

UNDERVISNINGSKUNNSKAP I MATEMATIKK

Örebro 28 september 2012

A CROSS-NATIONAL STUDY OF
PRIMARY AND SECONDARY
MATHEMATICS TEACHER PREPARATION

**TEDS-M 2008-
IEA TEACHER EDUCATION STUDY**

Liv Sissel Grønmo
ILS, Universitetet i Oslo

Organisering av TEDS-M i Norge

❖ **ILS, Universitetet i Oslo**

har ledelsen av prosjektet i nært samarbeid med tre andre lærerutdanningsinstitusjoner:

❖ **HiST** (Høgskolen i Sør-Trøndelag)

❖ **HiB** (Høgskolen i Bergen)

❖ **UiA** (Universitetet i Agder)

TEDS – M 2008

KOMPONENT 1:

ansvarlig Universitetet i Agder (UiA)

Systemnivå – hvordan er utdanningen av lærere i matematikk organisert - hvilke rammebetingelser gjelder – og hva er den politiske og sosiale konteksten

KOMPONENT 2:

ansvarlig Høgskolene i Sør-Trøndelag (HiST) og i Bergen (HiB)

Institusjonsnivå – hvordan er studiene lagt opp på institusjonene, hvem utdanner framtidige lærere og hvilke utdanningsbakgrunn, erfaring og holdninger har disse

KOMPONENT 3:

ansvarlig ILS, Universitetet i Oslo (leder prosjektet)

Lærerstudentene - studier av framtidige læreres **kompetanse** i **matematikk** og **matematikkdidaktikk** - hvilken bakgrunn og hvilke holdninger har lærerstudentene

TEDS m 2008 - deltakerland

Botswana, Canada (fire provinser), Chile,
Taiwan, Georgia, Tyskland, Malaysia, Norge,
Oman (ungdomstrinn), Filippinene, Polen,
Russland, Singapore, Spania (barnetrinn),
Sveits (den tysk-talende delen), Thailand
og USA (offentlige institusjoner)

Populasjon/utvalg i Norge

- Allmennlærere **ALU**
- Allmennlærere med ekstra matte **ALU+**
- **PPU**
- **Master**
- **PPU/master rapporteres som en gruppe**

Lærerstudentene testes på to kunnskapsområder i TEDS

- Kunnskaper i matematikk har i TEDS fått betegnelsen **"Mathematics Content Knowledge" (MCK)** som vi norsk har oversatt med *matematikkunnskap*.
- Det andre kunnskapsområdet studentene testes på har i TEDS fått betegnelsen **"Mathematics Pedagogy Content Knowledge" (MPCK)**. En direkte norsk oversettelse av dette kan være *matematikkpedagogikk*. Dette området kaller vi i Norge vanligvis for *matematikkdidaktikk*, derfor har vi valgt å bruke det i den nasjonale TEDS-rapporten.

Barnetrinn - Matematikk gruppe 1 og 2

Norge: ALU 509 – ALU+ 553

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 1. Småskoletrinnet (opp til 4. trinn)	Georgia	506	506	345 (4)
	Tyskland	935	907	501 (3)
	Polen ^a	1812	1799	456 (2)
	Russland ^b	2266	2260	536 (10)
	Sveits ^c	121	121	512 (6)
Gruppe 2. Barnetrinnet (opp til 6. trinn)	Taiwan	923	923	623 (4)
	Filippinene	592	592	440 (8)
	Singapore	263	262	586 (4)
	Spania	1093	1093	481 (3)
	Sveits ^c	815	815	548 (2)
	† USA ^d	1310	951	518 (5)

Barnetrinn - Matematikk gruppe 3 og 4

Norge: ALU 509 – ALU+ 553

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 3. Barne- og ungdomstrinnet (opp til 10. trinn)	Botswana ^e	86	86	441 (6)
	Chile ^f	657	654	413 (2)
	Norge (ALU) ^g	392	392	509 (3)
	Norge (ALU+) ^g	159	159	553 (4)
Gruppe 4. Matematikk- spesialister barnetrinnet	Tyskland	97	97	555 (8)
	Malaysia	576	574	488 (2)
	Polen ^a	300	300	614 (5)
	Singapore	117	117	600 (8)
	Thailand	660	660	528 (2)
	† USA ^d	191	132	520 (7)

Barnetrinn - Matematikdidaktikk gruppe 1 og 2

Norge: **ALU 539** – ALU+ **564**

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 1. Småskoletrinnet (opp til 4. trinn)	Georgia	506	506	345 (5)
	Tyskland	935	907	491 (5)
	Polen ^a	1812	1799	452 (2)
	Russland ^b	2266	2260	512 (8)
	Sveits ^c	121	121	519 (6)
Gruppe 2. Barnetrinnet (opp til 6. trinn)	Taiwan	923	923	592 (2)
	Filippinene	592	592	457 (10)
	Singapore	263	262	588 (4)
	Spania	1093	1093	492 (2)
	Sveits ^c	815	815	539 (2)
	† USA ^d	1310	951	544 (3)

Barnetrinn - Matematikdidaktikk gruppe 3 og 4

Norge: ALU 539 – ALU+ 564

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 3. Barne- og ungdomstrinnet (opp til 10. trinn)	Botswana ^e	86	86	448 (9)
	Chile ^f	657	654	425 (4)
	Norge (ALU) ^g	392	392	539 (3)
	Norge (ALU+) ^g	159	159	564 (6)
Gruppe 4. Matematikk- spesialister barnetrinnet	Tyskland	97	97	552 (7)
	Malaysia	576	574	503 (3)
	Polen ^a	300	300	575 (4)
	Singapore	117	117	604 (7)
	Thailand	660	660	506 (2)
	† USA ^d	191	132	545 (6)

