



LÄRARPROGRAMMET

Från text till algebra

En studie av hur elever som läser matematik A i gymnasiet översätter
uppgifter till algebraiskt språk

Lidia Kristiansson
Maria Rosengren

HÖGSKOLAN I KALMAR

Institutionen för Hälso- och beteendevetenskap

Arbetets art: Examensarbete, 10p
Läraryrket

Titel: Från text till algebra – En studie av hur elever som läser matematik A i gymnasiet översätter uppgifter till algebraiskt språk

Författare: Lidia Kristiansson, Maria Rosengren

Handledare: Maria Bjerneby Häll

SAMMANFATTNING

Avsikten med studien är att öka förståelsen för och kunskapen om hur elever som läser matematik A översätter uppgifter från text till algebra. Undersökningen belyser även vilka typer av svårigheter elever stöter på vid översättningsmomentet. För att uppfylla syftet med arbetet har en litteraturstudie samt en kvalitativ undersökning genomförts. Drygt 50 elever som går första året på gymnasiet och läser matematik A, deltog i undersökningen, där eleverna fick översätta och lösa sex uppgifter.

Resultatet av undersökningen visar att elever väljer olika tillvägagångssätt för att översätta uppgifter. Variationen beror dels på elevers uppfattningar av bokstavssymboler, dels på i vilken utsträckning de behärskar språket i uppgifterna. Elever som enligt vår tolkning inte är tillräckligt bekanta med det matematiska språket tenderar att översätta och lösa uppgifter med hjälp av tidigare moment i matematiken. Ett exempel är att elever löser algebraiska uppgifter numeriskt.

Av litteraturstudien och undersökningens resultat framgår att avsaknaden av ett välutvecklat språk och bristande förståelse för matematiska begrepp gör att elever kan få svårigheter när de översätter en situation till algebraiskt språk. En konsekvens av vår undersökning är att algebraundervisningen inte ska vara en ”tyst” aktivitet. Det är istället av stor vikt att elever ges tid till att analysera och diskutera textuppgifters innehåll.

INNEHÅLL

1	INTRODUKTION	4
2	BAKGRUND.....	6
2.1	Varför algebra för alla?	6
2.2	Vad ska eleverna kunna inom algebra?	7
2.3	Algebrans historiska utveckling	8
2.4	Paralleller mellan algebrans historia och elevers lärande.....	9
2.5	Algebra som språk	11
2.6	Den algebraiska cykeln	13
2.7	Översättning till algebraiskt uttryck.....	14
2.8	Olika uttrycksformer	16
2.9	Sammanfattning av litteraturstudien	16
3	SYFTE OCH PROBLEMFORMULERING	18
4	METOD OCH GENOMFÖRANDE AV DEN EMPIRISKA STUDIEN	19
4.1	Metoder för insamling av data	19
4.2	Testuppgifterna.....	19
4.3	Urval av deltagare.....	21
4.4	Forskningsetiska principer	21
4.5	Genomförande.....	21
4.6	Bearbetning av insamlat datamaterial	22
5	RESULTAT.....	23
5.1	Uppgift 1	23
5.2	Uppgift 2	25
5.3	Uppgift 3	26
5.4	Uppgift 4	30
5.5	Uppgift 5	30
5.6	Uppgift 6	31
6	DISKUSSION.....	34
6.1	Metoddiskussion.....	34
6.2	Resultatdiskussion.....	34
6.3	Slutord	36
	REFERENSLISTA.....	38
	BILAGA: Testuppgifterna	

1 INTRODUKTION

När vi började fundera på vad vårt examensarbete skulle handla om föll det sig naturligt att fokusera på något inom matematik. Detta beror på att vi har läst 60 p matematik och logiskt tänkande som vår första inriktning på lärarutbildning. Genom hela vår utbildning upplevde vi algebra som den mest roligaste och stimulerande delen inom matematik.

Idén mognade gradvis under vår sista VFU-period där vi träffade på elever som börjat läsa matematik A. Under tiden som vi arbetade med dem upptäckte vi att många elever hade svårigheter med bokstavsräkning. Vi lade märke till att eleverna tyckte det var ansträngande att läsa uppgifter med mycket text som sedan skulle översättas till ett matematiskt uttryck. Vissa ord kunde uppfattas som speciellt svåra i texterna och gjorde eleverna osäkra. Ord som uppskatta, kvot, multiplicera, dividera ställde till problem. En uppgift som: ”vilket tal i bråkform ska man dividera $6/11$ med för att kvoten ska bli 1?” uppfattades som svår. En enkel ekvation som $x + 12 = 20$ klarade eleverna av att lösa men att beräkna uttryckets värde, $x + 12$ för $x = 10$ kunde orsaka förvirring hos elever. Det vi tror orsakade problemet är att eleverna inte förstår begreppet ”uttryckets värde”. Vi uppfattade att det berodde på att eleverna saknade matematiskt språk.

Även att förenkla ett algebraiskt uttryck kunde ställa till problem. Vår förklaring till detta är att elever saknar vissa kunskaper och färdigheter i aritmetik, främst användningen av prioriteringsregler men även att räkna med bråk. Vi har även uppmärksammat att elever protesterar om x byts ut mot en annan bokstav. Om eleverna är vana att se bokstaven x som obekant och läraren ersätter x med en annan bokstav blir de osäkra. Detta kan bero på att eleverna inte helt förstår innebörden av att räkna med obekanta. Om de hade den förståelsen skulle de inte protestera när läraren använde en annan bokstav än x som obekant. Ett annat exempel som tyder på att elever har problem med att räkna med bokstäver är att de försöker undvika att använda ekvationer för att lösa textuppgifter. Istället resonerar de sig fram till en lösning men kan inte redovisa sin tankegång på ett matematiskt korrekt sätt.

Vår erfarenhet är att dagens algebraundervisning i skolan till stor del handlar om förenkling av algebraiska uttryck och betydligt mindre tid ägnas åt översättning från text till symboluttryck. Persson (2002) skriver att detta kan leda till att eleverna lär sig att hantera uttryck mekaniskt men saknar en djupare förståelse för det algebraiska språket. Dagens tekniska hjälpmedel t.ex. symbolhanterande räknare, kommer i framtiden i större utsträckning att hjälpa oss med förenkling av algebraiska uttryck. Däremot måste man på egen hand behärska att översätta en textuppgift till matematiskt symbolspråk (Persson, 2002).

Både kursplanen för grundskolans matematik (Skolverket, 2000a) och kursplanen för gymnasieskolans matematik A (Skolverket, 2000b) betonar vikten av att elever ska kunna tolka, jämföra och värdera vid problemlösning. Kursplanen i matematik A framhåller också att eleverna skall kunna tolka och hantera algebraiska uttryck som krävs för problemlösning. Båda kursplanerna trycker mer på översättning och tolkning än på förenkling-algebra som enligt vår erfarenhet förekommer i stor omfattning i skolan.

Vår avsikt med detta examensarbete är att belysa hur elever översätter uppgifter till algebraiskt språk. Förmågan att kunna översätta och tolka kommer i framtidens samhälle

enligt Persson (2002) att vara viktigare än förenkling. Genom att lägga fokus på översättningen och språket förbereder vi elever bäst på att möta problem eftersom *”förmågan att inom ett begreppsområde kunna göra översättningar mellan olika uttrycksformer, representationer, starkt bidrar till problemlösningsförmåga och ökad förståelse i matematik.”*(Bergsten m.fl., 1997, s. 35).

2 BAKGRUND

Syftet med bakgrunden är att kortfattat beskriva vad algebra är och algebrans historiska utveckling. Forskning om relationen mellan algebrans historiska utveckling och elevers lärande, samt forskning om elevers förståelse av det algebraiska språket och bokstavs-symboler, behandlas. Avslutningsvis behandlas översättning mellan olika uttrycksformer.

2.1 Varför algebra för alla?

Algebra består av studiet av operationer med tal och relationer mellan tal med användande av variabler eller bokstavssymboler. Användandet av symboler gör att algebran får större allmängiltighet än aritmetiken (Thompson, 1994).

Många människor anser att de inte haft någon nytta i sina liv av den algebra de har fått lära sig i skolan. Persson (2002) frågar sig om detta tyder på att vi slösar tid och energi på algebra i skolan till ingen nytta.

I artikeln *Behöver alla lära sig algebra?* motiverar Persson (2002) varför alla behöver lära sig algebra. Algebra innebär bl.a. att kunna representera komplicerade situationer på ett överskådligt sätt. Detta kan göras i form av variabler, parametrar, formler, tabeller och grafer som beskriver olika samband. När man läser en dagstidning kan det krävas att läsaren måste behärska de ovan nämnda formerna för att kunna bilda sig en förståelse för innehållet. Persson (2002) menar att kunskaper i algebra ger individen möjlighet att på ett helt annat sätt bedöma gjorda beräkningarnas giltighet eller riktigheten i diagram i tidningar eller i TV. För att kunna ta del av information i vårt samhälle kan det ses som en demokratisk rättighet att få lära sig algebra. Detta innebär enligt Persson (2002) likvärdiga möjligheter att utveckla och förkovra sig. Eftersom algebra är ett naturligt språk för problemlösning och stärker förmågan att föra resonemang, dra slutsatser och kritiskt analysera, är den väsentlig för att alla ska ha likvärdiga möjligheter till ett livslångt lärande. En annan anledning till att alla ska få lära sig algebra är att vissa vidarestudier efter gymnasiet kräver kunskaper inom detta område. Nekas elever att lära sig algebra begränsas de också för fortsatt utbildning. För elever som senare vill syssla med exempelvis programmering är algebrakunskaper en nödvändighet (Persson, 2002).

International Commission on Mathematical Instruction, ICMI, arrangerade en konferens i Melbourne i Australien 2001 med temat forskning om undervisning och lärande i algebra. Resultaten från konferensen redovisas i *The future of Teaching and Learning of Algebra* (Stacey m.fl. 2004). Diskussionerna om varför elever ska lära sig algebra i skolan sammanfattas i följande punkter:

Algebra

- Is a necessary part of the general knowledge of members of an educated and democratic society
- Is a prerequisite for further study of mathematics, certain higher education courses, and many fields of employment

- Is a crucial component of mathematical literacy, which underpins a nation's technological future and economic progress
- Is an efficient way to solve certain types of problems
- Promotes the intellectual activities of generalisation, organised thinking, and deductive reasoning
(MacGregor, 2004, s. 318)

Ett sätt att motivera algebra är genom att anknyta till vardagliga situationer för att eleverna ska inse algebrans betydelse för deras egna och samhällets utveckling, men

*"Nyttoaspekten är inte den främsta motiveringen att lära sig algebra[...]. **Spänningen, utmaningen, nöje och skönhet** kan i många fall fungera bättre som drivkraft"*
(Bergsten m.fl., 1997, s.25)

När elever arbetar med utmanande problem utvecklas deras eget tänkande (Bergsten m.fl., 1997). En intellektuell utmaning är en av de starkaste faktorerna som ligger bakom eget lärande och utveckling. Det är ett centralt motiv eftersom det inte är viktigt vilken typ av uppgifter man arbetar med. Huvudsaken är att eleverna klarar av utmaningen.

Persson (2002) anser att strävan efter att utveckla sin kognitiva förmåga finns i varje människa och är en drivkraft för nytt lärande och sökande efter nytt tänkande. Det är många som tycker det är roligt och stimulerande att lösa knepiga matematiska problem, gåtor och korsord. Den lustfyllda utmaningen kan ge tillfredsställelse. Det är viktigt att använda sig av verklighetsanknutna problem i undervisningen, men minst lika meningsfullt verkar det vara för eleverna att arbeta med uppgifter som utmanar dem intellektuellt. Algebra kan vara en sådan lustfylld utmaning om eleverna upplever att det är roligt att arbeta med det.

