolin, Hans (2000). *Matematik 3000; Kurs C och D lärobok. Naturvetenskap och teknik*. Stockholm: Natur och kultur.

Björk, Lars-Eric & Brolin, Hans (2001). *Matematik 3000; Kurs E lärobok. Naturvetenskap och teknik och KOMVUX*. Stockholm: Natur och kultur.

Bloom, Benjamin (1956). *Taxonomy of educational objectives: the classification of educational goals. Handbook 1, Cognitive domain*. New York: David McKay.

Englund, Tomas (1997). *Undervisning som meningserbjudande*. I M. Uljens (Red.). *Didaktik*. Lund: Studentlitteratur.

Polya, George (1970). *Problemlösning: En handbok i rationellt tänkande*. [övers. och vetenskaplig granskning av Thorbjörn Lagerwall]. Orig.titel: *How to solve it*. Stockholm: Prisma.

Ramstedt, Kristian (1996) *Elektriska flickor och mekaniska pojkar*. Umeå: UmU Tryckeri.

Ramstedt, Kristian (1999) *Flickor, pojkar och fysik i ett internationellt perspektiv: En undersökning av specialistgruppen i TIMSS population 3*. (PM nr 155) Umeå universitet, Enheten för pedagogiska mätningar. Umeå.

Skolverket (1998). *Provuppgifter TIMSS: Kunskaper i matematik och naturvetenskap hos svenska elever i gymnasieskolans avgångsklasser*. Stockholm: Katarina Tryck Skolverket.

Skolverket (2006). *Med fokus på matematik och naturvetenskap. Rapport 221*, Vällingby: Elanders Gotab AB.

Skolverket (2007). *Skolverkets lägesbedömning: Förskoleverksamhet, skolbarnsomsorg, skola och vuxenutbildning. Rapport 303*. Stockholm: Danagårds.

## Elektroniska källor

Dagens Nyheter (2004). *En övning i konsten att lägga ihop två och två* [www]. Hämtat från <http://www.dn.se>. Publicerat 10 december 2004. Hämtat 10 november 2007.

IEA (2006). *TIMSS Advanced 2008 Assessment Frameworks* [www]. Hämtat från [http://timss.bc.edu/PFD/TIMSS\\_Advanced\\_AF.pfd](http://timss.bc.edu/PFD/TIMSS_Advanced_AF.pfd). Publicerat 2006. Hämtat 14 december 2007.

Möller, Peter W (2004). *Vetenskaplig grund och matematik* [www]. Hämtat från <http://www.am.chalmers.se/~moller/ARTIKLAR/VetenskapligGrund.html>. Publicerat april 2004. Hämtat 14 januari 2008.

Skolverket (2000a). *Kursplan för Matematik C* [www]. Hämtat från <http://www.skolverket.se>. Publicerat augusti 2000. Hämtat 14 december 2007.

Skolverket (2000b). *Kursplan för Matematik D* [www]. Hämtat från <http://www.skolverket.se>. Publicerat augusti 2000. Hämtat 14 december 2007.

Skolverket (2000c). *Kursplan för Matematik E* [www]. Hämtat från <http://www.skolverket.se>. Publicerat augusti 2000. Hämtat 14 december 2007.

Umeå universitet (2008). Nationellt prov i matematik kurs D våren 2005 [www]. Hämtad från <http://www.umu.se/edmeas/np/np-prov/D-kursprov-vt05.pdf>. Publicerat 10 januari 2008. Hämtat 12 januari 2008.

## Bilaga 1 Nationelltprov Matematik D – vt05

1. Beräkna  $\int_1^3 (x^2 - 1) dx$  (2/0)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 1       | 2.5      | KS       | 1         | N      | 0        | 0          | 1           | J           | 1             | F          | N           | 2     |            |

2. Bestäm  $f'(x)$  om

a)  $f(x) = 4 \cos 3x$  *Endast svar fordras* (1/0)

b)  $f(x) = (3 - 2x)^6$  *Endast svar fordras* (1/0)

c)  $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$  *Endast svar fordras* (0/1)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 2a      | 2.2      | KS       | 2         | N      | 0        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |
| 2b      | 2.2      | KS       | 2         | N      | 0        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |
| 2c      | 2.2      | KS       | 2         | N      | 0        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |

3. Vilka två av funktionerna  $F(x)$  nedan är primitiv funktion

till  $f(x) = 3x^5 + 1$ ?

Endast svar fordras

(1/0)

A  $F(x) = \frac{3x^4}{4}$

B  $F(x) = 15x^4$

C  $F(x) = 0,5x^6 + x$

D  $F(x) = x^6 + 2x$

E  $F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$

F  $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                                |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|-------------------------------------------|
| 3i      | 2.2      | FV       | 9         | N      | 3        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | N           | 1     | Metod: Derivera $F(x)$                    |
| 3ii     | 2.5      | FV       | 9         | N      | 3        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | N           | 1     | Metod: Ta fram $f(x)$<br>primitivfunktion |

4. Ordna följande tal i storleksordning:

$a = \sin 24^\circ$ ,  $b = \cos 100^\circ$  och  $c = \sin 165^\circ$

Motivera ditt svar.

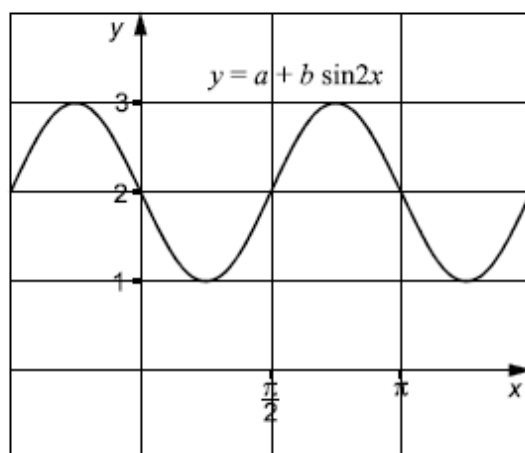
(1/1)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 4       | 3.4      | LS       | 6         | N      | 1        | 0          | 0           | J           | 2             | F          | N           | 2     |            |

5. Figuren visar grafen till funktionen  $y = a + b \sin 2x$   
Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$ .

Endast svar fordras

(1/1)



| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 5       | 1.5      | KS       | 8         | G      | 1        | 0          | 0           | N           | 2             | 0          | N           | 2     |            |

6. Vilket av följande uttryck A – F kan förenklas till 1?

Endast svar fordras

(0/1)

- A  $(\sin x + \cos x)^2$
- B  $(\sin x - \cos x)^2$
- C  $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$
- D  $\cos x(\tan x \cdot \sin x + \cos x)$
- E  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$
- F  $2(\sin x + \cos x)$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 6       | 1.7      | FV       | 7         | N      | 1        | 0          | 1           | N           | 2             | F          | N           | 1     |            |

7.