TEDS M 2008 - barnetrinn

- Norske allmennlærerstudenter som ble testet for å undervise på barnetrinnet presterte **heller svakt i matematikk**, særlig gjaldt det allmennlærere uten ekstra fordypning i faget
- Norske allmennlærere med ekstra fordypning presterte noe bedre og lå **på et tilnærmet gjennomsnittlig nivå** i forhold til de land vi finner det relevant å sammenlikne med
- Generelt presterte de norske allmennlærerstudentene **bedre i matematikkdiraktikk enn de gjorde i matematikk** når de ble testet for undervisning på barnetrinnet. Det gjelder både ALU og ALU+
- Det ble tatt som en indikasjon på at man i norsk allmennlærerutdanning har lagt **mer vekt på didaktikk** enn på å gi studentene kunnskaper i selve **matematikkfaget**

Ungdomstrinn - Matematikk gruppe 5

Norge: ALU 435 – ALU+ 461

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 5. Ungdomstrinnet (opp til 10. trinn)	Botswana ^a	34	34	436 (7)
	Chile ^b	746	741	354 (3)
	Tyskland	408	406	483 (5)
	Filippinene	733	733	442 (5)
	Polen ^c	158	158	529 (4)
	Singapore	142	142	544 (4)
	Sveits ^d	141	141	531 (4)
	Norge (ALU) ^e	356	344	435 (3)
	Norge (ALU +) ^e	151	148	461 (5)
	† USA ^f	169	121	468 (4)

Ungdomstrinn og vgs - Matematikk gruppe 6

Norge: PPU/master 503

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 6. Ungdomstrinnet og videregående	Botswana ^a	19	19	449 (8)
	Taiwan	365	365	667 (4)
	Georgia ^g	78	78	424 (9)
	Tyskland	363	362	585 (4)
	Malaysia	389	388	493 (2)
	Oman	268	268	472 (2)
	Polen ^c	140	139	549 (4)
	Russland ^h	2141	2139	594 (13)
	Singapore	251	251	587 (4)
	Thailand	652	652	479 (2)
	Norge (PPU/master) ^e	65	65	503 (8)
	† USA ^f	438	354,0	553 (5)

Ungdomstrinn - Matematikkdiraktikk gruppe 5

Norge: ALU 455 – ALU+ 480

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 5. Ungdomstrinnet (opp til 10. trinn)	Botswana ^a	34	34	436 (9)
	Chile ^b	746	741	394 (4)
	Tyskland	408	406	515 (6)
	Filippinene	733	733	450 (5)
	Polen ^c	158	158	520 (5)
	Singapore	142	142	539 (6)
	Sveits ^d	141	141	549 (6)
	Norge (ALU) ^e	356	344	455 (4)
	Norge (ALU +) ^e	151	148	480 (6)
	† USA ^f	169	121	471 (4)

Ungdomstrinn og vgs - Matematikdidaktikk gruppe 6

Norge: PPU/master 494

Programgruppe	Land	Antall del- takere	Gyldige data (N)	Skalert gjennom- snittsskår (SE)
Gruppe 6. Ungdomstrinnet og videregående	Botswana ^a	19	19	409 (16)
	Taiwan	365	365	649 (5)
	Georgia ^g	78	78	443 (10)
	Tyskland	363	362	586 (7)
	Malaysia	389	388	472 (3)
	Oman	268	268	474 (4)
	Polen ^c	140	139	528 (6)
	Russland ^h	2141	2139	566 (10)
	Singapore	251	251	562 (6)
	Thailand	652	652	476 (2)
	Norge (PPU/master) ^e	65	65	494 (16)
	† USA ^f	438	354,0	542 (6)

TEDS M 2008 - ungdomstrinn

- Norske allmennlærerstudenter som ble testet for å undervise på ungdomstrinnet presterte **svakt i matematikk sammenliknet med nesten alle andre lands studenter**, unntatt typiske utviklingsland
- Selv om allmennlærere med ekstra fordypning i matematikk presterte klart bedre enn de uten slik fordypning, presterte heller ikke de godt sett i et internasjonalt perspektiv
- **Prestasjonene i matematikk til de norske PPU/master-studentene er heller ikke oppløftende** når vi sammenlikner dem med tilsvarende kurs i andre land hvor lærerstudentene kan undervise også på videregående skole
- Det var **ingen tilsvarende tendens** som den vi fant for barnetrinnet, at norske lærerstudenter generelt presterte **bedre i matematikkdiraktikk enn i matematikk**
- **Allmennlærerstudenter** både med og uten ekstra fordypning i matematikk presterte **svakere i matematikkdiraktikk** enn studenter i de fleste land det er rimelig å sammenlikne med
- **PPU/master-studenter i Norge presterte også i matematikkdiraktikk svakere** enn lærerstudenter på tilsvarende kurs i mange andre land