2.2 Vad ska eleverna kunna inom algebra?

Av kursplanen i matematik framgår att när eleverna slutar grundskolan ska de kunna:

- tolka, sammanställa, analysera och värdera data i tabeller och diagram
- tolka och använda enkla formler, lösa enkla ekvationer, samt kunna tolka och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser.
(Skolverket, 2000a)

Elever som har avslutat matematik A skall enligt kursplanen kunna:

- tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i studieinriktningens övriga ämnen
- ställa upp och tolka linjära ekvationer och enkla potensekvationer samt lösa dem med för problemsituationen lämplig metod och med lämpliga hjälpmedel.
(Skolverket, 2000b)

Vid ICMI-konferensen år 2001 sammanställde en arbetsgrupp de minimikrav på basfärdigheter i algebra som en elev kan förväntas ha efter genomgången utbildning år F – 12.

Sammanställningen ger ett internationellt perspektiv på vad alla elever i världen bör behärska inom algebra. Basfärdigheterna innebär att eleverna:

- Become confident in their ability to interpret information expressed in algebraic notation
 - Recognise mathematical structures and patterns, and understand that algebra is used to express such generalities;
 - Interpret and use formulas, especially substituting numbers to find values;
 - Know how formulas are related to, and derived from, sets of data;
 - Understand the relationships between functions and graphs:
 - Know at least qualitatively some important properties of linear and exponential functions, and the implications for managing personal financial affairs...
 - Understand how notations and representations can be used for modelling certain situations and solving problems;
 - Understand arithmetic operations more deeply to achieve a more secure grasp of basic mathematical ideas
 - Use technological tools
 - Experience the pleasure of doing mathematical experiments...
- (MacGregor, 2004, s. 325)

Båda kursplanerna och ovanstående internationella sammanställning av basfärdigheter i algebra tar upp liknande mål som elever bör behärska i algebra. Det gemensamma är att elever bör bland annat kunna tolka och använda formler, använda algebraiska uttryck för att lösa matematiska situationer samt kunna använda sig av funktioner. I den internationella sammanställningen understryks även att elever ska uppleva nöje av laborativ matematik.

2.3 Algebrans historiska utveckling

Ordet algebra härstammar enligt Thompson (1994) ifrån det arabiska uttrycket *al-jabr* och betydde ursprungligen ekvationslösning.

Kognitiva inlärningsprocesser av skolalgebra anses av forskare ha sitt ursprung i den historiska utvecklingen av algebran. Kieran (1992) skriver att algebrans historiska utveckling kan sammanfattas i tre steg: det *retoriska*, det *synkoperade* och det *symboliska* steget.

Algebrans historiska utveckling, från grekernas matematik till den moderna matematiken, har behandlats av Thompson (1996). Grekerna använde sig av *retorisk* algebra vilket innebär att all matematik, även siffrorna, uttrycks med ord. Ett viktigt steg i algebrans utveckling är Diophantos arbete på 300-talet i Alexandria. Diophantos vidareutvecklade den retoriska algebran genom att införa förkortningar för ord. Hans algebra blev kallad för *synkoperad* algebra och ses som en länk mellan den äldre retoriska algebran och den

moderna symboliska algebran. Den synkoperade algebran slog dock inte igenom förrän i slutet på 1500-talet då Diophantos verk, *Arithmetika*, översattes till latin och spreds i Europa.

Thompson (1996) omnämner matematikern al-Khwarizmi som var verksam på 800-talet i Bagdad. Al-Khwarizmis mest betydelsefulla verk, *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wâl muqabala*, är en lärobok bestående av tre delar och skriven på arabiska. Den första delen är en grundläggande retorisk framställning om första- och andragradsekvationer. Andra delen behandlar geometri och den sista delen handlar om invecklade kalkyler. Endast bokens första och andra del översattes till latin.

Övergången från den synkoperade till den *symboliska* algebran kunde enligt Kieran (1992) genomföras genom att Diophantos verk översattes till latin. Översättningen spreds i Europa och den berömda matematikern Francois Viète vidareutvecklade algebran i början på 1600-talet. Viète byggde vidare på Diophantos synkoperade algebra genom att införa bokstäver som kunde representera såväl kända som okända storheter. I och med detta föddes den symboliska algebran. Med den symboliska algebran blev det möjligt att uttrycka generella lösningar på matematiska problem och att använda algebran som redskap för att bevisa regler och kontrollera numeriska förhållanden.

I *Matematiken i historien* beskriver Thompson (1996) att 1600-talet innebar ett paradigmskifte inom vetenskapen. Tidigare var vetenskapens begrepp knutna till vardagliga händelser men efter paradigmskiftet blev vetenskapen mer abstrakt och begreppen mer kontextoberoende. Persson (2005) skriver att algebran utvecklades vidare av bland annat Leibniz och Newton som uppfann regler och konventioner för strukturella operationer. Det innebär att lagar, som behandlar obekanta och bekanta storheter på samma sätt, introduceras (Thompson, 1994). Under arton- och nittonhundratalet utvecklades slutligen den abstrakta algebran med de regler som styr alla algebraiska system.

2.4 Paralleller mellan algebrans historia och elevers lärande

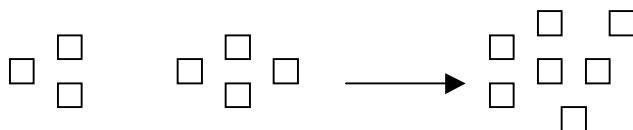
"Individen upprepar (rekapitulerar) under sitt korta jordeliv det mänskliga släktets kognitiva utveckling."

(Thompson, 1996, s. 450)

Citat ovan är hämtat från *Matematiken i historien* av Thompson (1996) och är en tillämpning av rekapitulationstesen. Tesen innebär att varje individs kognitiva utveckling reflekterar mänsklighetens utveckling. Jean Piaget tillämpade rekapitulationstesen då han fokuserade på människans sätt att tänka, ifrån barndomen upp till vuxen ålder. Genom att intervjua barn ansåg Piaget att vi får veta hur vi själva tänkte som små men även hur våra förfäder tänkte. Rekapitulationstesen kan enligt Thompson (1996) även tillämpas på matematikundervisning. En analys av historien kan antyda att de områden inom matematiken som tog lång tid att utvecklas också kommer att innebära svårigheter för eleverna. Läraren behöver uppmärksamma dessa moment och ha detta i åtanke när en kursplanering konstrueras. Eftersom det tog lång tid för mänskligheten att utveckla det algebraiska symbolspråket kan vi förvänta oss att det tar lång tid och är en krävande process för eleverna att utveckla ett algebraiskt tänkande. Grundidén med rekapitulationstesen är att

undervisningen inom matematiken bör följa den historiska utvecklingen. Detta tyder på att den grundläggande algebraundervisningen bör vara retorisk (Thompson, 1996).

I följande exempel, hämtat från Thompson (1996), visas hur förståelsen för det symboliska språket kan underlättas:



1. Tre klossar och fyra klossar är tillsammans sju klossar

2. 3 klossar + 4 klossar = 7 klossar

3. $3k. + 4k. = 7k.$

4a. $3x + 4x = 7x$

4b. $3 + 4 = 7$

(Efter Thompson, 1996, s. 453)

I steg 1-2 behandlas problemet retoriskt och i steg 3 står $k.$ för en förkortning av "klossar" och syftar därför på Diophantos synkoperade algebra. I steg 4a införs symbolen x istället för $k.$ och detta är en naturlig övergång ifrån de verkliga objekten (klossar) till det algebraiska symbolspråket. En sådan övergång kan minska svårigheterna för eleverna att räkna med bokstäver. Steg 3 kan även leda till 4b som är ett aritmetiskt uttryck. Intressant är att det algebraiska uttrycket i steg 3 uppfattas som enklare än det aritmetiska uttrycket i steg 4b. I det algebraiska uttrycket finns $k.$ som en koppling till de verkliga objekten, vilket saknas i det aritmetiska uttrycket. Övergången från steg 1, det retoriska, till steg 4a, det algebraiska symboluttrycket, sker på högstadiet men tydliggörs enligt Thompson (1996) inte tillräckligt för eleverna.

Att algebran är, och alltid har varit, en stötesten för eleverna framgår av Persson (2005). Persson (2005) skriver att algebran på mer än ett sätt utgör bokstavliga svårigheter i matematiklärandet. Slutsatsen är att lärare under alla tider har kämpat med att utveckla olika undervisningsmetoder som underlättar elevernas algebraförståelse.

Att algebra genom tiderna har varit svårt att ta till sig framgår av följande citat som härstammar från 1600-talet:

"Algebra är Människiornes Förstånds helige Pröfwosteen så at then som thenna Konst wäl förstår kan sig försäkra att intet skal förekomma thet han icke förstå kan."
(Hägström, 1995, s. 17)

2.5 Algebra som språk

Det algebraiska symbolspråket betraktas enligt Bergsten m.fl. (1997) som matematikens eget språk. Med hjälp av detta kan matematiska begrepp och förhållanden uttryckas enkelt och precist. Det viktiga med det algebraiska språket är att ett algebraiskt uttryck kan skrivas om utan att uttrycket ändrar innebörd. Detta kan observeras tydligt vid ekvationslösning. Genom algebraiska omskrivningar kan samband tydliggöras som före omskrivningen var omöjliga att se. Detta är en av algebrans styrkor. För att kunna arbeta med det algebraiska språket menar Bergsten m.fl. (1997) att elever måste kunna skriva, läsa, hantera och tolka de matematiska symbolerna. Alla dessa färdigheter är avgörande för att utveckla en djup förståelse för det algebraiska språket. Vid djup förståelse har eleverna klart för sig vad de olika symbolerna står för och varför räkneregler fungerar. Detta är en grund för att symbolkänsla ska utvecklas. För att kunna hantera och tolka de matematiska symbolerna krävs kunskap och färdigheter i aritmetik. Enligt Olteanu (2000) utgör förståelse av de olika räkneoperationerna och deras egenskaper basen för algebraiskt tänkande. Om eleverna inte vet att multiplikation måste prioriteras före subtraktion skapar det problem när de ska räkna med bokstäver.

Bergsten m.fl. (1997) skriver att en symbol kan ha tre olika betydelser. Symbolen kan vara en grafisk symbol, den kan hänvisa till en eller flera objekt eller den kan stå för ett begrepp. Till exempel kan "3" stå för ett tecken, referera till objekt som t.ex. tre kronor, eller stå för begreppet talet tre.

Algebra är för många människor liktydigt med bokstavsräkning enligt Bergsten m.fl. (1997). Den synliga skillnaden mellan aritmetik och algebra är bokstavssymbolerna. Siffror i aritmetiken kan också ses som symboler men efter ett antal år som elev i skolan är det naturligt att betrakta sifferbeteckningar som identiska med tal. När en bokstav helt plötsligt står för ett godtyckligt tal i algebran, känner sig elever förvirrade och kan inte utföra beräkningar korrekt. Något som ställer till med problem för elever är att bokstäverna redan har en funktion i vårt språk. En bokstavs mening tvingas till att omdefinieras när den används i matematiken. Undersökningar som Grønmo och Rosén (1998) hänvisar till visar att svårigheter med bokstavsräkning bland annat beror på att bokstäverna inte uppfattas som en kvantitet utan istället som en förkortning för ett objekt. Till exempel kan bokstaven a ses som en förkortning av apelsin och b som en förkortning av banan. Detta medför att uttrycket $3a + 5b + a$ kan tolkas som en uppmaning att lägga ihop tre apelsiner, fem bananer och ytterligare en apelsin. Hur kan $3a \cdot 5b = 15ab$ förklaras och förstås? Här uppstår det ett problem med tolkningen. Elever kan ha svårt med att acceptera ett algebraiskt uttryck som exempelvis $3b + 5$ då b inte har något specifikt värde. Om elever saknar förståelse för det algebraiska språket försöker de associera bokstäverna till något de känner sig bekanta med. Enligt Persson (2005) kan elever se bokstaven b som en uppmaning att byta ut bokstaven mot talet 2. Detta förklarar Persson (2005) med att eleverna kopplar bokstaven till alfabetet där bokstaven b har platsvärdet 2. Elever fortsätter att beräkna uttrycket som i det här fallet leder fram till svaret 11.