Antalet starar i Sverige har undersökts sedan 1979. Resultaten av denna undersökning kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

$$\frac{dy}{dt} = -0,03 \cdot y, \text{ där } y \text{ är antalet starar vid tiden } t \text{ år från 1979.}$$

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang. (1/1)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 7       | 2.6      | LS       | 34        | D      | 2        | 1          | 0           | J           | 2             | 0          | N           | 2     |            |

8. I triangeln  $ABC$  är vinkeln  $A = 90^\circ$   
Visa att  $\sin B = \cos C$

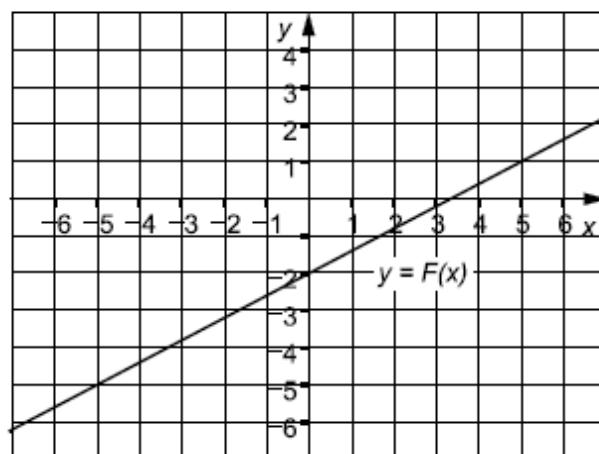
(0/1/0)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 8       | 3.4      | LS       | 6         | N      | 0        | 0          | 0           | J           | 2             | F          | N           | 1     |            |

9. Funktionen  $F$  är primitiv funktion till  $f$   
 Figuren nedan visar  $y = F(x)$

Bestäm  $\int_0^5 f(x) dx$

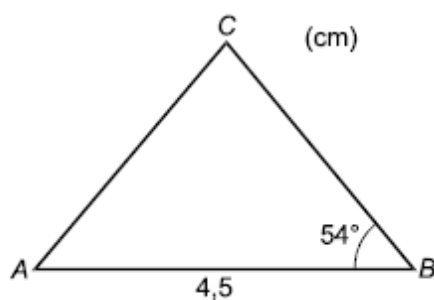
(0/2/α)



| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 9       | 2.5      | KS       | 9         | G      | 3        | 0          | 0           | J           | 3             | 0          | N           | 2     |            |

10. I triangeln  $ABC$  är sidorna  $AC$  och  $BC$  lika långa.  
 Beräkna triangelns area.

(2/0)

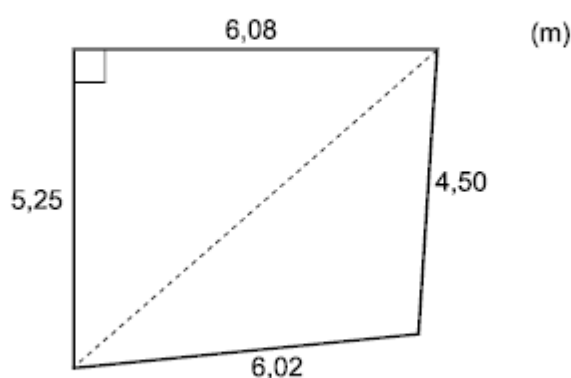


| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 10      | 3.4      | KS       | 10        | N      | 0        | 0          | 2           | J           | 2             | FM         | J           | 2     |            |

11. Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av funktionerna  $f(x) = x^2 + x + 1$  och  $g(x) = 9 - x$  (3/0)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 11      | 2.5      | KS       | 14        | N      | 3        | 0          | 2           | J           | 2             | FM         | J           | 3     |            |

12. Daniel och Linda tittar på en lägenhet. Enligt uppgift är vardagsrummet  $31,2 \text{ m}^2$ . De vill kontrollera om detta stämmer och mäter väggarna och ritar en skiss över rummet. De vet att ett hörn i rummet är rätvinkligt. Så här ser deras skiss ut.



- Vilken area har vardagsrummet enligt Daniels och Lindas skiss? (2/2)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 12      | 3.1      | KS       | 50        | B      | 1        | 2          | 2           | J           | 3             | FM         | J           | 4     |            |

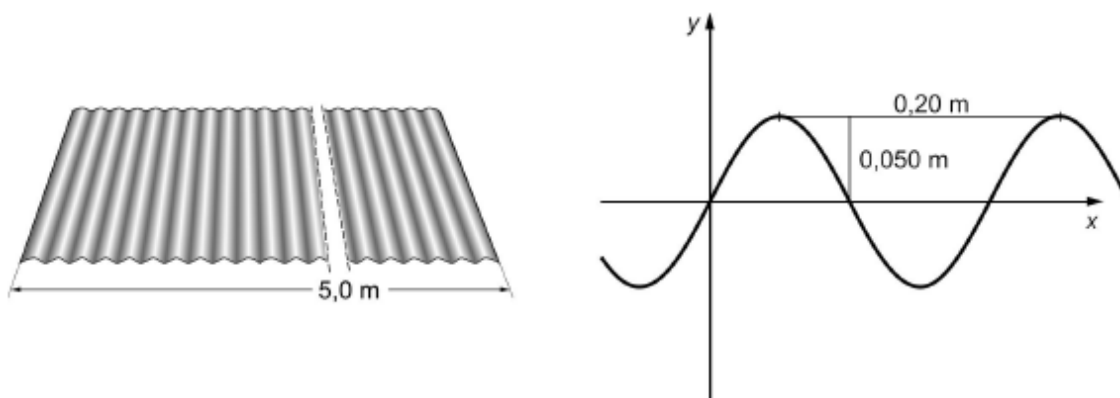
13. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen  $\sin 3x = 0,421$  (2/1)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 13      | 1.7      | KS       | 5         | N      | 1        | 0          | 1           | J           | 2             | M          | J           | 3     |            |

14. Bestäm antalet lösningar till ekvationen  $\sin 2x = \frac{x^2}{10} - 1$ ,  
där  $x$  mäts i radianer. (1/1)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                           |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|--------------------------------------|
| 14      | 1.5      | KS       | 9         | N      | 3        | 0          | 0           | J           | 2             | M          | J           | 2     | Kognitiv nivå; nära gränsen till 3:a |

15. En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.



- a) Bestäm en formel för "plåtkurvan" på formen  $f(x) = A \sin kx$  (0/1)

Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden  $s$  av en kurva  $y = f(x)$  från  $x = a$  till  $x = b$  kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

The graph shows a portion of a curve in the first quadrant of a Cartesian coordinate system. The horizontal axis is labeled  $x$  and the vertical axis is labeled  $y$ . Two points,  $a$  and  $b$ , are marked on the  $x$ -axis. Vertical lines are drawn from  $a$  and  $b$  up to the curve. The segment of the curve between these two points is highlighted with a dashed line, indicating the interval over which the arc length is to be calculated.