Oppgave 1 barnetrinn

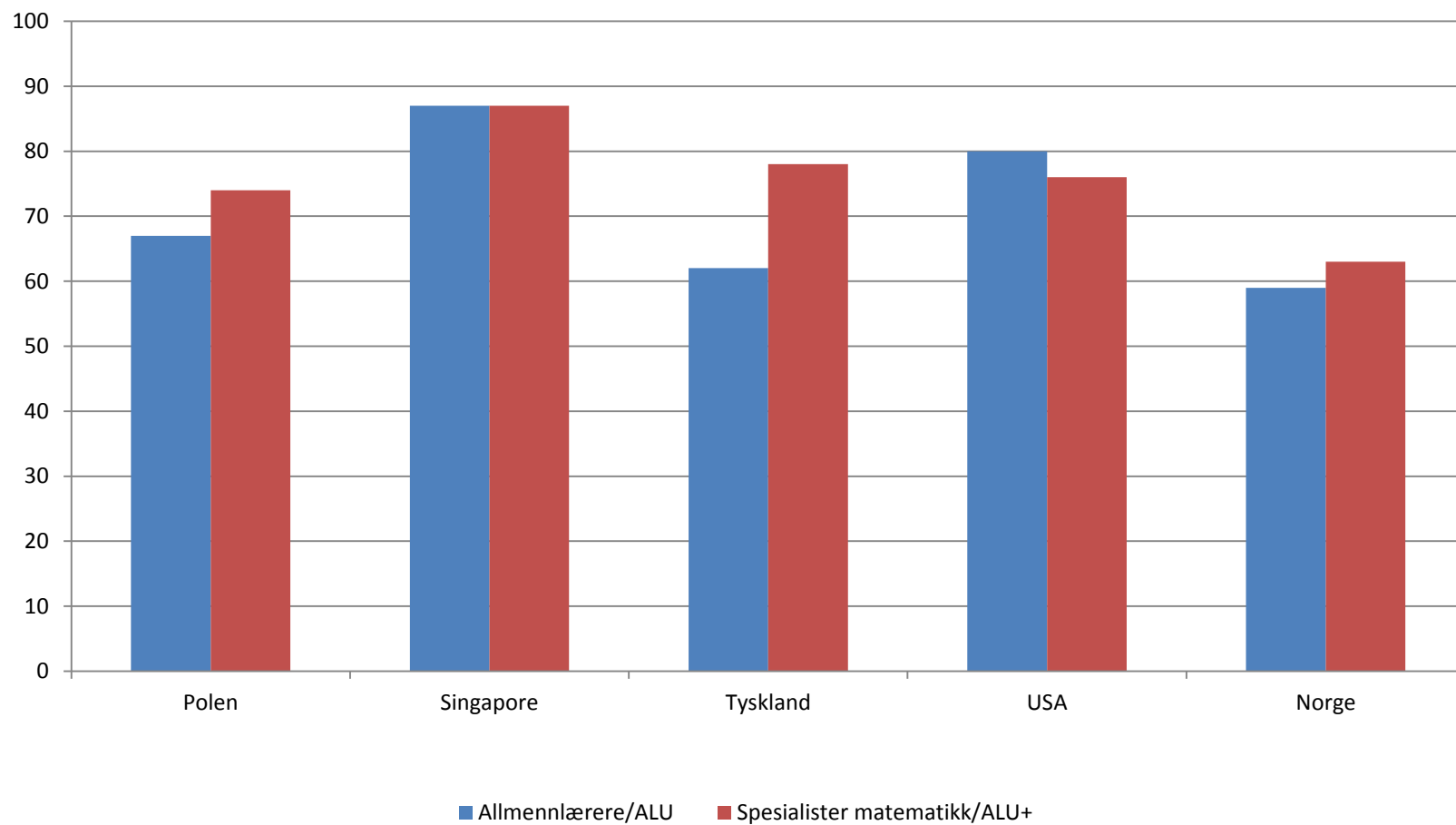
Angi om hvert av de følgende utsagnene er sant for mengden av hele tall a , b og c større enn null.

Sett kryss i én rute på hver linje.

	Sant	Ikke sant
A. $a - b = b - a$	☐ ₁	☐ ₂
B. $a : b = b : a$	☐ ₁	☐ ₂
C. $(a + b) + c = a + (b + c)$	☐ ₁	☐ ₂
D. $(a - b) - c = a - (b - c)$	☐ ₁	☐ ₂