En annan svårighet som uppstår i samband med bokstavsräkning är att en bokstav i algebran kan ha olika betydelse beroende på i vilket sammanhang den används. Som Bergsten m.fl. (1997) påpekar, kan en bokstav ibland stå för ett konstant tal som är obekant.

I andra fall representerar bokstaven inte något specifikt tal, utan istället står bokstaven för ett tal som kan variera. En bokstav kan också ses som ett godtyckligt men konstant tal.

Elevers olika uppfattningar av bokstäver sammanfattas i följande punkter (Persson, 2005). Punkterna beskriver också den gradvisa utvecklingen av elevens förmåga att arbeta med det algebraiska symbolspråket.

1. *Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet.*
2. *Det är tillräckligt att pröva med ett tal istället för bokstaven.*
3. *Det är nödvändigt att pröva med flera tal*
4. *Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva med något av dessa tal.*
5. *Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal.*
(Persson, 2005, s. 17)

Många elever har svårt att nå nivåerna 4 och 5 som är de mest abstrakta. De flesta eleverna befinner sig på de tidigare nivåerna.

Användningen av bokstavssymboler i skolalgebran kan enligt Bergsten m.fl. (1997) sammanfattas i fyra aspekter där det framgår i vilka sammanhang bokstavssymboler används, vad bokstavssymbolerna representerar samt vilka matematiska aktiviteter som symbolerna uppmanar till. De fyra aspekterna är sammanfattade i följande tabell:

Algebra som	Bokstavssymbol som	Aktivitet
<i>Problemlösningsverktyg</i>	Obekant, konstant	Lösa, förenkla
<i>Generaliserad aritmetik</i>	Mönsterbeskrivande	Översätta, generalisera
<i>Studium av relationer</i>	Variabel, parameter	Relatera, göra grafer
<i>Studium av struktur</i>	Godtyckliga symboler	Omskriva, motivera

(Bergsten m.fl, 1997, s.13)

För att underlätta algebrainläringen skriver Bergsten m.fl. (1997) att det är viktigt för eleverna att läraren håller isär dessa aspekter.

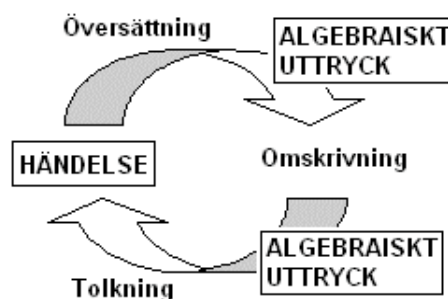
Grønmo (1999a) påpekar att bokstäver som symboler ställer höga krav på abstrakt tänkande. Det krävs att eleverna måste förstå de olika sätt vi använder bokstäver på i matematiken. Grønmo (1999a) understryker även lärarens roll i undervisningen där läraren bör tydliggöra sambandet mellan bokstäverna och dess uttryck för eleverna.

2.6 Den algebraiska cykeln

Den algebraiska cykeln består av tre faser som beskriver hur man arbetar med bokstavs-symboler i algebran. Cykelns faser är:

1. Översättning till ett uttryck med symboler
2. Omskrivning av symboluttryck
3. Tolkning av symboluttryck

(Efter Bergsten, m.fl., 1997, figur 2 s. 15)



En händelse/situation eller ett problem som beskrivs med vanligt språk kan översättas i *fas 1* till ett matematiskt symboluttryck. I *fas 2* bearbetas symboluttrycket med hjälp av algebraisk omskrivning. Detta leder till att lösningen till problemet eller en beskrivning av situationen kan hittas och tolkas i *fas 3*.

En konkretisering av den algebraiska cykelns faser ger Bergsten m.fl. (1997) i följande exempel:

Sven: *Ge mig åtta kronor, så har vi sen lika mycket!*

Åsa: *Om du istället ger mig åtta kronor, så kommer jag sen att ha dubbelt så mycket som du.*

Hur mycket hade egentligen Åsa och Sven?

Fas 1: Översättning. I problemet översätts situationen till två ekvationer.

Antag att Åsa har x kr och Sven y kr. Texten översätts till följande ekvationer:

$$a) x - 8 = y + 8$$

$$b) x + 8 = 2 \cdot (y - 8)$$

Fas 2: Omskrivning. Ekvationerna bearbetas med algebraisk omskrivning (manipulering).

$$a) x - 8 = y + 8 \text{ ger } x = y + 16$$

$$b) x + 8 = 2 \cdot (y - 8) \text{ ger } x + 8 = 2y + 16 \text{ och } x = 2y - 24$$

Alltså är $y + 16 = 2y - 24$. Detta ger att $y + 40 = 2y$ och $y = 40$

$$\text{Då är } x = 40 + 16 = 56$$

Fas 3: Tolkning. Uttrycken $x = 56$ och $y = 40$ tolkas tillbaka till vanligt språk som att

Åsa hade femtiosex kronor och Sven fyrtio kronor.

(Bergsten m.fl., 1997, s. 16)

För att nå ett algebraiskt tänkande är det nödvändigt att kunna hantera och förstå de tre faserna: översättning, omskrivning och tolkning. De tre faserna har gemensamt att det sker någon form av översättning i varje steg. Det kan handla om översättning från ett symboluttryck till ord eller bild, från ord eller bild till symboluttryck eller översättning från ett symboluttryck till ett annat. Faserna i cykeln är lika viktiga och kan ses som en kedjeprocess. Faserna bygger på varandra och om förståelse saknas för något steg blir kedjeprocessen oanvändbar. I skolan har under årens lopp mycket tid ägnats åt omskrivning och mindre tid har ägnats åt översättning och tolkning. Om *fas 1*, översättning, och *fas 3*, tolkning, åsidosätts i undervisningen i skolan finns det en risk för att eleverna upplever det algebraiska symbolspråket som meningslöst (Bergsten m.fl., 1997).

I *Algebraisk förmåga och förståelse* understryker Persson och Wennström (2002) att varje fas i den algebraiska cykeln är lika viktig. Författarna tror dock att *fas 1*, översättning till ett uttryck med symboler, och *fas 3*, tolkning av symboluttryck, kommer att bli viktigare än omskrivning av symboluttryck. Detta beror på de nya hjälpmedel som finns att använda sig av inom matematiken, t.ex. symbolhanterande räknare. En symbolhanterande räknare klarar av att skriva om och förenkla ett symboluttryck men översättning från en text till ett symboluttryck måste den som använder den symbolhanterande räknaren ta ansvar för. Trots ny teknik är vissa manuella färdigheter nödvändiga. Författarna påpekar också att en viss osäkerhet råder om hur färdighetsträning och förståelse hänger ihop. Färdighetsträning, som till exempel förenkling av ett uttryck, kanske behövs för att en förståelse ska infinna sig (Persson & Wennström, 2002).

En viktig fråga är just hur algebraisk förståelse förhåller sig till färdigheter i algebraiska manipulationer. Enligt Persson (2005) hävdar vissa forskare att det ena måste inträffa före det andra; antingen måste man förstå innan man kan utföra något eller måste man ha övat innan det finns något man kan förstå. Enligt studier och observationer av Persson och Wennström (Persson, 2005) går det inte att fastställa ett sådant påstående. De menar istället att man skaffar sig kunskap inom algebra genom ett komplicerat växelverkande mellan förståelse och färdighet där båda krävs för att ett algebraiskt tänkande ska kunna uppnås.

2.7 Översättning till algebraiskt uttryck

“One of the major obstacles in using algebra to solve problems is the translation of the verbal representation of the problem into an algebraic one.”
(Kieran, 1997, s. 146)

Ett av de största hindren elever möter när de ska lösa problem är, som framgår av Kieran (1997), översättningen från uppgiftens verbala representation till ett algebraiskt språk. Enligt Grønmo (1999b) är det ofta nödvändigt att kunna gå från en situation, som är beskriven med ord, till att beskriva samma situation med hjälp av bokstavssymboler. Detta kan liknas med att översätta från t.ex. svenska till engelska. Även att översätta från ett algebraiskt symboluttryck tillbaka till vanligt språk behöver eleverna träna på. Genom att ge eleverna tillfälle att omforma en textuppgift med egna ord blir det enligt Grønmo (1999a) en ”mjukare” övergång mellan texten och symboluttrycket. Elever har ofta svårigheter med att läsa uppgifter så att de förstår dem. Ett sätt att få elever att klara av översättning bättre är att lära dem läsa och diskutera innehållet i uppgiften innan de börjar

lösa uppgiften. Det är också viktigt att elever lär sig och får tid till reflektion och diskussion om det som är okänt i uppgiften innan de börjar använda symboler (Grønmo, 1999a). En särskild svårighet är att språket kan lura oss genom att ge oss felaktiga associationer vid översättning till matematiska symboler (Grønmo, 1999b).

Ett berömt exempel på hur språket kan lura oss ses i följande uppgift:

Write an equation using the variables S and P to represent the following statement: "There are six times as many students as professors at this university." Use S for the number of students and P for the number of professors.

(Bergsten m.fl., 1997, s. 58)

Intressant är att många elever svarar med den omvända ekvationen, $P = 6 \cdot S$, istället för det korrekta, $S = 6 \cdot P$. De elever som löser uppgiften korrekt genomförde ofta följande hypotetiska operation i huvudet:

*Studenterna är fler än lärarna. Vad ska göras för att de ska bli lika många?
Jo, antalet lärare måste multipliceras med sex för att vara lika stort som
antalet studenter.*

(Bergsten m.fl., 1997, s. 58)

I denna uppgift framgår det tydligt att de som lyckades först gjorde en tolkning med egna ord, vilket slutligen ledde fram till det algebraiska symboluttrycket. Här ser vi hur viktig den egna översättningen är för att kunna uttrycka sig med ett algebraiskt språk. Exemplet påminner om när vi ska översätta från ett språk till ett annat, exempelvis från svenska till tyska, där ordföljden inte är densamma. En direkt översättning leder fram till det felaktiga svaret $6 \cdot S = P$ (Bergsten m.fl., 1997).

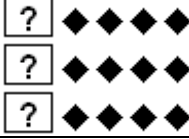
Det är väl känt att elever i alla åldrar kan ha svårt för att förstå en text beroende på att de inte förstår uttryck som t.ex. summan av, produkten av, kvadraten på osv. Dessa uttryck är naturliga för läraren att använda men kan ställa till svårigheter för elever (Olteanu, 2000). Svårigheten ligger i de abstrakta termerna men även i de vardagstermer som används på ett annat sätt i matematik än till vardags. Försök med att göra matematiken mer begriplig, genom att koppla matematiken till vardagen, underlättade enligt Olteanu (2000) dock inte för eleverna. Eftersom språket är ett viktigt instrument för tänkandet är det nödvändigt att eleverna förstår ordens innebörd för att kunna utveckla sina kognitiva förmågor inom matematik (Olteanu, 2000). Vissa ord kan direkt förknippas med en av de grundläggande räkneoperationerna. Ord som "mer än", "äldre" och "längre" associeras direkt av elever med addition utan att de närmare analyserar sammanhanget (Malmer, 1990). Malmer (1990) skriver att när elever gör en jämförelse mellan två storheter är det underförstått att "mer än" betyder att storheterna symboliserar först lika mycket, och sedan adderas skillnaden till den ena storheten.

Hittills har algebran i skolan varit en "tyst aktivitet" men i dagens skola behöver eleverna använda språket aktivt för att öka sin egen förståelse för algebra men även för matematiken som helhet (Grønmo, 1999b).

2.8 Olika uttrycksformer

Översättningsmomentet är kritiskt när elever ska lösa matematiska problem. Därför krävs enligt Bergsten m.fl. (1997) att översättningsförmågan är väl förankrad i det talade och skrivna språket samt i andra uttrycksformer. Det innebär att eleverna måste vara vana att använda de olika uttrycksformerna för att kunna arbeta med matematik på ett effektivt sätt.