- b) Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 5,0 m? (0/3/∞)

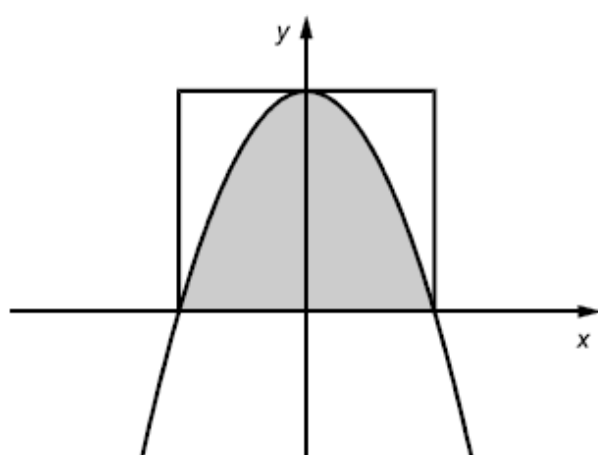
| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 15a     | 1.5      | KS       | 34        | DG     | 3        | 2          | 1           | J           | 2             | 0          | J           | 1     |            |
| 15b     | 2.5      | KS       | 63        | BG     | 3        | 2          | 2           | J           | 3             | FM         | J           | 3     |            |

16. För vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  gäller det att funktionen  $f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x$  har ett lokalt maximum för  $x = 0$ ?

(1/2/α)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 16      | 2.4      | KS       | 15        | N      | 3        | 0          | 2           | J           | 3             | F          | J           | 3     |            |

17. Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Det skuggade området är begränsat av parabeln och  $x$ -axeln. Arealen av det skuggade området kallas i fortsättningen parabelarean.



Två av rektangelns hörn sammanfaller med kurvans skärningspunkter med  $x$ -axeln.  
En av rektangelsidorna tangerar kurvans maximipunkt.

I den här uppgiften ska du undersöka förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.

Låt parabelns ekvation vara  $y = b - ax^2$ , där  $a$  och  $b$  är positiva tal.

- Du kan då börja t.ex. med att sätta  $b = 9$  och  $a = 1$  och rita grafen till funktionen  $y = 9 - x^2$ . Bestäm därefter förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.
- Välj själv andra exempel och försök formulera en slutsats utifrån dina valda exempel.
- Undersök om din slutsats även gäller i det allmänna fallet med parabeln  $y = b - ax^2$

Om du vill kan du istället undersöka det allmänna fallet direkt.

(3/4/α)

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning     |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|----------------|
| 7       | 2.5      | LS       | 121       | G      | 1        | 0          | 2           | J           | 3             | F          | J           | 7     | Flera innehåll |

---

## Bilaga 2 Provbanksprov Matematik E – vt05

Uppgift nr 1 (3249)

1/0

Lös differentialekvationen  $y' = 4y$

*Endast svar fordras*

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 1       | 2.6      | KS       | 2         | N      | 2        | 0          | 0           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |

Uppgift nr 2 (3250)

2/0

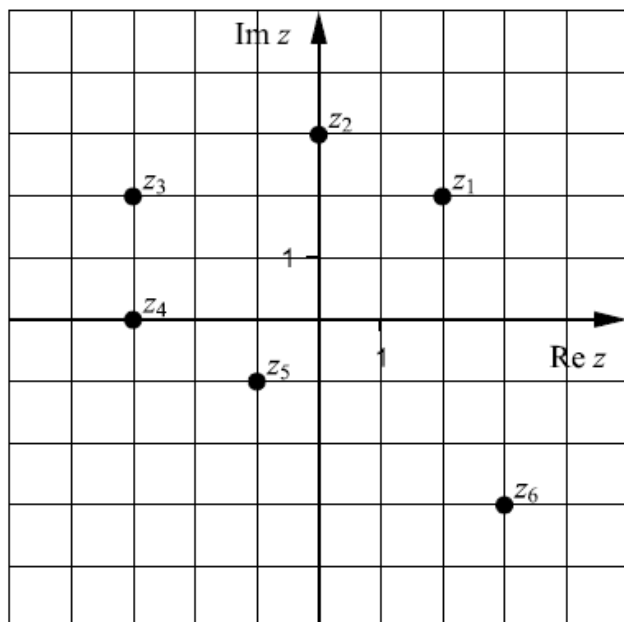
Förenkla  $(5 + i)^2$  och skriv resultatet på formen  $a + bi$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 2       | 1.1      | KS       | 6         | N      | 1        | 0          | 1           | J           | 1             | F          | N           | 2     |            |

### Uppgift nr 3 (3251)

1/0 , 1/0 , 1/0

De komplexa talen  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  och  $z_6$  är markerade i det komplexa talplan nedan.



För vilket eller vilka av talen är

a)  $|z| = 3$

*Endast svar fordras*

b)  $\operatorname{Re} z > 0$

*Endast svar fordras*

c)  $\arg z = 45^\circ$

*Endast svar fordras*

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 3a      | 1.1      | KFV      | 17        | G      | 2        | 0          | 0           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |
| 3b      | 1.1      | KFV      | 17        | G      | 2        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | N           | 1     |            |
| 3c      | 1.1      | KFV      | 17        | G      | 2        | 0          | 0           | N           | 1             | F          | N           | 1     |            |

## Uppgift nr 4 (2115)

0/2

Bestäm det komplexa talet  $z$  så att  $4z + 3\bar{z} = 28 + 5i$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 4       | 1.1      | KS       | 6         | N      | 2        | 0          | 1           | J           | 2             | F          | N           | 2     |            |

## Uppgift nr 5 (3448)

2/0

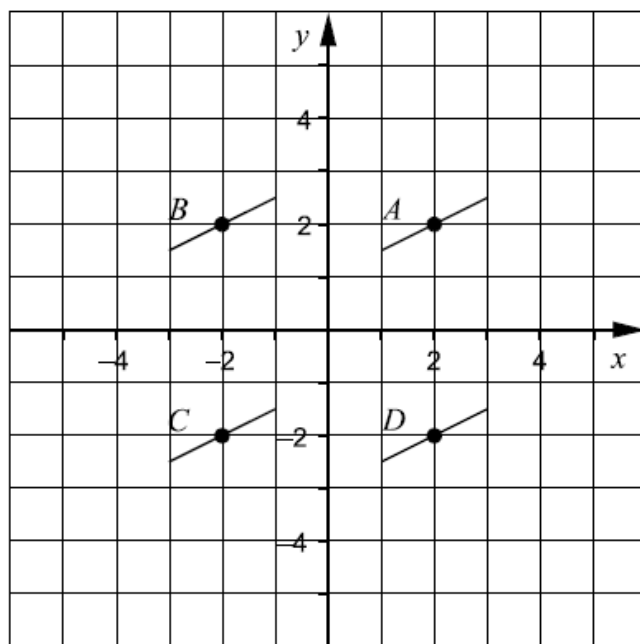
Differentialekvationen  $y' = x^2 + y^2$  har en lösning  $y$  som uppfyller villkoret  $y(1) = 0$