Prosent som svarer rett på oppgave 1 D

Barnetrinn



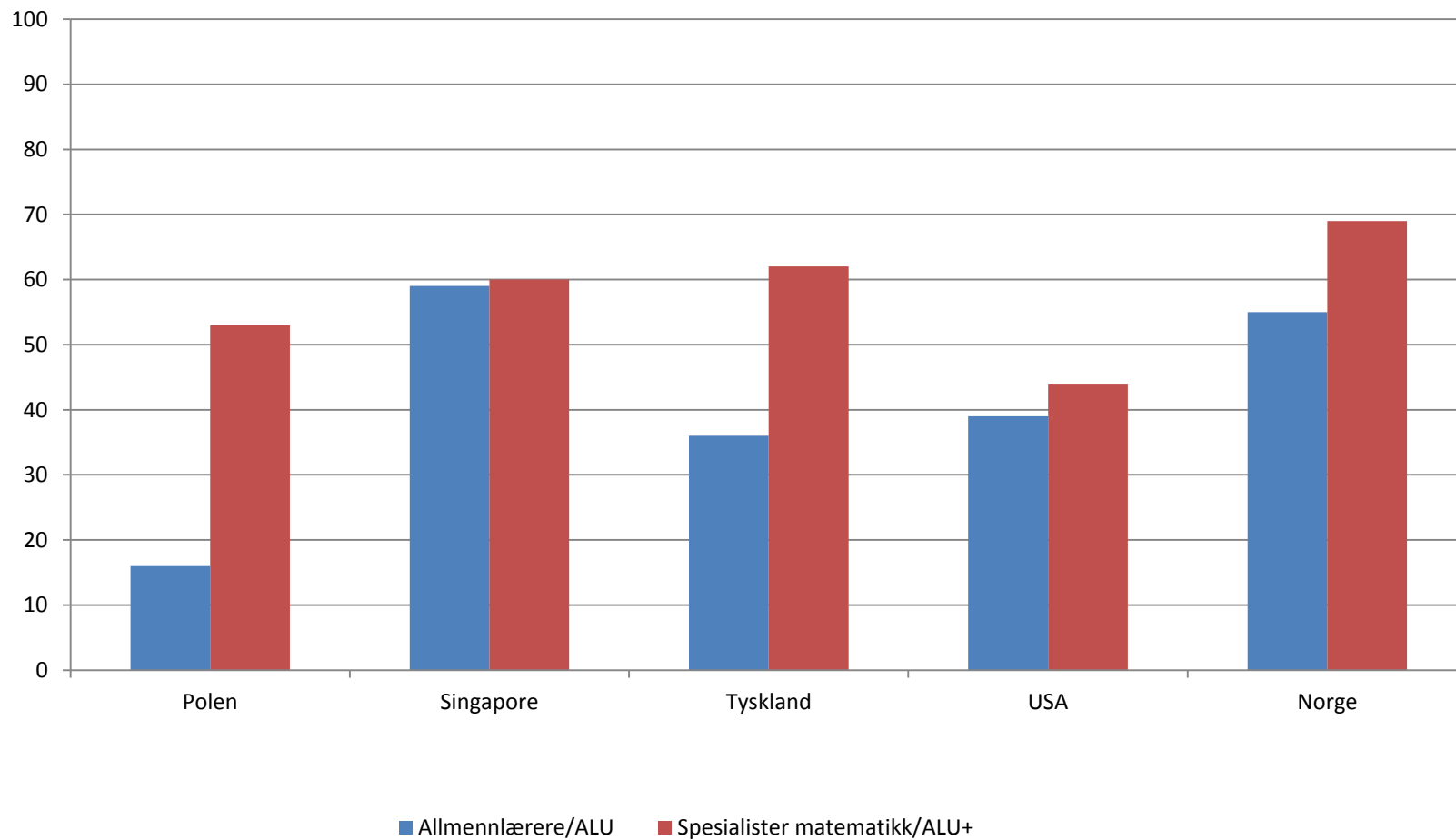
Oppgave 2 barnetrinn

Jesper legger merke til at når han skriver inn $0,2 \times 6$ på en kalkulator blir svaret hans mindre enn 6, og når han skriver inn $6 \div 0,2$ får han et tall som er større enn 6. Han blir forbauset over dette, og han spør læreren sin om å få en ny kalkulator!

(a) Hva er mest sannsynlig misoppfatningen til Jesper?

Prosent som svarer rett på oppgave 2a

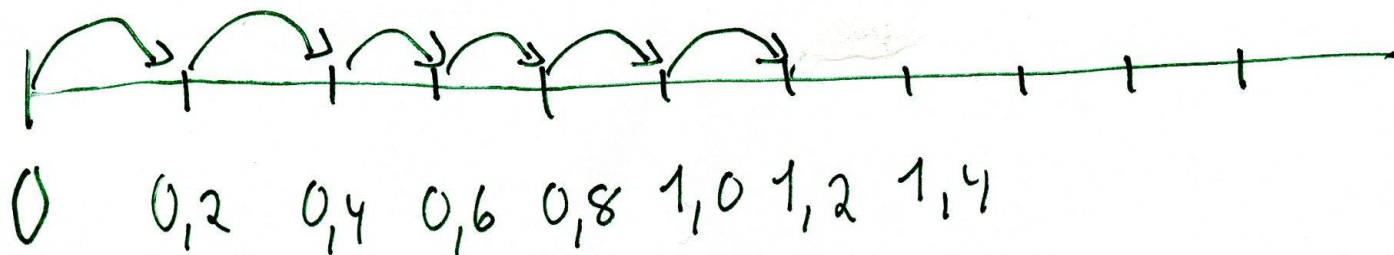
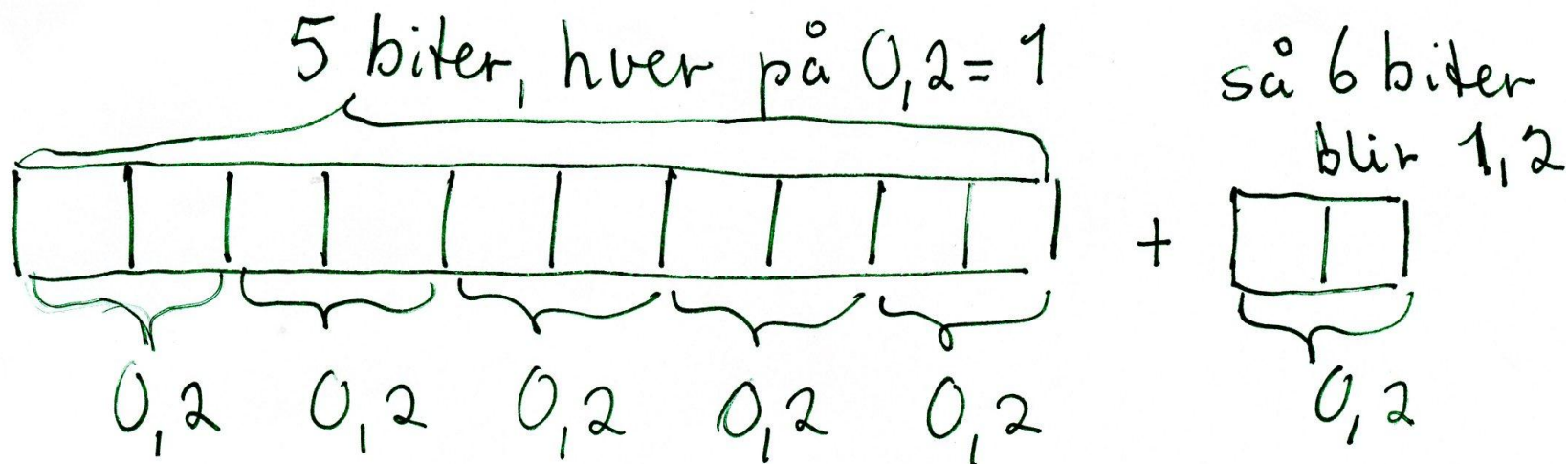
Barnetrinn