Ett exempel på översättning mellan de olika uttrycksformerna ges nedan:

Bildmässigt	Verbalt	Numeriskt	Symboliskt
	Tänk på ett tal	8 (t ex)	X
	Lägg till 4	$8 + 4$, dvs. 12	$x + 4$
	Multiplitera med 3	$3 \cdot 12$, dvs. 36	$3(x + 4) = 3x + 12$
	Minska med 9	$36 - 9$, dvs. 27	$3x + 12 - 9 = 3x + 3$
	Dela med 3	$27/3$, dvs. 9	$(3x + 3)/3 = x + 1$
	Minska med det tal du tänkte på	$9 - 8$, dvs. 1	$x + 1 - x = 1$

(Bergsten m.fl., 1997, från exempel 4 s. 40)

Olika uttrycksformer belyser en matematisk situation utifrån olika synvinklar. Den bildmässiga formen har en kvalitativ, den numeriska en kvantitativ och den symboliska en manipulativ karaktär. Om eleverna inte är vana att jobba med de olika uttrycksformerna och att växla fritt mellan dem så kan översättning vara svårt. En elev riskerar att tappa någon information och får (en översättning) ett algebraiskt uttryck som inte stämmer med det ursprungliga (Bergsten m.fl., 1997).

2.9 Sammanfattning av litteraturstudien

Algebra beskrivs som ett nödvändigt ämne för alla för att kunna ta del av information i vårt samhälle. Eftersom algebra främjar intellektuella aktiviteter som är nödvändiga för förmågan att generalisera samt tänka strukturerat och deduktivt innebär den likvärdiga möjligheter att utveckla och förkovra sig. Vissa vidarestudier kräver kunskaper i algebra och alla ska ha lika rättigheter för vidare utbildning (Persson, 2002). Av kursplanen i matematik framgår att eleverna ska kunna tolka, analysera och hantera algebraiska uttryck vid problemlösning (Skolverket 2000a och 2000b). Ur ett internationellt perspektiv understryks att elever bland annat behöver förstå förhållandet mellan funktion och graf samt hur algebra kan användas som verktyg för att lösa matematiska problem (MacGregor, 2004).

Det tog lång tid för mänskligheten att utveckla det algebraiska symbolspråket. Före 300-talet var algebran retorisk vilket betyder att inga symboler användes. Istället uttrycktes alla samband med ord. På 300-talet utvecklade Diophantos den synkoperade algebran som ”slog

igenom” först i slutet av 1500-talet. Den symboliska algebran föddes på 1600-talet genom att Viète vidareutvecklade Diophantos arbete (Thompson, 1996). Genom att analysera matematikens historia kan lärare förstå att det som tog lång tid att utveckla också kommer att vara krävande för elever. Algebra har genom tiderna varit svårt att ta till sig och lärare har kämpat med att utveckla olika undervisningsmetoder som underlättar förståelsen för algebra (Thompson, 1996).

Det algebraiska symbolspråket kan enligt Bergsten m.fl. (1997) betraktas som matematikens eget språk. En av algebrans styrkor är att uttryck kan förenklas utan att ändra innebörd. För att behärska det algebraiska språket måste man förstå vad symbolerna står för samt ha färdigheter i aritmetik. Enligt Olteanu (2000) utgör förståelsen av räkneoperationer basen för algebraiskt tänkande. En svårighet med algebra är att en bokstav kan ha olika betydelse beroende på i vilket samband den används (Bergsten m.fl., 1997). Ibland kan bokstaven vara konstant och i andra fall en variabel. Grønmo (1999a) understryker att bokstäver som symboler ställer höga krav på abstrakt tänkande vilket kräver att läraren tydliggör sambandet mellan bokstäver och dess uttryck för eleverna.

Den algebraiska cykeln består av tre faser som beskriver hur man arbetar med bokstavssymboler i algebran. För att nå ett algebraiskt tänkande är det nödvändigt att kunna hantera alla faserna: översättning, omskrivning och tolkning, eftersom de bygger på varandra. Om någon fas åsidosätts i undervisningen är det risk för att eleverna upplever det algebraiska språket som meningslöst (Bergsten m.fl., 1997).

I algebra är det nödvändigt att kunna gå från en situation beskriven med ord till att beskriva den med bokstavssymboler. Eleverna måste förstå ordens innebörd för att kunna beskriva situationen korrekt med symboler. Genom att ge eleverna tid till att diskutera med varandra och reflektera över texter blir övergången mellan text till symboluttryck enklare (Grønmo, 1999a, 1999b). Översättning mellan olika uttrycksformer är ett kritiskt moment. Om eleverna inte är vana att arbeta med olika uttrycksformer och växla fritt mellan dem kan översättning vara svårt. Detta kan leda till att eleverna tappar viktig information och den nya uttrycksformen blir felaktig (Bergsten m.fl., 1997).

3 SYFTE OCH PROBLEMFORMULERING

Av litteraturstudien framgår att översättning från en text till ett algebraiskt uttryck är ett krävande moment för eleverna. Det är flera faktorer som påverkar hur eleverna lyckas med översättningen: en elev måste behärska olika begrepp och förstå deras innebörd samt ha en väl utvecklad symbolkänsla och kunna växla mellan olika uttrycksformer.

Syftet med undersökningen är att få en djupare förståelse för hur elever tänker och går tillväga då de översätter en uppgift, representerad genom text/matematiskt språk, till ett algebraiskt uttryck. Vi vill samtidigt undersöka elevers förståelse för det matematiska språket.

Detta leder fram till följande frågeställningar:

- Hur går elever som läser matematik A tillväga för att översätta en textuppgift till det algebraiska språket?
- Vilka typer av svårigheter har elever när de översätter från text till algebraiskt uttryck?

För att få svar på frågeställningarna har vi konstruerat ett test med sex uppgifter hämtade från olika källor. Elevernas lösningar analyseras med hjälp av den genomförda litteraturstudien.

4 METOD OCH GENOMFÖRANDE AV DEN EMPIRISKA STUDIEN

I detta kapitel beskrivs undersökningens karaktär, urval av deltagare, genomförande samt forskningsetiska principer. Eftersom studien består av textuppgifter sammansatta till en test, beskrivs varje uppgift angående varifrån den ursprungligen kommer och på vilket sätt den testar elevernas förmåga att översätta uppgifterna till algebraiskt språk. I sista avsnittet beskrivs bearbetning av insamlat datamaterial.

4.1 Metoder för insamling av data

I denna studie fokuseras översättningsfasen i den algebraiska cykeln. Undersökningen förväntas belysa hur eleverna som läser matematik A översätter problem eller situationer till algebraiskt uttryck. Undersökningen avser även att åskådliggöra elevernas förståelse för det matematiska språket samt vilka svårigheter eleverna har vid översättning.

Med kvalitativ forskning syftas, enligt Patel och Davidsson (1994), på forskning som använder sig av verbala analysmetoder, medan kvantitativ forskning använder sig av statistiska bearbetnings- och analysmetoder. Syftet med kvalitativa undersökningar är att skaffa en djupare kunskap och förståelse än den som fås vid användning av en kvantitativ undersökning.

För att nå undersökningens syfte valdes sex uppgifter ut ur olika källor och sammanställdes till ett test. Undersökningens syfte är *inte* att belysa hur många elever som löser en uppgift på ett specifikt sätt utan fokus ligger på kvalitén i lösningarna. Undersökningen har alltså en kvalitativ karaktär eftersom elevernas lösningar analyseras och kategoriseras.

Vi har valt att använda ett test för att få med många elevers lösningar och för att få en varierad och nyanserad bild av deras tillvägagångssätt för översättningen.

4.2 Testuppgifterna

Undersökningen utgick från ett test bestående av sex uppgifter (se bilaga 1) inom det berörda området. Uppgifterna kan delas in i två olika grupper med fyra uppgifter i den ena gruppen och två i den andra. Uppgifterna i den första gruppen avser att undersöka hur eleverna förstår det matematiska språket. Denna grupp ska visa om specifika matematiska ord som, dividera, multiplicera, "*mer än*" osv, kan hindra eleverna från att översätta från text till algebra. Avsikten med den andra gruppen uppgifter är att undersöka hur eleverna själva skapar ett algebraiskt uttryck utifrån en textuppgift. Testets uppgifter har hämtats ifrån TIMSS 2003, nationellt prov i matematik A 2005, Kängurutävlingen, *Algebra för alla* (Bergsten m.fl. 1997), samt ifrån artikeln *En bokstav kan säga mer än tusen ord* av Grønmo (1999). Rubriken på testet är "Från text till algebra". Syftet med denna rubrik, istället för test eller prov, var att eleverna inte skulle känna sig pressade. Det är inte meningen att eleverna ska känna sig bedömda. En annan anledning var att förmodligen fler elever kan tänka sig att ställa upp om det inte kallas för test eller prov.

Den första uppgiften är hämtad ifrån det nationella provet i matematik A vårterminen 2005. Enligt Skolverkets rapport, *Resultatbedömning av gymnasieskolans kursprov läsåret 2004/2005* (2006) tillhörde denna uppgift de i del I som hade lägst lösningsproportion. Av eleverna som skrev det nationella provet klarade 39 % uppgiften. Textuppgiften är mycket kort men innehåller enligt Skolverket två svårigheter. Den ena svårigheten är att förstå vilket tal som är störst av x och y och den andra svårigheten är att översätta ”200 mer än” till symbolspråket. Skolverket uppger att en vanlig feltolkning var 200 gånger mer. Av rapporten framgår att ett vanligt svarsalternativ var $200x = y$. I det här fallet har eleverna varken klarat av översättningen ”mer än” eller reflekterat över vilket tal som var störst. Svar som $200y = x$ och $200 + x = y$ eller omskrivningar av dessa likheter förekom i lika stor utsträckning. Några enstaka elever hade försökt att ge exempel på värden på x och y . Detta ledde till att likhetstecknet som fanns på svarsraden kunde ge svar som $400 = 600$. Vissa elever hade försökt översätta textuppgiften till matematiska symboler som $x = 200 > y$ (Skolverket, 2006). I de två sistnämnda exemplen missbrukas likhetstecknet och de matematiska symbolerna används på ett icke-konventionellt sätt.

Uppgift 2 är ett välkänt matematikproblem som bygger på ett s.k. omvänt samband som tidigare diskuterats i litteraturstudien (se kap. 2.7). Situationen beskriven i ord på ett sätt som medför att man förleds att ställa upp ett felaktigt samband. Svårigheten med uppgiften är att det inte går att översätta ordagrant ord för ord. Ordagrann översättning leder till det felaktiga sambandet $6 \cdot S = P$, istället för det korrekta $6 \cdot P = S$.

Den tredje uppgiften är hämtad ifrån Grønmos (1999b) artikel *En bokstav kan säga mer än tusen ord*. Uppgiften är ett exempel på att relationer mellan storheter förekommer i vardagslivet. Eleverna behöver se meningen med att räkna med bokstäver. Annars riskerar algebraundervisningen att leda till ett meningslöst manipulerande med symboler. Den första delen av uppgiften testar elevers förmåga att tolka en situation och översätta till matematisk modell. En del av uppgiften går att lösa utan att använda sig av algebra.

Den fjärde uppgiften är hämtad ifrån TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) 2003 (Skolverket 2004), som testat uppgiften på mer än 4000 elever i vart och ett av 50 länder. Av de svenska eleverna klarade 29,6 % uppgiften. Det land där eleverna presterade bäst resultat är Singapore där lösningsfrekvensen var 65,3 %. I den här uppgiften testas både översättning från text till matematiskt uttryck, samt att räkna med bokstäver.

Uppgift 5 är konstruerad till Kängurutävlingen, Cadet gymnasiet (2004), som är en stor internationell matematiktävling. Med den här uppgiften vill vi undersöka elevernas förståelse för det matematiska språket, d.v.s. översättning från matematiska ord till symboler.