Bestäm ett närmevärde till  $y(3)$  med hjälp av en numerisk metod, till exempel Eulers stegmetod. Välj steglängden 1.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 5       | 2.6      | KS       | 23        | N      | 3        | 0          | 2           | J           | 1             | F          | N           | 2     |            |

Uppgift nr 6 (3133)  
0/1

Differentialekvationen  $y' + \frac{y}{2x} = 0$  har lösningskurvor som går genom punkterna  $A$ ,  $B$ ,  $C$  och  $D$  i nedanstående figur. I var och en av dessa har tangentens riktning markerats. I två av punkterna är tangentens riktning felaktigt markerad.



I vilka två punkter är tangentens riktning felaktigt markerad?

*Endast svar fordras*

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 6       | 2.6      | KFV      | 39        | G      | 3        | 0          | 1           | N           | 2             | 0          | N           | 1     |            |

Uppgift nr 7 (3093)  
0/3

Lös ekvationen  $2z^3 = -54$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 7       | 1.1      | KS       | 2         | N      | 1        | 0          | 2           | J           | 2             | F          | N           | 3     |            |

Uppgift nr 8 (3257)  
0/2

Bestäm det reella talet  $x$  så att  $\operatorname{Re}\left(\frac{10}{x+4i}\right) = 1$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 8       | 1.1      | KS       | 5         | N      | 1        | 0          | 2           | J           | 3             | F          | N           | 2     |            |

Uppgift nr 9 (3258)  
0/2 , 0/1/□

Funktionen  $f$  är definierad för alla  $x$  och  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

- Bestäm lokala maxima och minima för funktionen  $f$ .
- Undersök om funktionen har något största och minsta värde.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|---------------------------|
| 9a      | 2.4      | KS       | 13        | N      | 1        | 0          | 2           | J           | 2             | F          | N           | 2     |                           |
| 9b      | 2.4      | LS       | 15        | N      | 1        | 0          | 0           | J           | 3             | 0          | N           | 1     | Kräver resultatet från 9a |

Uppgift nr 10 (3449)  
2/0

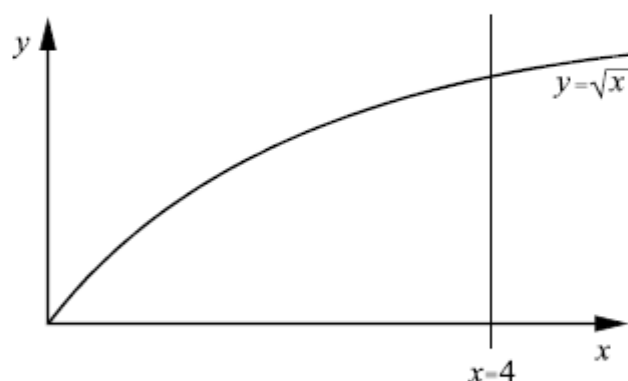
Lös ekvationen  $z^2 + 38z + 557 = 0$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 10      | 1.1      | KS       | 2         | N      | 1        | 0          | 1           | J           | 1             | FM         | J           | 2     |            |

Uppgift nr 11 (3252)

1/0 , 1/0

Ett område i första kvadranten begränsas av  $x$ -axeln, linjen  $x = 4$  och kurvan  $y = \sqrt{x}$ .  
Låt området rotera kring  $x$ -axeln.



- a) Ställ upp en integral som ger volymen av den rotationskropp som uppkommer.

*Endast svar fordras*

- b) Beräkna rotationskroppens volym.

*Endast svar fordras*

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                 |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|----------------------------|
| 11a     | 2.7      | KS       | 28        | G      | 3        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |                            |
| 11b     | 2.5      | KS       | 19        | G      | 3        | 0          | 1           | N           | 1             | F          | J           | 1     | Kräver resultatet från 11a |

Uppgift nr 12 (3091)

3/0

Bestäm den lösning till differentialekvationen  $y'' + 2y' - 8y = 0$  som uppfyller villkoren  $y(0) = 4$  och  $y'(0) = 2$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 12      | 2.6      | KS       | 9         | N      | 2        | 0          | 2           | J           | 2             | F          | J           | 3     |            |

Uppgift nr 13 (1725)  
1/0 , 2/0 , 2/0

Rymdfysiker kan genom att analysera ljuset från en stjärna bestämma hur mycket av ämnet Uran-238 som finns kvar i stjärnan. Då kan man avgöra stjärnans ålder.

Atomkärnor av Uran-238 sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot antalet kvarvarande atomkärnor,  $N$ , vid tiden  $t$  år.

- a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sönderfallet.

*Endast svar fordras*

- b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen då hälften av antalet atomkärnor har sönderfallit efter  $4,5 \cdot 10^9$  år.

Genom att analysera ljuset från stjärnan CS 31082-001 har fysikerna bestämt att det återstår ungefär 14,6 % av den ursprungliga mängden Uran-238 som fanns i stjärnan då den bildades.

- c) Bestäm stjärnans ålder.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                 |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|----------------------------|
| 13a     | 2.6      | KS       | 50        | N      | 2        | 2          | 0           | N           | 2             | N          | J           | 1     |                            |
| 13b     | 2.6      | KS       | 58        | N      | 2        | 2          | 1           | J           | 2             | FM         | J           | 2     | Kräver resultatet från 13a |
| 13c     | 1.4      | KS       | 71        | N      | 1        | 2          | 1           | J           | 2             | M          | J           | 2     | Kräver resultatet från 13b |

Uppgift nr 14 (3253)  
0/3

En liten sten kastas i en damm. Då skapas en våg i form av en cirkel på vattenytan. Enligt en förenklad modell kan man anta att cirkelns radie ökar med den konstanta hastigheten  $1,5 \text{ m/s}$ .



Med vilken hastighet ändras cirkelytans area 6,0 sekunder efter det att stenen träffat vattenytan?

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning        |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|-------------------|
| 14      | 2.3      | KS       | 46        | D      | 1        | 1          | 2           | J           | 2             | FM         | J           | 3     | Innehåll även 3.3 |

Uppgift nr 15 (2577)

1/0 , 0/2 , 0/1

En sjö har under en lång tid förorenats av utsläpp från en fabrik. Detta har medfört att det nu finns cirka 500 kg föroreningar i sjön.