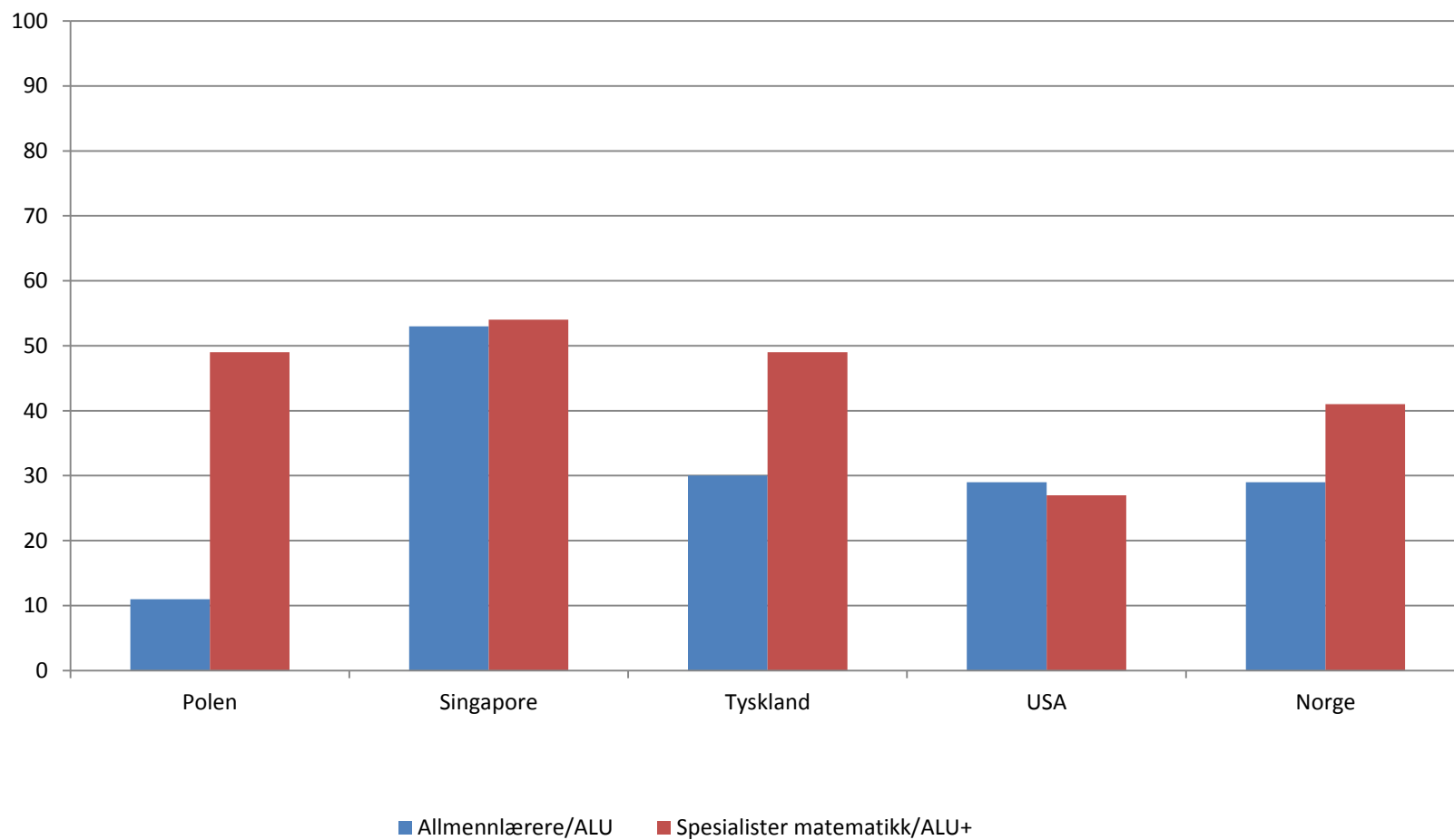
Oppgave 2 barnetrinn forts.

- (b) Tegn en visuell representasjon som læreren kunne bruke til å illustrere $0,2 \times 6$ for å hjelpe Jesper til å forstå HVORFOR svaret blir som det blir.

2 eksempler på riktige svar på oppgave 2 b
(tegn en visuell representasjon for å hjelpe Jesper)