Den sjätte uppgiften fick vi från vår handledare. Uppgiften går ut på att eleverna ska se ett samband mellan de numeriska värdena och de symboliska beräkningarna. Den här uppgiften påminner om uppgift fem men blir betydligt krångligare matematiskt. Uppgiften testar förståelse av matematiska ord, prioriteringsregler vid förenkling, samt förmåga att se samband mellan symboliska beräkningar och numeriska värden.

Syftet med uppgifterna 1, 2, 5 och 6 är att undersöka hur elever uppfattar kopplingen mellan orden, både vardagliga och matematiska, och de matematiska symbolerna. Avsikten med de övriga uppgifterna, 3 och 4, är att undersöka hur elever gör en egen översättning från en beskriven situation till ett matematiskt uttryck. Dessa uppgifter avser samtidigt att undersöka i vilken utsträckning eleverna undviker att använda ett matematiskt symboluttryck för att istället behandla uppgiften numeriskt.

4.3 Urval av deltagare

Undersökningen genomfördes i en teknikklass och två samhällsklasser som läser matematik A och går första året på olika gymnasieskolor i södra Sverige. Valet av dessa klasser har gjorts för att ge en så stor variation på elevers lösningar som möjligt. En anledning till att vi har valt klasser som läser matematik A är att vi under vår VFU blev medvetna om elevers svårigheter med algebra i matematik A. Matematik A är också den kurs som är obligatorisk för alla gymnasieelever.

Totalt omfattade undersökningen 55 elever jämnt fördelade på de två gymnasieprogrammen.

4.4 Forskningsetiska principer

Det finns fyra allmänna huvudkrav som måste tas hänsyn till inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Dessa krav beskrivs av Vetenskapsrådet (1990) i *Forskningsetiska principer*. Av skriften framgår att dessa krav är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Med informationskravet menas att de som deltar i undersökningen ska informeras om forskningens syfte samt vilka villkor som gäller för deras deltagande. De som deltar i undersökningen ska upplysas om att deltagandet är frivilligt och att de har rätt att avbryta sin medverkan. Deltagarna skall också informeras om att data som insamlas inte kommer att användas till något annat än för forskning. Samtyckeskravet går ut på att deltagaren själv ska ge ett samtycke till att delta. Om deltagaren vill avbryta sitt deltagande ska detta accepteras av forskaren utan några påtryckningar. Med konfidentialitetskravet menas att all information om deltagarna ska förvaras på sådant sätt att de inte kan identifieras av någon utomstående. Nyttjandekravet handlar om att de insamlade uppgifterna inte får användas till något annat än forskningsändamål.

När vi genomförde vår undersökning var vi noggranna med att informera alla deltagare om ovanstående krav och att följa de forskningsetiska principerna.

4.5 Genomförande

För att kontrollera om tiden för att lösa uppgifterna (30 min) samt svårighetsgraden på uppgifterna var lagom genomfördes en pilotstudie innan den riktiga undersökningen. Patel och Davidsson (1994) framhåller att en pilotstudie behövs för att pröva en teknik för att samla information eller pröva ett visst upplägg. En pilotstudie ska genomföras på en testgrupp som avspeglar den egentliga gruppens karaktär men i en mindre skala. Efter pilot-

studien gjordes några enstaka förändringar av testets layout. Vi insåg dessutom att det fanns tidsutrymme för att kunna utöka testet med en uppgift (uppgift 6).

Insamling av data började vi genom att kontakta respektive klasslärare och bad om godkännande för att genomföra undersökningen i deras klasser. Därefter bestämdes tid och plats. När det var dags för att samla in data berättade vi för eleverna om vårt arbete och hur viktigt deras deltagande är för vår uppsats. Eleverna informerades om att det är frivilligt att delta samt att endast vi och vår handledare kommer att ha tillgång till deras lösningar. Vi klargjorde också att elevernas lärare skulle få se en sammanställning av elevernas svar utan möjlighet att identifiera enskilda elevers lösningar. Slutligen ställdes en direkt fråga till klassen om någon ville avstå från att delta i vår undersökning. Vi accepterade utan påtryckningar om någon avstod från att göra testet eller ville avbryta under dess gång. Eleverna arbetade enskilt med uppgifterna. De fick inte använda miniräknare eftersom vi ansåg att det inte behövdes.

4.6 Bearbetning av insamlat datamaterial

Efter respektive insamling av data, som har skett vid tre tillfällen, sammanställdes och analyserades elevernas lösningar uppgift för uppgift. Därefter kategoriserades lösningarna beroende på elevernas olika sätt att svara på uppgifterna. Analysen av den andra och tredje insamlingen av data gav inte upphov till några nya kategorier. Vi har kontaktat respektive klass matematiklärare för att få ta del av deras tolkning av sammanställningen av deras elevers lösningar. Lärarnas uppfattningar kommer att komplettera vår analys av lösningarna för att öka kvalitén och validera vår tolkning.

Eftersom frågeställningarna är: ”hur går elever som läser matematik A tillväga för att översätta en textuppgift till det algebraiska språket?” samt ”vilka typer av svårigheter har elever när de översätter från text till algebraiskt uttryck?” behandlas elevernas lösningar som en datamängd. Resultatet av undersökningen sattes ihop till en sammanfattning där alla lösningar till varje uppgift redovisas med hjälp av de kategorier vi funnit. Vi har inte för avsikt att jämföra olika klasser utan att som en helhet lyfta fram elevernas sätt att tänka.

5 RESULTAT

Elevernas lösningar (55 st) på respektive uppgift delas in i olika kategorier beroende på hur eleverna gått tillväga för att översätta uppgiften till algebraiskt uttryck. I varje kategori analyseras elevernas val av metoder för att lösa uppgiften. För att åskådliggöra hur vanligt förekommande en lösning är anges antal lösningar i varje kategori inom parentes. Där felaktigt svar förekommer försöker vi analysera vilka svårigheter eleverna har med översättningen. Vi analyserar elevernas lösningar med hjälp av litteraturstudien och för att säkerhetsställa kvalitén på analysen använder vi oss av matematiklärares tankar om elevernas lösningar.

5.1 Uppgift 1

Skriv som en likhet: x är 200 mer än y .

Svar: _____ = _____

53 elever angav svar på uppgiften. Lösningarna delas in i följande fem kategorier:

1. Korrekt översättning/lösning (26 lösningar)

$$a) \quad x = y + 200 \quad (19)$$

$$b) \quad x = 200 + y \quad (1)$$

$$c) \quad y + 200 = x \quad (3)$$

$$d) \quad y = x - 200 \quad (3)$$

En direkt översättning av uppgiften ger ekvationen $x = 200 + y$ som endast en elev har angivit som svar. I detta fall måste eleven ha en förståelse för att "är" översätts till likhetstecken och *mer än* översätts till additionstecken. En direkt översättning av den här uppgiften kräver inte att en elev förstår vilken variabel som är störst. I konstruktion *a) – c)* kan eleverna översätta orden korrekt till matematiska symboler. I konstruktion *d)*, som några enstaka elever har angivit, förknippas inte "mer än" med additionstecknet som det oftast gör. I uppgiften är skillnaden (200) given. En skillnad brukar förknippas med subtraktion. För elever som har arbetat mycket med uppgifter där skillnaden är given kan det vara naturligt att svara med konstruktion *d)*. Ord som *mer än* brukar direkt översättas av eleverna till addition utan att närmare granska uppgiftens innehåll (Malmer, 1990). Det vanligaste svaret på uppgiften är formulerat enligt konstruktion *a)*. Anledningen till att eleverna inte gör en direkt översättning är att med uttrycket *mer än* är det underförstått att x och y först tolkas som lika stora tal. Därefter adderas 200 till y för att beräkna x (Malmer, 1990). En annan orsak till elevernas svar enligt konstruktion *a)* är att både lärobok och matematiklärare betonar att ett matematiskt uttryck ska skrivas i en bestämd följd. Termer som innehåller variabler skrivs först och därefter skrivs en konstant. Detta kan ses i konstruktion *a)*, *c)* och *d)*. Matematiklärares tolkning av lösningarna stämmer överens med vår analys.

2. Missuppfattning av vilken variabel som är störst (10 lösningar)

$$a) y = 200 + x \quad (8)$$

$$b) x = y - 200 \quad (2)$$

En av svårigheterna för eleverna med uppgiften är enligt Skolverket (2006) att förstå vilken variabel som är störst. Både *a)* och *b)* visar enligt vår tolkning att eleverna har missuppfattat vilken variabel som är störst. De har inte förstått textens innebörd vilket leder till en felaktig översättning. En elev kommenterade sitt svar enligt *a)* på följande sätt: "*x är ju 200 mindre än y*". Elevens kommentar visar tydligt att texten har missuppfattats. Enligt en av matematiklärarna är det vanligt förekommande att elever har svårt att uppfatta vilken variabel som är störst i ett givet samband.

3. Addition förväxlas med multiplikation (9 lösningar)

$$a) x = 200y \quad (5)$$

$$b) y = 200x \quad (4)$$

Skolverket (2006) anger att en vanlig feltolkning av 200 "*mer än*" var 200 "*gånger mer*". I *a)* har eleverna klart för sig vilken variabel som är störst men kan inte översätta "*mer än*" till korrekt symbol. Av skolverkets rapport framgår att ett vanligt svarsalternativ är det som anges i *b)*. Här framgår det att eleverna har både svårigheter med översättningen samt att förstå vilken variabel som är störst.

4. Tillräckligt att pröva med ett tal istället för en bokstav (5 lösningar)

$$a) x = 300, y = 500 \rightarrow 300 + 200 = 500 \quad (4)$$

$$b) 401 = 201 \quad (1)$$

x och *y* används inte för att utföra beräkningar utan ersätts istället av tal. Enligt Persson (2005) befinner sig dessa elever på nivå 2 av 5 i utvecklingen av förmåga att arbeta med det algebraiska symbolspråket. Detta tolkar vi som att de inte ser någon mening med att räkna med bokstäver. Det är tillräckligt att pröva med endast ett tal för respektive bokstav. I *a)* framgår det igen att eleverna missuppfattar vilken variabel som är störst. I *b)* är det inte förklarat vilken variabel som motsvarar vilket tal. Det framgår även att eleverna inte förstår innebörden av likhetstecknets betydelse. Här används symbolen på ett icke-konventionellt sätt då 401 anges vara lika mycket som 201. Liknande svarsalternativ beskrivs i Skolverkets resultatredovisning (Skolverket, 2006).

5. Övrigt (3 lösningar)

$$a) y = x \quad (2)$$

$$b) x = 200 - y \quad (1)$$

5.2 Uppgift 2

Skriv en ekvation där du använder variablerna S och P för att beteckna följande påstående: ”Det finns sex gånger så många studenter som professorer på ett universitet.” Använd S för antalet studenter och P för antalet professorer.

49 elever angav svar på uppgiften. Lösningarna delas in i följande fyra kategorier:

1. Korrekt översättning/lösning (27 lösningar)

$$a) S = 6P \quad (23)$$

$$b) \frac{S}{6} = P \quad (3)$$

$$c) 6 \cdot P \quad (1)$$

I den här kategorin har eleverna förstått att uppgiften handlar om ett omvänt samband vilket innebär att det inte går att översätta ord för ord. Enligt Bergsten m.fl. (1997) har de elever som löst uppgiften korrekt lyckats göra om texten till ett eget språk vilket medför att de inte blir lurade av ordföljden. En elev i vår undersökning motiverade sin översättning enligt *a)* med följande: ”Om det är 6 gånger fler studenter så multiplicerar man med P med 6 och får fram S .”. Eleven översätter ”sex gånger så många” till ”6 gånger fler”. Tolkningen som eleven gör underlättar översättningen till det algebraiska symbolspråket. I *b)* konstruerar eleverna svaret som en omvänd proportionalitet. En av matematiklärarna förklarar detta svar med att eleverna har blivit ”inspirerade” av nyligen genomgångna moment i matematik A. Konstruktion *c)* är ett uttryck istället för en ekvation som efterfrågas i uppgiften. Eleven förtydligar sin lösning med kommentaren: *Studenterna är sex gånger fler än professorerna*, som är en korrekt tolkning av texten.