Fabriken släpper ut cirka 100 kg föroreningar per år. Via ett vattendrag försvinner årligen 10 % av mängden föroreningar från sjön.

För att studera hur mängden föroreningar ( $y$  kg) i sjön förändras med tiden ( $t$  år) går det att använda en matematisk modell i form av följande differentialekvation:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y \quad \text{och} \quad y(0) = 500$$

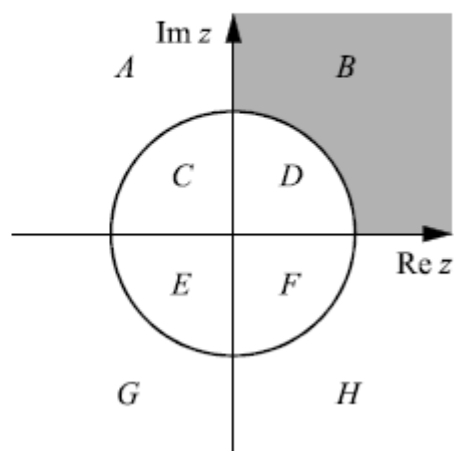


- Förklara hur  $\frac{dy}{dt} = 100 - 0,1y$  hänger ihop med förutsättningarna i texten.
- Lös differentialekvationen då  $y(0) = 500$
- Vad händer enligt modellen med mängden föroreningar i sjön i ett längre tidsperspektiv?

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                 |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|----------------------------|
| 15a     | 2.6      | LS       | 73        | D      | 2        | 2          | 0           | J           | 1             | 0          | J           | 1     |                            |
| 15b     | 2.6      | KS       | 68        | D      | 2        | 2          | 2           | J           | 2             | F          | J           | 2     |                            |
| 15c     | 2.1      | LS       | 78        | D      | 2        | 2          | 1           | J           | 3             | 0          | J           | 1     | Kräver resultatet från 15b |

Uppgift nr 16 (3450)  
1/1/α

I figuren är åtta olika områden i det komplexa talplanet markerade med  $A, B, C, D, E, F, G$  och  $H$ . Cirkeln är en enhetscirkel med centrum i origo. Cirkeln och koordinataxlarna ingår inte i något av de markerade områdena.



Bestäm i vilket eller vilka områden talet  $\frac{1}{z}$  kan ligga om  $z$  ligger i  $B$ .

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 16      | 1.1      | KS       | 44        | G      | 3        | 0          | 1           | J           | 3             | F          | J           | 2     |            |

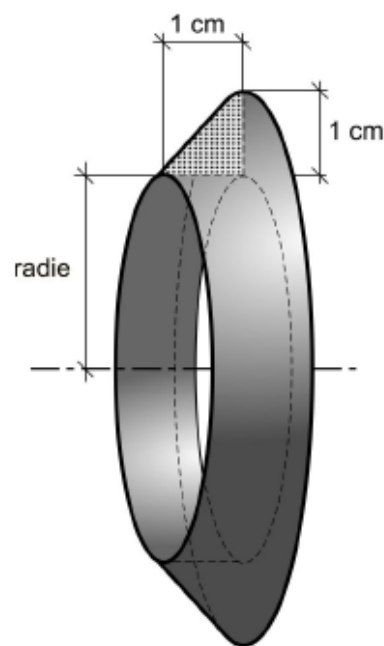
Vid bedömningen av ditt arbete kommer läraren att ta extra hänsyn till:

- hur långt du kommit i din undersökning
- hur generell din undersökning är
- hur väl du redovisat ditt arbete
- hur väl du utför dina beräkningar
- hur väl du använt det matematiska språket

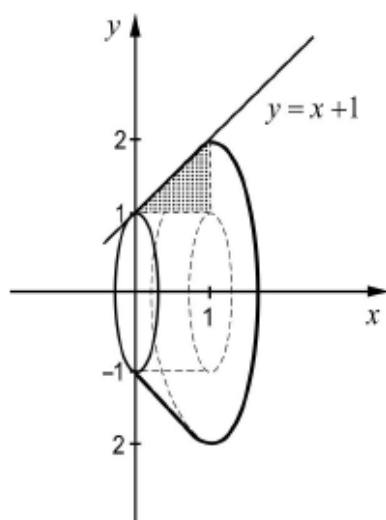
Ett företag tillverkar tätningsringar för rör i olika storlekar. Alla ringar har både höjden och tjockleken 1 cm, men kan ha olika radier (se figur 1).

Företagets produktutvecklare funderar på att utöka sortimentet. De vill därför veta hur mycket materialåtgången ökar för varje centimeter som tätningsringarnas radie ökar.

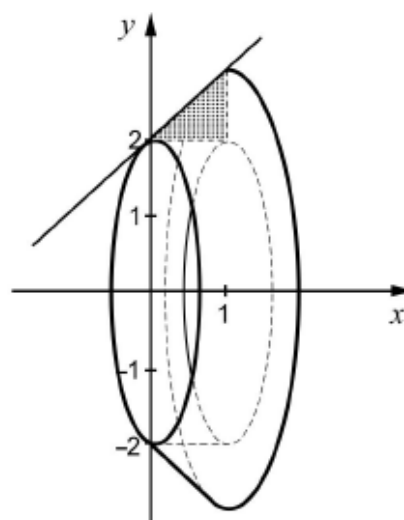
Tätningsringar kan representeras matematiskt genom rotation av trianglar runt  $x$ -axeln. I figur 2 och 3 ser du exempel på detta. I dessa figurer har ringarna radierna 1 cm respektive 2 cm.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

- Undersök och beskriv hur tätningsringarnas volym förändras för varje centimeter som radien ökar.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                 |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|----------------------------|
| 17i     | 2.7      | LS       | 71        | BG     | 1        | 1          | 2           | J           | 3             | F          | J           | 6     | Metod: Rotationsvolym      |
| 17ii    | 3.1      | LS       | 71        | BG     | 1        | 1          | 2           | J           | 3             | F          | J           | 6     | Metod: Geometri i tre dim. |

## Bilaga 3 Provuppgifter från TIMSS 1995

Uppgifter inom matematik för specialister (SM).

SM01. Det är givet att  $xy = 1$  och att  $x$  är större än 0. Vilket av följande påståenden är då sant?

- A. När  $x$  är större än 1, så är  $y$  negativt.
- B. När  $x$  är större än 1, så är  $y$  större än 1.
- C. När  $x$  är mindre än 1, så är  $y$  mindre än 1.
- D. Då  $x$  ökar, så ökar  $y$ .
- E. Då  $x$  ökar, så minskar  $y$ .

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 01      | 1.4      | FV       | 46        | N      | 1        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |            |

SM02. På en bokhylla står 5 mycket tjocka böcker, 4 medeltjocka böcker och 3 tunna böcker. På hur många sätt kan man ordna dessa böcker på hyllan, om böcker av samma tjocklek skall stå tillsammans?