Prosent som svarer rett på oppgave 2b barnetrinn



Oppgave 1 a ungdomstrinn

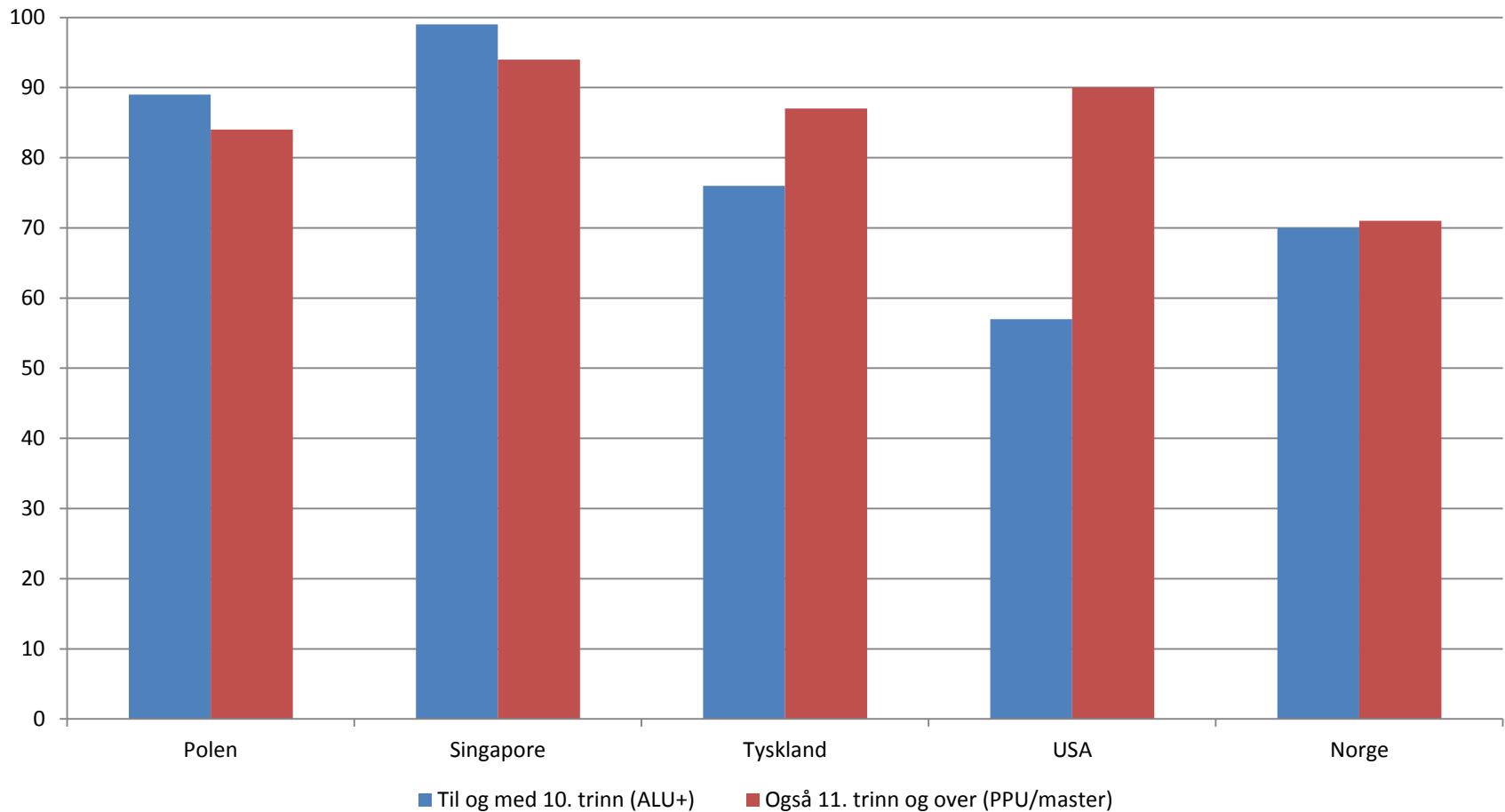
De følgende oppgavene forekommer i en matematikkbok for ungdomstrinnet.

1. Peter, David og Jan spiller med klinkekuler. De har 198 klinkekuler til sammen. Peter har 6 ganger så mange klinkekuler som David, og Jan har dobbelt så mange som David. Hvor mange klinkekuler har hver av guttene?
2. Tre barn - Wenche, Jorunn og Gabi - har 198 mynter til sammen. Wenche har 6 ganger så mange mynter som Jorunn, og 3 ganger så mange som Gabi. Hvor mange mynter har hvert av barna?

(a) Løs hver oppgave.

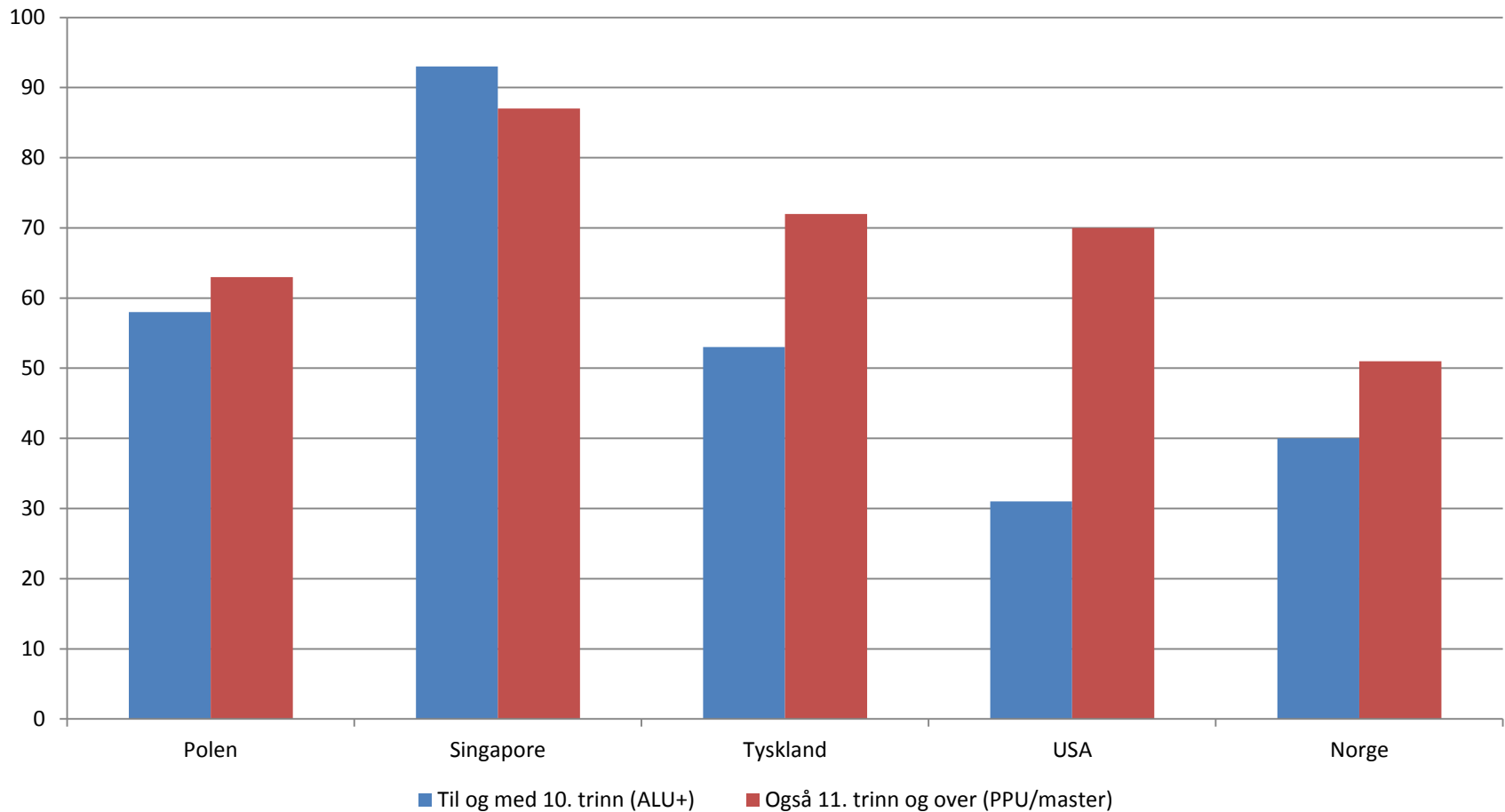
Prosent som svarer rett på oppgave 1a del 1