2. Omvänt samband (12 lösningar)

$$a) P = 6S \quad (10)$$

$$b) \frac{P}{6} = S \quad (2)$$

Enligt Bergsten m.fl. (1997) är det vanligt förekommande att elever svarar med det omvända sambandet. I vår undersökning är det 20 % av eleverna som anger ett sådant samband. Det kan tolkas som att eleverna inte gick i den ”språkliga fällan” i lika stor utsträckning som det antyds av Bergsten m.fl. (1997). Lösningar i kategori *a)* är exempel på direkt översättning från text till en felaktig ekvation. Språket lurar läsaren genom att ge upphov till felaktiga associationer vid översättning till matematisk modell (Grønmo, 1999b).

3. Tillräckligt att pröva med ett tal istället för en bokstav (1 lösning)

$$S = 600, P = 100 \quad (1)$$

Här undviker eleven att använda bokstäverna. Istället ersätts S och P av tal vilket tyder på att eleven saknar en väl utvecklad förmåga att hantera bokstavssymboler. Enligt Persson (2005) befinner sig eleven på nivå 2 som innebär att: *"Det är tillräckligt att pröva med ett tal istället för bokstaven."* (Se kap. 2.5). Denna elev undviker också att skriva en ekvation vilket kan tyda på att bokstäverna saknar mening för eleven. Lösningen visar att eleven har tolkat det omvända sambandet korrekt.

4. Övrigt (9 lösningar)

$$a) \quad S = P^6 \quad (2)$$

$$d) \quad S = P \cdot 2 \quad (1)$$

$$b) \quad 6 \cdot P \cdot S \quad (3)$$

$$e) \quad S = x + 6 + P + x \quad (1)$$

$$c) \quad P - 6 = S \quad (2)$$

Enligt matematiklärarna kan *a)* förklaras med att eleverna har påverkats av tidigare genomgången potensräkning. Dessa elever kan ha missuppfattat skillnaden mellan *"ett tal sex gånger sig själv"* och *"sex gånger ett tal"*. I *d)* framgår att eleverna har förstått från uppgiften att det är fler studenter än professorer på universitetet. Eleverna har inte lurats av det omvända sambandet. Enligt vår tolkning kan eleven antingen läst fel eller skrivit fel i fråga om hur många gånger fler studenter än professorer som finns på universitetet.

5.3 Uppgift 3

Hur lång tid det tar att steka en lammstek beror på stekens vikt. I en kokbok står det att man skall låta steken stå i ugnen 25 minuter för varje kilo den väger plus 20 minuter.

Lösningarna på uppgiftens delfrågor analyseras (se bilaga 1) i tur och ordning.

a. Vilka är de okända storheterna (variablerna) i situationen?

45 elever svarade på fråga *a*. 10 elever har avstått från att försöka lösa deluppgiften. Detta är en stor andel av urvalsgruppen. Anledningen till att många avstått kan bero på att eleverna inte förstår de matematiska orden: storheterna respektive variablerna. Dessa ord används naturligt av matematiklärare samtidigt som många elever inte förstår ordens innebörd (Olteanu 2000). Vid insamling av data uppmärksammades att flera elever reagerade på de tidigare diskuterade orden. Eleverna försökte fråga oss vad orden betyder. Eleverna förstår inte alltid de matematiska orden konstaterar deras matematiklärare.

Lösningarna delas in i fyra kategorier:

1. Korrekt översättning/lösning (18 lösningar)

Korrekta storheter: vikt och tid (18)

2. Korrekt men inte fullständig översättning/lösning (20 lösningar)

a) Vikten (19)

b) Tiden (1)

Enligt Grønmo (1999a) kan elever missuppfatta en textuppgifts innehåll. Missuppfattningen beror på textens formulering som kan lura eleverna till att dra felaktiga slutsatser Grønmo (1999b). I texten står det att det tar 25 minuter för varje kilo den väger plus 20 minuter. Elever kan uppfatta att tiden är en känd storhet eftersom den anges i texten. Därför har, enligt vår tolkning, många elever endast angivit vikten som en okänd storhet.

3. Förklaring med mening eller ord (4 lösningar)

a) *"Det ska stå 20 min till för varje kilo"* (2)

b) Vikt och temp i ugnen (1)

c) Ytan och tjockleken (1)

I a) drar eleverna en felaktig slutsats. Språket har återigen förvirrat eleverna. Här menar eleverna att det tar 45 minuter för varje kilo. De har missuppfattat *"25 minuter för varje kilo plus 20 minuter"*. Plus 20 minuter ska inte uppfattas som att det syftar tillbaka på *"varje kilo"*. För att undvika den felaktiga översättningen är det viktigt att eleverna kan göra om texten till ett eget språk (Bergsten m.fl., 1997). I b) och c) relaterar eleverna uppgiften till vardagliga erfarenheter. Därför anger de, enligt vår tolkning, temperatur i ugnen, ytan och tjockleken som okända storheter.

4. Övrigt (3 lösningar)

a) $kg \cdot m \cdot h$ (1)

b) $x = 25 + 20$ (2)

I deluppgift a. efterfrågas de okända storheterna. Eleverna som anger lösning enligt b) utgår från det som är känt i uppgiften.

*b. Bestäm vilka bokstäver som du/ni vill använda som symboler för storheterna.
Skriv ner ett uttryck med bokstavssymboler som gör att ni kan beräkna stektiden
för en lammstek.*

46 elever svarade på fråga b. Lösningarna delas in i nedanstående kategorier:

1. Korrekt samband (17 lösningar)

a) $y = 25x + 20$ med förklaring av variabler (14)

b) $y = 25x + 20$ utan förklaring (3)

2. Korrekt men inte fullständigt samband (9 lösningar)

a) $25x + 20$ (= tid i ugnen), x = vikten (1)

b) $25x + 20$, x = vikten (4)

c) $25x + 20$, utan förklaring (4)

I denna kategori formulerar eleverna ett uttryck som innehåller bara den ena okända storheten. Uttrycken som eleverna anger är underförstått att representera tiden då det i uppgiften frågas efter detta. Matematiklärarna berättade att eleverna ofta kan utföra beräkningar med en variabel. Däremot uppfattas uttryck med två variabler som mer komplicerade. Lärarna berättade också att eleverna har lättare för att formulera ett uttryck än att ställa upp en ekvation eller formel.

3. Variabel placerad vid fel konstant (5 lösningar)

a) $y = 25 + 20x$ (4)

b) $25 + 20y$, y = vikt (1)

Eleverna har missuppfattat "steken stå i ugnen 25 minuter för varje kilo den väger plus 20 minuter" I a) och b) har eleverna tolkat meningens innehåll som att steken ska stå 20 minuter för varje kilo plus 25 minuter. De har tolkat meningen tvärtom.

4. Övrigt (15 lösningar)

a) Förklaring för bokstäver men uttryck saknas (7)

b) $x + yz$, förklaring saknas (3)

c) $h = 25mkg + 20m$ (1)

$$d) \text{ kg} = (k \times 25) + 20 \quad (2)$$

$$e) x \text{ kg} = y \text{ min} \quad (1)$$

$$f) x \text{ och } y, \text{ uttryck saknas} \quad (1)$$

I *c)* använder eleven sig av förkortningar för enheter. Detta påminner om synkoperad algebra som beskrivs i bakgrunden. Eleven uppmärksammar dock inte att tiden i uttrycket är angivet i olika enheter. Enligt vår tolkning står *h* för timmar och *m* för minuter.

c. Hur lång tid tar det att steka en lammstek på 2 kg? Hur lång tid tar det med en stek på 3,2 kg?

49 elever besvarade fråga *c*. Det är några fler än de som försökt lösa föregående deluppgifter. Detta kan bero på att uppgiften går att lösa utan användning av det algebraiska språket. Deluppgifterna *a*. och *b*. leder fram till en ekvation som inte alla elever använder sig av i *c*.

Lösningarna delas in i tre kategorier:

1. Sambandet från deluppgift *b*. används (28 lösningar)

$$a) \text{ Använder korrekt samband} \quad (24)$$

$$b) \text{ Använder felaktigt samband} \quad (4)$$

2. Algebraiskt samband används inte (14 lösningar)

$$\text{Eftersom } 25 \cdot 2 = 50 \text{ så blir det } 50 + 20 = 70 \quad (14)$$

$$\text{Eftersom } 25 \cdot 3,2 = 80 \text{ så blir det } 80 + 20 = 100$$

14 av 49 elever löser deluppgift *c*. genom numerisk räkning. Enligt vår tolkning, som stöds av matematiklärarna, väljer eleverna att lösa en uppgift utan användande av det algebraiska språket. Det är naturligt för eleverna att välja ett sätt som de är mer bekanta med.

3. Endast svar (7 lösningar)

$$a) \text{ Korrekt svar} \quad (4)$$

$$b) \text{ Felaktigt svar} \quad (3)$$

5.4 Uppgift 4

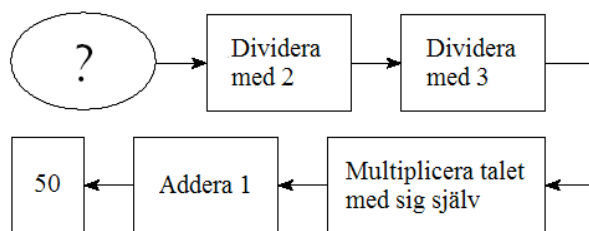
Gustav har dubbelt så många böcker som Bertil. Carl har sex böcker fler än Bertil. Om Bertil har x böcker, vilket av svarsalternativen motsvarar det totala antalet böcker som de tre pojkarna har?

- A) $3x + 6$ (12 st) B) $3x + 8$ (4 st) C) $4x + 6$ (26 st) D) $5x + 6$ (2 st) E) $8x + 2$ (1 st)

45 elever har angivit svar på uppgiften. Av dessa har 16 elever valt ett svarsalternativ utan att ange någon motivering. De flesta av de elever som angett A) har skrivit att Carl har 6 böcker istället för $(x + 6)$ böcker. På så vis förlorar de ett x i beräkningen. En elev som angav alternativ B) motiverade sitt svar med att: "Bertil har x böcker, Carl $(x + 6)$ böcker och Gustav har $(x + 2)$ böcker. Eleven har tolkat "dubbelt så många" som "två fler än". Här har det antingen blivit en missuppfattning med orden eller fel vid översättningen. Svarsalternativ C) motiverades på följande sätt av en elev: "Gustav 4 böcker, Bertil 2, Carl 8.". Eleven har förstått texten, men istället för att ställa upp ett algebraiskt uttryck ersätts x med talet 2. Detta betyder att först måste eleven beräkna numeriskt hur många böcker de tre har tillsammans. Därefter måste x ersättas med 2 i alla de fem svarsalternativen för att eleven sedan ska kunna avgöra vilket alternativ som är korrekt. Om inga svarsalternativ funnits hade eleven endast kunnat ange att det sammanlagt är 14 böcker. Detta är ingen generell lösning och tyder åter igen på att elevens befinner sig på nivå 2 som beskrivs av Persson (2005).

5.5 Uppgift 5

Vilket tal ska stå istället för frågetecknet så att resultatet i sista rutan stämmer?



- A) 18 B) 24 C) 30 D) 40 E) 42

49 elever försökte lösa uppgiften. 2 elever gav egna svarsalternativ. En elev angav svarsalternativ C) utan motivering. 46 elever angav det korrekta svarsalternativet, D). Tre olika vägar förekom för att nå fram till det korrekta svarsalternativet:

- a) Testade sig fram med de olika svarsalternativen (31)
- b) Utgick från 50, och räknade "slingan" baklänges till frågetecknet (9)
- c) Angav endast svar på uppgiften (6)

Exempel på kommentarer som elever har givit när de har löst uppgiften enligt b) är:

- Jag räknade baklänges och inverterade tecknen. Ex. $+$ bli $-$, $\cdot$ blir x/y
- Man vänder helt enkelt på ekvationen för att få fram svaret.
- Addera $\rightarrow$ dra ifrån. Ett tal gånger sig självt $\rightarrow$ upphöjt till två, som baklänges är roten ur.