- A.  $5! 4! 3! 3! = 103\,680$
- B.  $5! 4! 3! = 17\,280$
- C.  $(5! 4! 3!) \cdot 3 = 51\,840$
- D.  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$
- E.  $2^{12} \cdot 3 = 12\,288$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 02      | 1.3      | FV       | 31        | N      | 0        | 1          | 0           | N           | 2             | 0          | J           | 1     |            |

SM03. För vilka  $x$  gäller olikheten  $5x + \frac{5}{3} \leq -2x - \frac{2}{3}$ ?

A.  $x \leq -\frac{7}{9}$

B.  $x \leq -\frac{1}{3}$

C.  $x \geq 0$

D.  $x \geq \frac{7}{3}$

E.  $x \geq \frac{9}{3}$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                                                                                                                                           |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 03      | 1.4      | FV       | 4         | N      | 1        | 0          | 1           | N           | 1             | 0          | J           | 1     | Med uppgiftens formulering borde, enligt oss, både alternativ A och B anses vara korrekt. Uppgiften går även att lösa grafiskt med miniräknare, TSM. |

SM04. Det är givet att  $\log_b 2 = \frac{1}{3}$ .

$\log_b 32$  är då lika med

A. 2

B. 5

C.  $-\frac{3}{5}$

D.  $\frac{5}{3}$

E.  $\frac{3}{\log_2 32}$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 04      | 1.4      | FV       | 8         | N      | 0        | 0          | 1           | N           | 2             | 0          | J           | 1     |            |

SM05. Ett radioaktivt ämne sönderfaller enligt formeln

$$y = y_0 e^{-kt}$$

där  $y$  är vikten av återstoden av ämnet efter  $t$  dagar och  $y_0$  är värdet av  $y$  för  $t = 0$ .

Bestäm konstanten  $k$  för ett ämne vars halveringstid är 4 dagar. (Halveringstid är den tid det tar för hälften av ämnet att sönderfalla.)

A.  $\frac{1}{4} \ln 2$

B.  $\ln \frac{1}{2}$

C.  $\log_2 e$

D.  $(\ln 2)^{\frac{1}{4}}$

E.  $2e^4$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 05      | 1.4      | FV       | 40        | N      | 0        | 1          | 1           | N           | 2             | 0          | J           | 1     |            |

SM06. Ett prov består av 13 frågor. Man behöver endast svara på den ena av de två första frågorna och endast på nio av de återstående. Hur många olika kombinationer av uppgifter kan en elev välja mellan?

A.  $\binom{13}{10} = 286$

B.  $\binom{11}{8} = 165$

C.  $2 \cdot \binom{11}{9} = 110$

D.  $2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$

E. Ett annat antal.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 06      | 1.3      | FV       | 38        | N      | 0        | 1          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |            |

SM07. Antalet bakterier i en odling växer exponentiellt. En dag klockan 13 var antalet bakterier 1 000. Kl 15 samma dag fanns det 4 000.

Hur många bakterier fanns det denna dag kl 18?

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 07      | 1.4      | KS       | 24        | N      | 1        | 2          | 2           | N           | 2             | M          | J           | 1     |            |

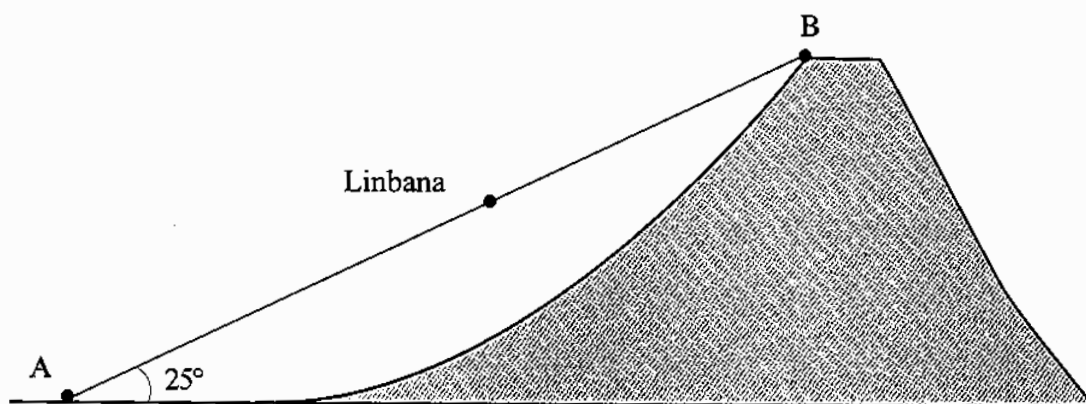
SM08. Bestäm alla komplexa tal  $z$  som utgör lösningen till ekvationen

$$z + 2\bar{z} = 3 + i$$

där  $\bar{z}$  är konjugatet till  $z$ .

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                               |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------------------------------------|
| 08i     | 1.1      | KS       | 13        | N      | 4        | 0          | 1           | N           | 4             | 0          | J           | 2     | För elever som läst D-kursen i matematik |
| 08ii    | 1.1      | KS       | 13        | N      | 3        | 0          | 1           | N           | 2             | 0          | J           | 2     | För elever som läst E-kursen i matematik |

SM09. En tur med linbanan från station A till toppstationen B på Mt. Glacier tar 16 minuter. Genomsnittsfarten är 2 m/s och banan går rätlinjigt med lutningen  $25^\circ$  mot horisontalplanet.



Beräkna höjden av Mt. Glacier (mätt från nivån för station A).  
Redovisa alla beräkningar och svara i hela meter.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 09      | 3.4      | KS       | 32        | B      | 1        | 1          | 2           | J           | 2             | M          | J           | 3     |            |

SM10. Lös ekvationen för alla reella värden på  $x$ .

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$$

Redovisa alla beräkningar.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 10      | 1.4      | KS       | 7         | N      | 1        | 0          | 1           | J           | 3             | 0          | J           | 3     |            |

SM11. Accelerationen hos ett föremål, som rör sig längs en rät linje, kan beräknas med hjälp av

- A. lutningen på sträcka - tidgrafen.
- B. arean under sträcka - tidgrafen.
- C. lutningen på hastighet - tidgrafen.
- D. arean under hastighet - tidgrafen.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 11      | 2.3      | FV       | 32        | N      | 1        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |            |

SM12. Värdet av  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h}$  är

A. 0

B.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

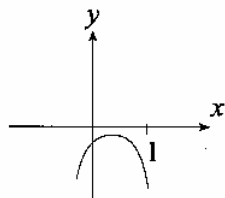
E.  $\infty$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                                  |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|---------------------------------------------|
| 12      | 2.1      | FV       | 3         | N      | 0        | 0          | 1           | N           | 3             | 0          | J           | 1     | Går att lösa grafiskt med miniräknare, TSM. |

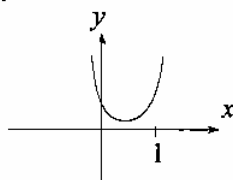
SM13. Nedanstående figurer visar kurvor  $y = f(x)$ . I vilken av figurena gäller alla tre av följande villkor?