Ungdomstrinn



Prosent som svarer rett på oppgave 1a del 2

Ungdomstrinn

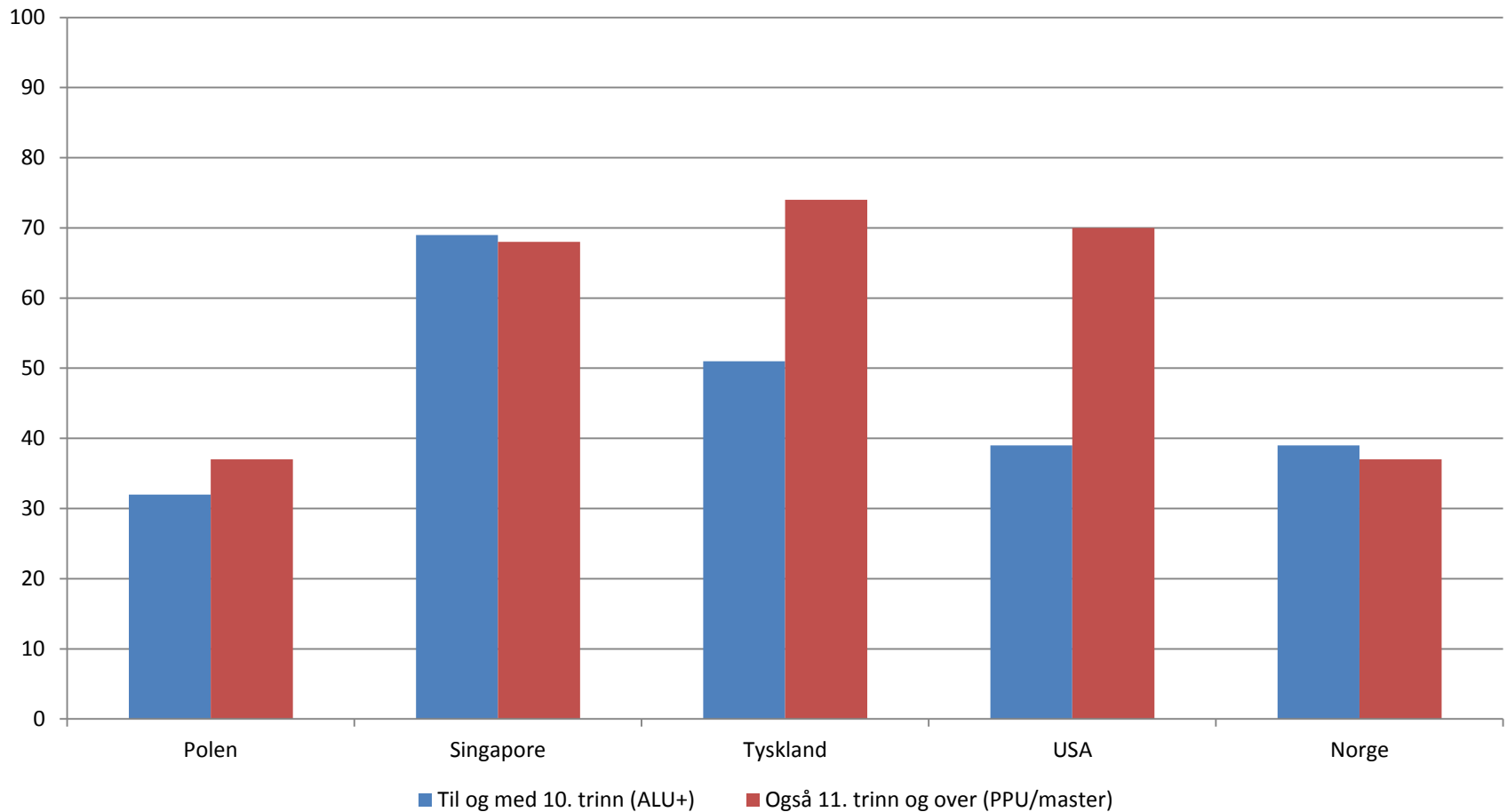


Oppgave 1 b ungdomstrinn

(b) Oppgave 2 er ofte vanskeligere enn oppgave 1 for elever på ungdomstrinnet. Gi en grunn for at det er forskjell i vanskegrad.