Utan angivna svarsalternativ kan uppgiften lösas på två sätt: antingen kan en ekvation ställas upp och lösas eller utföra beräkningar som i b). Ingen av eleverna använde sig av metoden att ställa upp en ekvation och lösa den. Eleverna försöker här undvika att räkna med bokstäver. Det hade varit intressant att veta hur eleverna i a) hade gått tillväga för att lösa uppgiften om svarsalternativ saknats. Hade fler elever avstått från att försöka lösa uppgiften? Matematiklärarna trodde att färre elever hade försökt lösa uppgiften om svarsalternativ saknats. Lärarna förklarade att elever försöker lösa uppgiften på det lättaste sättet. Det är lättare att prova sig fram än att ställa upp en ekvation. Om eleverna inte fått angivna svarsalternativ hade en del, men långt ifrån alla, i a) ställt upp en ekvation, enligt deras lärare.

5.6 Uppgift 6

I en "funktionsmaskin" matas positiva heltal in och genomgår följande "behandling":

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. Talet multipliceras med 15. | 5. Produkten minskas med 2. |
| 2. Produkten minskas med 5. | 6. Differensen divideras med 3. |
| 3. Differensen divideras med 5. | 7. Slutligen adderas 4 till kvoten. |
| 4. Kvoten multipliceras med 10. | |

Beskriv vad som händer i maskinen steg för steg, dels för ett positivt heltal, dels för ett godtyckligt heltal n .

35 elever svarade på uppgiften. Av de 20 elever som inte svarade på uppgiften skrev en elev följande kommentar: "Jag vet inte vad kvot och differens eller nått sånt betyder sry...". Enligt Olteanu (2000) är det väl känt att elever kan ha svårt att förstå en text som innehåller matematiska uttryck. Om eleverna inte förstår de matematiska termerna kan de inte göra en korrekt översättning från text till symboluttryck.

Lösningarna delas in i fem kategorier.

1. Korrekt översättning/lösning med slutsatser (2 lösningar)

- a) Börjar med 2, slutar med 20. Börjar med n , slutar med $10n$. Drar slutsats (1 st)
- b) Börjar med n , slutar med $10n$. Drar slutsats (1 st)

Eleven som angav lösning a) drar slutsatsen att *"Alla heltal som stoppas in i maskinen multipliceras med 10"*. I b) motiverades lösningen med att *"Till slut är talet tio gånger större"*. Dessa elever ser sambandet mellan den numeriska och symboliska uttrycksformen och förstår vad som händer med ett tal/bokstav i funktionsmaskinen. Av elevernas kommentarer framgår att de ser mönster i beräkningarna och kan dra generella slutsatser. Deras sätt att hantera beräkningar och drar slutsatser tyder på att de kan arbeta med och växla mellan de olika uttrycksformerna som Bergsten m.fl. (1997) beskriver.

2. Beräkningar med ett tal och med "n" (6 lösningar)

- a) korrekt lösning med ett tal men felaktig med "n" (2 st)
- b) felaktig lösning med tal och med "n" (4 st)

Att utföra numeriska beräkningar tycks inte vara några problem för eleverna. De fel som inträffat vid dessa beräkningar beror på felaktig huvudräkning då eleverna exempelvis anger att: $\frac{48}{3} = 19$ och $\frac{40}{5} = 9$. De felaktiga beräkningarna tyder på bristande kunskaper i de grundläggande räkneoperationerna. Eftersom räkneoperationerna är en del av det algebraiska tänkandet (Olteanu 2000) blir det svårt för eleverna att räkna med "n".

3. Beräkningar endast med ett tal (7 lösningar)

- a) Korrekt genomförda beräkningar med ett tal (4 st)
- b) Räknefel i beräkningar med ett tal (3 st)

Dessa elever löser bara en del av uppgiften. De genomför inte beräkningar med ett godtyckligt heltal n . Vid insamling av data förstod vi att *"godtyckligt heltal n "* var ett svårt begrepp då eleverna bad om förklaring av detta. Enligt Grønmo (1999a) har elever ofta svårt att läsa uppgifter så att de förstår dem. En bekräftelse på detta är att en av eleverna kommenterar uppgiften med *"Jag förstår inte frågan"*.

4. Felaktig beräkning med "n" (10 lösningar)

$$n \cdot 15 - 5 / 5 \cdot 10 - 2 / 3 + 4 \quad (10 \text{ st})$$

I denna kategori har samtliga elever klarat av att översätta de matematiska orden till motsvarande korrekta symboler. Däremot har eleverna svårigheter med att förenkla uttrycken korrekt. Orsaken till detta kan vara att de har bristande förståelse för prioriteringsregler samt svårigheter med att förstå en bokstavs mening. I lösningen ovan har eleverna inte skrivit ut parenteser vilket krävs för att få ett korrekt uttryck. De elever som har försökt förenkla uttrycket anger att $n \cdot 15 - 5 = 10n$. Detta visar att eleverna räknar subtraktion före multiplikation (Olteanu 2000). Eleverna bryter här mot prioriteringsreglerna.

5. Övrigt (10 lösningar)

- a) Skriver om alla steg men med egna ord (3 st)
- b) Inspireras av föregående uppgift (2 st)
- c) Inför extra variabel (2 st)
- d) "n" får en ny innebörd i varje steg (3 st)

Resultatet av analysen av elevernas lösningar har gett upphov till kategorier som visar generella mönster i elevers tillvägagångssätt vid översättning av uppgifter. I analysen har lösningarna även relaterats till litteraturstudien. Avslutningsvis kommer uppsatsens frågeställningar att diskuteras med hjälp av litteraturstudien, den genomförda undersökningen och egna reflektioner.

6 DISKUSSION

Kapitlet delas in i två delar, i den första diskuteras och kritiskt granskas undersökningsmetoden, i den andra diskuteras resultatet. I resultatdiskussionen redovisas varje frågeställning för sig. Resultatdiskussionen avslutas med våra egna reflektioner över hur vi som lärare kan underlätta elevernas förståelse för algebra.

6.1 Metoddiskussion

De uppgifter som valdes till vår undersökning kan delas in i två grupper, men uppgifterna inom respektive grupp har en viss variation. Variationen innebär att eleverna behöver ändra sitt tillvägagångssätt när de övergår från en uppgift till en annan. Denna variation bidrar till att ge oss en rik och nyanserad bild av hur elever översätter uppgifter med hjälp av algebra.

Pilotstudien tydde på att uppgifterna var för få och enkla eftersom deltagarna löste dem på kort tid och gav korrekta svar på samtliga uppgifter. På grund av detta resultat utökades testet med en uppgift. Resultatet av pilotstudien visade sig vara något missvisande. Testets svårighetsgrad var lagom för undersökningsgruppen enligt undersökningens resultat, bortsett från sista uppgiften som var något för svår. Efter att vi analyserat data kontaktade vi klassernas matematiklärare för att validera vår analys.

I en klass avstod mer än hälften av eleverna från att delta i undersökningen. Bortfallet kan bero på att vi tydliggjorde de forskningsetiska principerna och därmed underströk det frivilliga deltagandet. En annan faktor som kan ha påverkat var att de elever som inte ville delta fick, enligt deras lärare, lämna klassrummet för fortsatt arbete i matematikboken. Vi befarade att endast de duktiga eleverna deltog i undersökningen men klassens matematiklärare försäkrade oss om att de elever som deltog befanns sig på olika kunskapsnivåer inom matematik. Vid insamling av data i de andra klasserna deltog samtliga elever i undersökningen. I en av dessa klasser kan kvalitén på elevernas lösningar av sista uppgift ha påverkats. En anledning till detta är att läraren efter halva undersökningstiden skrev på tavlan att eleverna fick ta rast när de lämnat in testet.

Vi anser oss kunna dra generella slutsatser av undersökningens resultat eftersom det stöds av skolverkets analyser, olika forskares resultat samt de intervjuade matematiklärarnas kommentarer. Kanske skulle ytterligare kategorier kunna ”dyka upp” om fler elever med olika inriktningar deltagit i undersökningen, men de kategorier som framkommit är rimligtvis giltiga och intressanta rent generellt.

6.2 Resultatdiskussion

Resultatdiskussionen delas in i tre delar, där de två första utgår från uppsatsens frågeställningar. I den tredje delen beskrivs didaktiska konsekvenser av vår undersökning för oss som lärare.

Vår första frågeställning var: *Hur går elever som läser matematik A tillväga för att översätta en textuppgift till det algebraiska språket?*

I alla uppgifterna förekommer det flera olika sätt att gå tillväga för att översätta uppgiften. Av resultaten drar vi slutsatsen att eleverna formulerar om uppgifterna till eget språk och därefter sker översättning till det algebraiska språket. Eftersom eleverna befinner sig på olika språkliga och kognitiva utvecklingsnivåer skiljs deras översättningar åt. Beroende på vilken nivå eleven befinner sig blir översättningen mer eller mindre korrekt. För att eleverna ska kunna göra en korrekt översättning krävs även att de känner sig bekväma med det algebraiska språket. Om eleverna inte kan det algebraiska språket tillräckligt väl "angriper" de uppgifterna med hjälp av aritmetik och löser hela uppgifterna numeriskt. Elever som inte behärskar det algebraiska språket ser inte någon mening med att räkna med bokstäver och nöjer sig med att ersätta dem med tal (Persson, 2005). Lösningarna avspeglar i vissa fall nyligen genomgångna moment i kursen, vilket även bekräftas av klassernas matematiklärare. Ett exempel på detta är att eleverna relaterar "*sex gånger ett tal*" till "*ett tal sex gånger sig självt*" vilket syftar på att de kan ha blivit påverkade av tidigare övningar med potensräkning (se kap. 5.2, kategori 4).

Ett tillvägagångssätt att lösa uppgifterna är att eleverna översätter texten ord för ord till symboler. Grønmo (1999b) och Bergsten m.fl. (1997) menar att direkt översättning kan leda till felaktigt symboluttryck. En uppgift som innehåller det "omvända sambandet" leder till felaktig lösning då direkt översättning används (se kap 5.2).

Genom analys av resultatet, framför allt uppgift 3 och 5, har vi kunnat se att elever valt att lösa uppgifter med hjälp av numeriska beräkningar, vilket innebär att de utgår från de kända talen. Vår tolkning är att elever litar mer på sina numeriska beräkningar än på beräkningar med bokstäver och därför undviker att lösa uppgifter med hjälp av symboluttryck.

Vår andra frågeställning var: *Vilka typer av svårigheter har elever när de översätter från text till algebraiskt uttryck?*

Enligt resultatet av undersökningen förstår elever ord som dividera, multiplicera, addera och subtrahera. Någon enstaka elev förknippar dock inte dessa ord med motsvarande matematiska tecken. Uttryck som "*mer än*", "*gånger så många*", "*storheter*", "*variabler*", "*dubbelt så många*", "*fler än*" samt "*godtyckligt heltal*" hindrade enligt vår tolkning elever från att göra en korrekt översättning. Det är inte bara orden/uttrycken i sig som försvårar utan även själva sättet som uppgiften är formulerad på. Ett exempel på detta är uppgift 2 i testet (se kap 5.2).