$f'(0) > 0$ ,  $f'(1) < 0$ , och  $f''(x)$  är alltid negativ?

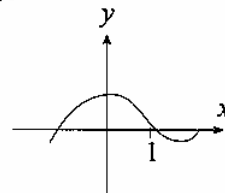
A.



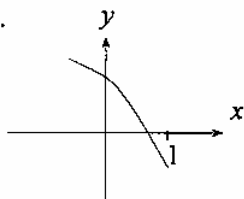
B.



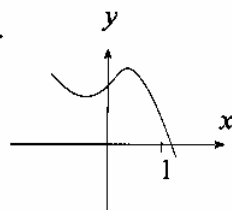
C.



D.

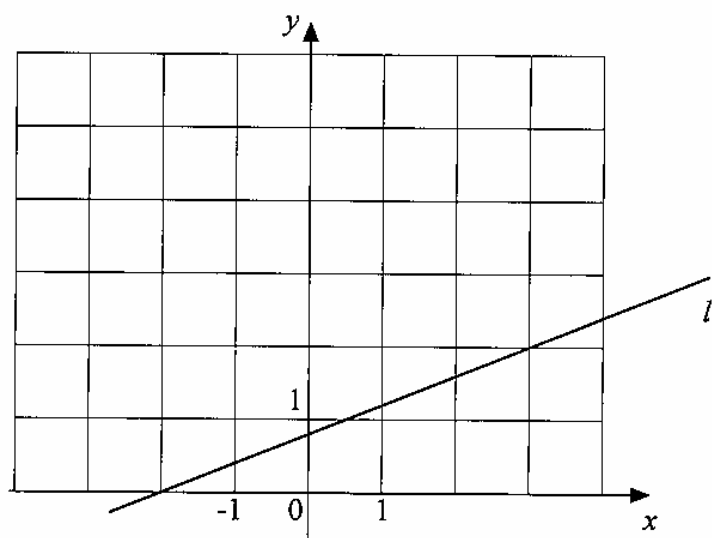


E.



| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 13      | 2.4      | FV       | 18        | G      | 1        | 0          | 0           | N           | 2             | 0          | J           | 1     |            |

SM14. I nedanstående figur har linjen  $l$  ekvationen  $y = f(x)$ .



Då har  $\int_{-2}^3 f(x) dx$  värdet

- A. 3
- B. 4
- C. 4,5
- D. 5
- E. 5,5

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 14      | 2.5      | FV       | 9         | G      | 1        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |            |

SM15. Summan av den oändliga geometriska serien  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$  är

- A.  $\frac{5}{8}$
- B.  $\frac{2}{3}$
- C.  $\frac{3}{5}$
- D.  $\frac{3}{2}$
- E.  $\infty$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                         |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------------------------------|
| 15      | 1.2      | FV       | 7         | N      | 3        | 0          | 1           | N           | 2             | F          | J           | 1     | Går att lösa med miniräknare, TSM. |

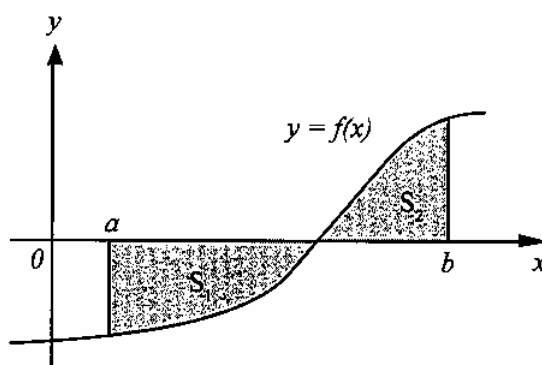
SM16. Hastigheten  $v$  hos en kropp, som rör sig längs en rät linje, är  $t$  sekunder efter starten från viloläge  $v = 4t^3 - 12t^2$  meter per sekund.

Efter hur många sekunder räknat från starten är partikelns acceleration noll?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 6

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning                                  |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|---------------------------------------------|
| 16      | 2.3      | FV       | 31        | N      | 0        | 1          | 1           | N           | 2             | 0          | J           | 1     | Går att lösa grafiskt med miniräknare, TSM. |

SM17.



Figuren visar kurvan  $y = f(x)$ .

$S_1$  betecknar arean av området begränsat av  $x$ -axeln, linjen  $x = a$  och kurvan  $y = f(x)$ ;

$S_2$  betecknar arean av området begränsat av  $x$ -axeln, linjen  $x = b$  och kurvan  $y = f(x)$ ;

Man förutsätter att  $a < b$  och  $0 < S_2 < S_1$ .

I så fall är  $\int_a^b f(x) dx$

A.  $S_1 + S_2$

B.  $S_1 - S_2$

C.  $S_2 - S_1$

D.  $|S_1 - S_2|$

E.  $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 17      | 2.5      | FV       | 31        | G      | 1        | 0          | 0           | N           | 1             | 0          | J           | 1     |            |

SM18. Grafen till funktionen  $g$  går genom punkten  $(1,2)$ . Lutningen på funktionens tangent i en godtycklig punkt  $(x, y)$  är  $g'(x) = 6x - 12$ .

Bestäm  $g(x)$ . Redovisa alla beräkningar.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 18      | 2.3      | KS       | 16        | N      | 1        | 0          | 1           | J           | 2             | 0          | J           | 3     |            |

SM19. Hörnen på triangeln PQR ligger i punkterna P(1, 2), Q(4, 6) och R(- 4, 12). Vilket påstående om triangeln PQR är sant?

- A. PQR är en rätvinklig triangel med den räta vinkeln i P.
- B. PQR är en rätvinklig triangel med den räta vinkeln i Q.
- C. PQR är en rätvinklig triangel med den räta vinkeln i R.
- D. PQR är inte en rätvinklig triangel.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 19      | 3.2      | FV       | 45        | N      | 1        | 0          | 2           | N           | 2             | 0          | J           | 1     |            |

SM20. Vilket kägelsnitt representerar ekvationen  $(x - 3y)(x + 3y) = 36$ ?

- A. Cirkel
- B. Ellips
- C. Parabel
- D. Hyperbel

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 20      | 3.1      | FV       | 8         | N      | 4        | 0          | 1           | N           | 4             | 0          | J           | 1     |            |

SM21. Bestäm avståndet mellan de punkter på  $x$ -axeln och  $z$ -axeln, där planet  $3x + 2y - 4z = 12$  skär axlarna.