I lösningar förekommer räknefel som tyder på bristande färdigheter i aritmetik. Vi har uppmärksammat att grundläggande räkneoperationerna kan orsaka svårigheter när elever ska förenkla algebraiska uttryck. I lösningarna finns förenklingar som $\frac{15n-5}{5} = 3n-5$

istället för det korrekta $\frac{15n-5}{5} = 3n-1$. Felet kan enligt vår tolkning bero på att elever inte

uppfattar den "osynliga parentesen" i täljaren. En annan svårighet är enligt vår tolkning förståelsen av likhetstecknets innebörd. Detta framgår av lösningar som t.ex $401 = 201$ eller $2 \cdot 25 = 50 + 20 = 70$ (se kap 5.1 och 5.3). Beräkningar som $6n \cdot 4 = 24$ tyder också på att elever missuppfattar likhetstecknets betydelse men även att bokstaven n saknar mening.

Didaktiska konsekvenser

Genom arbetet med uppsatsen har vi fått en bättre förståelse för elevers tillvägagångssätt när de översätter och löser uppgifter från text till algebra samt vilka svårigheter som ger upphov till felaktiga översättningar. Vi anser att en central anledning till att elever inte gör en korrekt översättning är en bristande förståelse för ord/mening i en text. För att undervisa i matematik behöver vi som lärare vara medvetna om språkets centrala betydelse. Att en lärare arbetar medvetet med språk kan innebära en stor vinst för många elever. Ett sådant arbete går ut på att eleverna får tillfälle att uttrycka sina tankar med ord och att reflektera och diskutera lösningar. Det ska inte bara vara ”katederundervisning” och ”tysta klasser” när vi undervisar.

För att elever ska kunna utveckla förmågan till översättning från text till algebra behöver de möta och arbeta med uppgifter konstruerade på olika sätt. (se kap 2.8). Om eleverna inte får möta de olika uttrycksformerna och växla fritt mellan dem så kan översättning vara svårt. Elevers förmåga att kunna översätta från text till symboler beror på sambandet och samspelet mellan olika faktorer. För en korrekt översättning från en uttrycksform till en annan krävs att elever har en väl utvecklad symbolkänsla och språklig förståelse.

Samtidigt som vi i detta arbete fokuserar på översättningens betydelse i algebraundervisningen betraktar vi alla faser i den algebraiska cykeln som lika viktiga. För att eleverna ska uppfatta undervisningen i algebra som meningsfull borde de ges tillfälle att träna på alla faserna: översätta texten till symboler, manipulera algebraiska uttryck och tolka dem. Det råder delade meningar om hur algebraisk förståelse förhåller sig till färdigheter i algebraiska manipulationer. Resultatet av vår undersökning har lärt oss att Perssons och Wennströms synsätt (Persson, 2005) på hur elever skaffar sig kunskap inom algebra är det mest övertygande. Enligt detta synsätt sker inläringen genom ett komplicerat växelverkande mellan förståelse och färdighet där båda krävs för att ett algebraiskt tänkande ska kunna uppnås (Persson, 2005).

Ett sätt att underlätta och motivera elevers lärande av algebra är att lyfta fram vad algebra är: ett problemlösningsverktyg, generaliserad aritmetik, studium av relationer och studium av struktur (se kap 2.5). Vi har också insett att elever behöver få tid till förståelse och reflektion när övergången från aritmetik till algebra sker. Detta kan vara avgörande för att elever ska kunna utveckla sina färdigheter inom algebra på ett tillfredställande sätt. Enligt Oltenau (2000) är förståelse av de olika räkneoperationer och deras egenskaper basen för algebraiskt tänkande. När vi undervisar i algebra kommer vi att tänka på att associera variabler och bokstäver till konkreta objekt. Vi har insett att Thompsons exempel med klossar (se kap 2.4) är ett bra sätt att introducera symboler för eleverna.

6.3 Slutord

Detta examensarbete har varit givande och berikande. Vi har fått en djupare förståelse för och inblick i hur betydelsefull översättningsfasen är i den algebraiska cykeln. Vi inser att lärare behöver arbeta medvetet med språket inom matematik. ”Tysta klassrum” främjar det ”mekaniska” sättet att arbeta med algebraiska uttryck. Risken är att förståelsen blir yttlig och eleverna blir omotiverade.

Under arbetet med uppsatsen har vi insett att området vi börjat undersöka är ganska brett och det dök upp många tankar och frågor. En sådan tanke är att fördjupa sig i rekapitulationstesen och dess applicering på algebra. Måste elever lära sig aritmetik innan algebra eller kan inläringen ske parallellt? I årskurs ett på gymnasiet befinner sig eleverna, enligt vår erfarenhet och undersökningens resultat, på olika nivåer inom algebra. Därför skulle det vara naturligt för lärare att undersöka elevers aritmetiska färdigheter och hur de uppfattar bokstäver, för att kunna möta varje elev på den nivå hon/han befinner sig. Hur är det egentligen med inläring av algebra? Är det en linjär process eller kan elever lära sig olika delar separat för att senare kunna se samband mellan olika delar? Var och hur börjar elevers algebraiska tänkande att utvecklas? Vi funderar också på om och hur lärare arbetar med språk för att underlätta förståelsen av algebra. I vilken utsträckning främjar läromedel algebraiskt tänkande? Även läromedlens påverkan av elevers utveckling av algebraiskt tänkande tål att undersökas. Är det så att läromedlen försummar översättningsfasen och att detta styr lärarens undervisning?

En fördjupning av detta examensarbete som vore intressant är att använda samma testuppgifter för att få fördjupad kunskap om elevers Lösingsstrategi med hjälp av intervjuer.

REFERENSLISTA

- Bergsten, Christer; Häggström, Johan & Lindberg, Lisbeth (1997). *Algebra för alla*, Nämnaren Tema. Göteborg: Göteborgs universitet.
- Grønmo, Liv Sissel & Rosén, Bo (1998). Att förstå algebra. *Nämnaren* 25 (4), (s. 35-41). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Grønmo, Liv Sissel (1999a). Att sätta ord på algebra. *Nämnaren* 26 (1), (s. 19-25). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Grønmo, Liv Sissel (1999b). En bokstav kan säga mer än tusen ord. *Nämnaren* 26 (4), (s. 20-26). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Häggström, Johan (1995). Tidigare algebra. *Nämnaren* 22 (4), (s. 17-21). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Kieran, Carolyn (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In Grouws, Douglas A. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 390-419). New York: Macmillan publishing company.
- Kieran, Carolyn (1997). Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions. In Nunes, T & Bryant, P. (ed.). *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (s. 133 – 158). Hove: Psychology press Ltd, Publishers.
- Kängurun (2004). *Kängurutävlingen – Matematikens hopp Cadet gymnasiet 2004*. NCM och Nämnaren. Elektroniskt tillgänglig (2006-11-01): <http://ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2004/Cgy2004problem.pdf>
- MacGregor, Mollie (2004). Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. In Stacey, K. Chick, H. & Kendal, M. (ed.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (s. 313 – 328). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Malmer, Gudrun (1990). *Kreativ matematik*. Solna: Ekelund.
- Olteanu, Constanta (2000). *Varför är skolalgebran svår?* Rapport, Högskolan Kristianstad. Elektroniskt tillgänglig (2006-11-01): <http://tsunami.hkr.se/files/tsunami2003202.pdf>
- Patel, Runa & Davidsson, Bo (1994). *Forskningsmetodikens grunder*. Lund: Studentlitteratur.
- Persson, Per-Eskil & Wennström, Tomas (2002). Algebraisk förmåga och förståelse, del 2. *Nämnaren* 29 (1), (s. 22-29). Göteborg: Göteborgs universitet.

Persson, Per-Eskil (2002). Behöver alla lära sig algebra?. *Nämnamnaren* 29 (3), (s. 24-31). Göteborg: Göteborgs universitet.

Persson, Per-Eskil (2005). *Bokstavliga svårigheter. Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Licentiatuppsats, Luleå tekniska universitet, institutionen för matematik. Elektroniskt tillgänglig (2006-11-01):
<http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/09/index.html>

Skolverket (2000a) *Kursplan och betygskriterier för grundskolan*. Elektroniskt tillgänglig (2006-12-12):
<http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0607&infotyp=23&skolform=11&id=3873&extraId=2087>

Skolverket (2000b) *Kursplan och betygskriterier för gymnasial utbildning, matematik A*. Elektroniskt tillgänglig (2006-12-12):
<http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0607&infotyp=5&skolform=21&id=3202&extraId>

Skolverket (2004). *Matematikuppgifter i TIMSS 2003. Uppgiftsrapport till Rapport 255, 2004*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket (2006). *Gymnasieskolans kursprov läsåret 2004/2005. En resultatredovisning*. Elektroniskt tillgänglig (2006-12-01):
<http://www.skolverket.se/content/1/c4/20/08/kursprovrappor%202004-2005.pdf>

Stacey, Kaye: Chick, Helen & Kendal, Margaret (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, Jan (1994). *Matematiklexikon*. Falun: Wahlström & Widstrand.

Thompson, Jan (1996). *Matematiken i historien*. Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet (2000). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Elektroniskt tillgänglig (2006-12-12):
<http://www.vr.se/download/18.668745410b37070528800029/HS%5B1%5D.pdf>

BILAGA

Från text till algebra

*Redovisa dina lösningar tydligt och skriv ner **alla** dina "tankesteg". (Även där svarsalternativ finns.)*

1. Skriv som en likhet: x är 200 mer än y .

Svar: _____ = _____

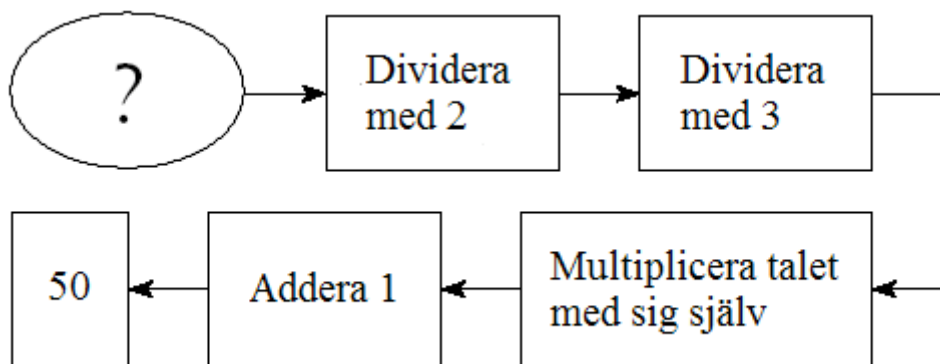
2. Skriv en ekvation där du använder variablerna S och P för att beteckna följande påstående:
”Det finns sex gånger så många studenter som professorer på ett universitet.” Använd S för antalet studenter och P för antalet professorer.

3. Hur lång tid det tar att steka en lammstek beror på stekens vikt. I en kokbok står det att man skall låta steken stå i ugnen 25 minuter för varje kilo den väger plus 20 minuter.
- a. Vilka är de okända storheterna (variablerna) i situationen?
 - b. Bestäm vilka bokstäver som du vill använda som symboler för storheterna. Skriv ner ett uttryck med bokstavssymboler som gör att du kan beräkna stektiden för en lammstek.
 - c. Hur lång tid tar det att steka en lammstek på 2 kg?
Hur lång tid tar det med en stek på 3,2 kg?

4. Gustav har dubbelt så många böcker som Bertil. Carl har sex böcker fler än Bertil. Om Bertil har x böcker, vilket av svarsalternativen motsvarar det totala antalet böcker som de tre pojkarna har?

A) $3x + 6$ B) $3x + 8$ C) $4x + 6$ D) $5x + 6$ E) $8x + 2$

5. Vilket tal ska stå istället för frågetecknet så att resultatet i sista rutan stämmer?



A) 18 B) 24 C) 30 D) 40 E) 42

6. I en "funktionsmaskin" matas positiva heltal in och genomgår följande "behandling":

1. Talet multipliceras med 15.
2. Produkten minskas med 5.
3. Differensen divideras med 5.
4. Kvoten multipliceras med 10.
5. Produkten minskas med 2.
6. Differensen divideras med 3.
7. Slutligen adderas 4 till kvoten.

Beskriv vad som händer i maskinen steg för steg, dels för ett positivt heltal, dels för ett godtyckligt heltal n .