A.  $\sqrt{7}$

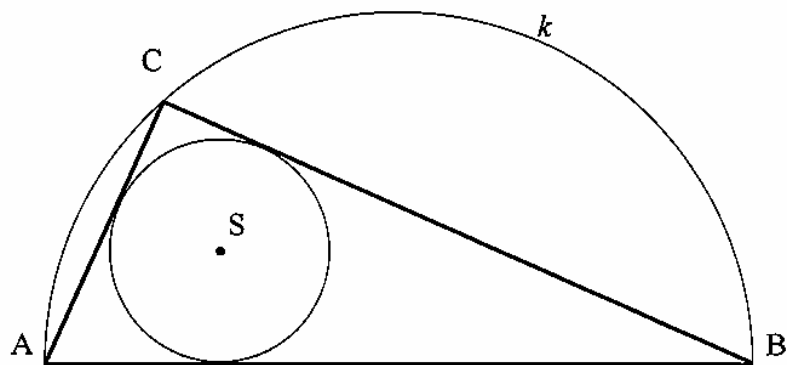
B. 1

C. 5

D. 7

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning              |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|-------------------------|
| 21      | 3.1      | FV       | 13        | N      | 1        | 0          | 1           | N           | 3             | F          | J           | 1     | Avancerad kognitiv trea |

SM22.



AB är diameter i halvcirkeln  $k$ . C är en godtycklig punkt (annan än A och B) på halvcirkelbågen. S är medelpunkt i den cirkel, som är inskriven i  $\triangle ABC$ .

Vilket av följande gäller?

- A. Vinkeln ASB förändras då C rör sig längs  $k$ .
- B. Storleken på vinkeln ASB är oberoende av läget på C, men den kan inte bestämmas utan att man vet radiens längd.
- C. Vinkeln ASB =  $135^\circ$  för alla C.
- D. Vinkeln ASB =  $150^\circ$  för alla C.

| Uppgift | Innehåll | Svarstyp | Textmängd | Grafik | Ämnesord | Verklighet | Beräkningar | Redovisning | Kognitiv nivå | Hjälpmedel | Miniräknare | Poäng | Anmärkning |
|---------|----------|----------|-----------|--------|----------|------------|-------------|-------------|---------------|------------|-------------|-------|------------|
| 22      | 3.3      | FV       | 57        | B      | 1        | 0          | 1           | N           | 3             | 0          | J           | 1     |            |

# Bilaga 4 Uppdragsavtal mellan Skolverket och Umeå universitet

## Uppdragsavtal

1 (2)

2007-10-xx

### Överenskommelse mellan Skolverket och Umeå universitet för analys av TIMSS Advanced i relation till de svenska styrdokument

#### Parter

Skolverket  
106 20 Stockholm

Telefon: 08-52 73 32 00  
Telefax:: 08-24 44 20

Organisationsnummer: 202 100 – 4185

Umeå universitet  
Institutionen för beteendevetenskapliga mätningar (Konsulten),  
Umeå universitet  
901 87 Umeå

Telefon: 090-786 50 00 (vxl)  
Telefax:: 090-786 99 95

Organisationsnummer: xxxxxxxxxx

#### Uppdragets omfattning, genomförande och redovisning

Uppdraget innebär att genomföra en studie med syfte att utvärdera i vad mån TIMSS Advanced's ramverk och provinstrument och gymnasieskolans styrdokument överensstämmer. Utvärderingen ska avse överensstämmelsen både i innehållsmässiga och i kognitiva hänseenden. Vidare skall TIMSS Advanced's ramverk och provinstrument jämföras med den tolkning av styrdokument som görs i de nationella proven (för de kurser nationella prov/prov i provbanken finns). Elever som deltar i TIMSS Advanced läser kurserna matematik D och E samt fysik B på NV eller TE programmen.

Resultaten skall presenteras så att de kan kopplas till elevernas uppnådda resultat inom olika ämnesområden samt lärarnas svar på lärarenkäten i TIMSS Advanced om vilka ämnesområden som täckts i undervisningen fram till och med provtillfället (fråga 24 i lärarenkäterna).

Studien skall resultera i en rapport som i huvudsak skall följa den struktur som använts i studien "Med fokus på matematik och naturvetenskap". Om Skolverket finner det lämpligt kan en referensgrupp med verksamma lärare involveras. Skolverket har under hand rätt att ändra uppdraget.

Arbetet genomförs inom ramen för projektet "Analys och syntes av resultat". Arbetet skall genomföras i samarbete med Skolverkets projektledare under tidsperioden 2007-10-15--2008-04-30.

Projektledare/kontaktperson hos Skolverket: Bo Palaszewski (till dess annat meddelats)

Projektledare/kontaktpersoner hos Konsulten: Peter Nyström (Konsulten äger rätt att byta projektledare/kontaktperson efter överenskommelse med Skolverket.)

## Uppdragsavtal

2 (2)

2007-10-xx

Projektledaren hos konsulten skall löpande rapportera till Skolverkets projektledare hur uppdraget fortskrider. Avstämning skall ske i form av seminarier tillsammans med Skolverket vid åtminstone ett tillfälle under projektiden, i januari 2008.

Slutligt förslag till rapport skall levereras till Skolverket senast 30 april 2008. Skolverket svarar för layout och eventuell tryckning av rapporten.

### Upphovsrätt

Skolverket erhåller full och oinskränkt äganderätt till det material som konsulten tar fram inom ramen för uppdraget. Konsulten garanterar att materialet fritt kan användas av Skolverket och att det inte belastas av eller gör intrång i annans upphovsrätt.

### Ersättning och betalning

Ersättning för uppdraget uppgår till högst totalt XXXXXX SEK. Utbetalning sker vid tre tidpunkter med en tredjedel av den överenskomna ersättningen (30 oktober, 15 december 2007 och då arbetet avrapporterats). Medlen utbetalas efter inkommen faktura från Umeå universitet.

I övrigt hänvisas till de allmänna villkoren för konsultuppdrag.

Skolverkets kontering:

| Kontonr | Projektnr | Orgenhet | Anslag        |
|---------|-----------|----------|---------------|
| 4053    | 113041    | 1076     | 306033 MARIA? |

Denna Överenskommelse har upprättats i två likalydande exemplar varav parterna tagit var sitt.

Stockholm 2007-10-  
Skolverket

Umeå 2007-10-  
Umeå universitet  
Institutionen för beteendevetenskapliga  
mätningar

.....  
Bo Palaszewski ANITA?  
Projektledare

.....  
Peter Nyström  
Projektledare för matematik

Stockholm 2007-10-  
Skolverket

Umeå 2007-10-  
Umeå universitet

.....  
Tommy Lagergren  
Enhetschef

.....  
xxxxxxxxxxx  
Prefekt ???

Bitr. chefsjurist sign .....