Prosent som svarer rett på oppgave 1 b

Ungdomstrinn



Oppgave 2 ungdomstrinn

Noen ungdomsskoleelever ble spurt om å bevise følgende utsagn:

Når du multipliserer 3 naturlige tall som følger etter hverandre, vil produktet være et multiplum av 6.

Nedenfor finner du tre svar.

Karis svar

Et multiplum av 6 må ha faktorer 3 og 2.

Hvis du har tre tall som følger etter hverandre, vil ett være et multiplum av 3.

Videre, minst ett tall vil være partall, og partall er multiplum av 2.

Hvis du multipliserer tre tall som følger etter hverandre, så må svaret ha minst en faktor av 3 og en faktor av 2

Oppgave 2 ungdomstrinn forts.

Leifs svar

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$$

$$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$$

$$6 \times 7 \times 8 = 336 = 6 \times 56$$

Marias svar

n er et vilkårlig heltall

$$\begin{aligned} n \times (n+1) \times (n+2) &= (n^2 + n) \times (n+2) \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

Forkorting av n -ene gir $1 + 1 + 2 + 2 = 6$

Avgjør om hvert bevis er gyldig.

- A. Karis bevis
- B. Leifs bevis
- C. Marias bevis

Sett kryss i én rute på hver linje.

Gyldig

Ikke gyldig

☐₁

☐₂

☐₁

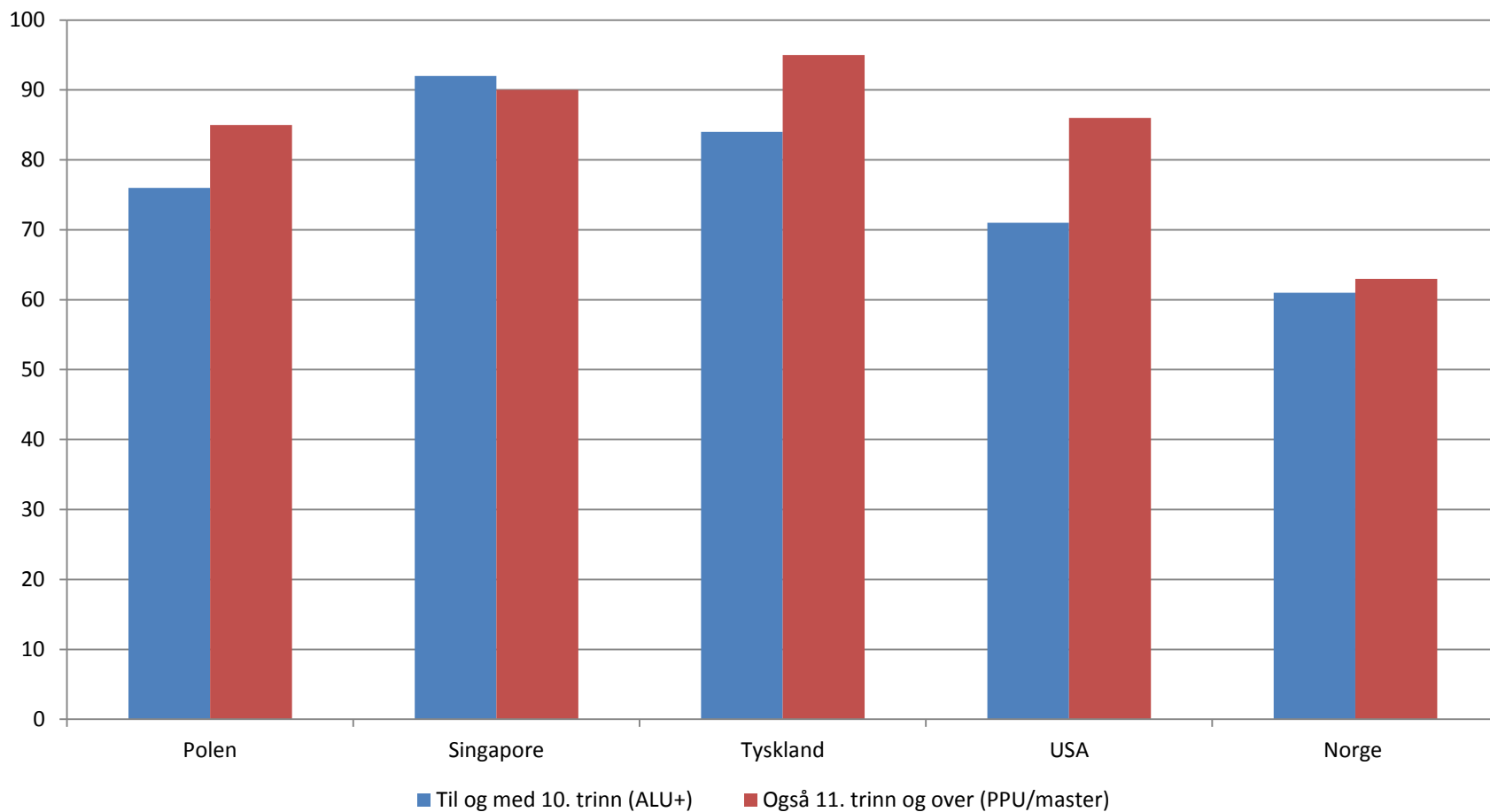
☐₂

☐₁

☐₂

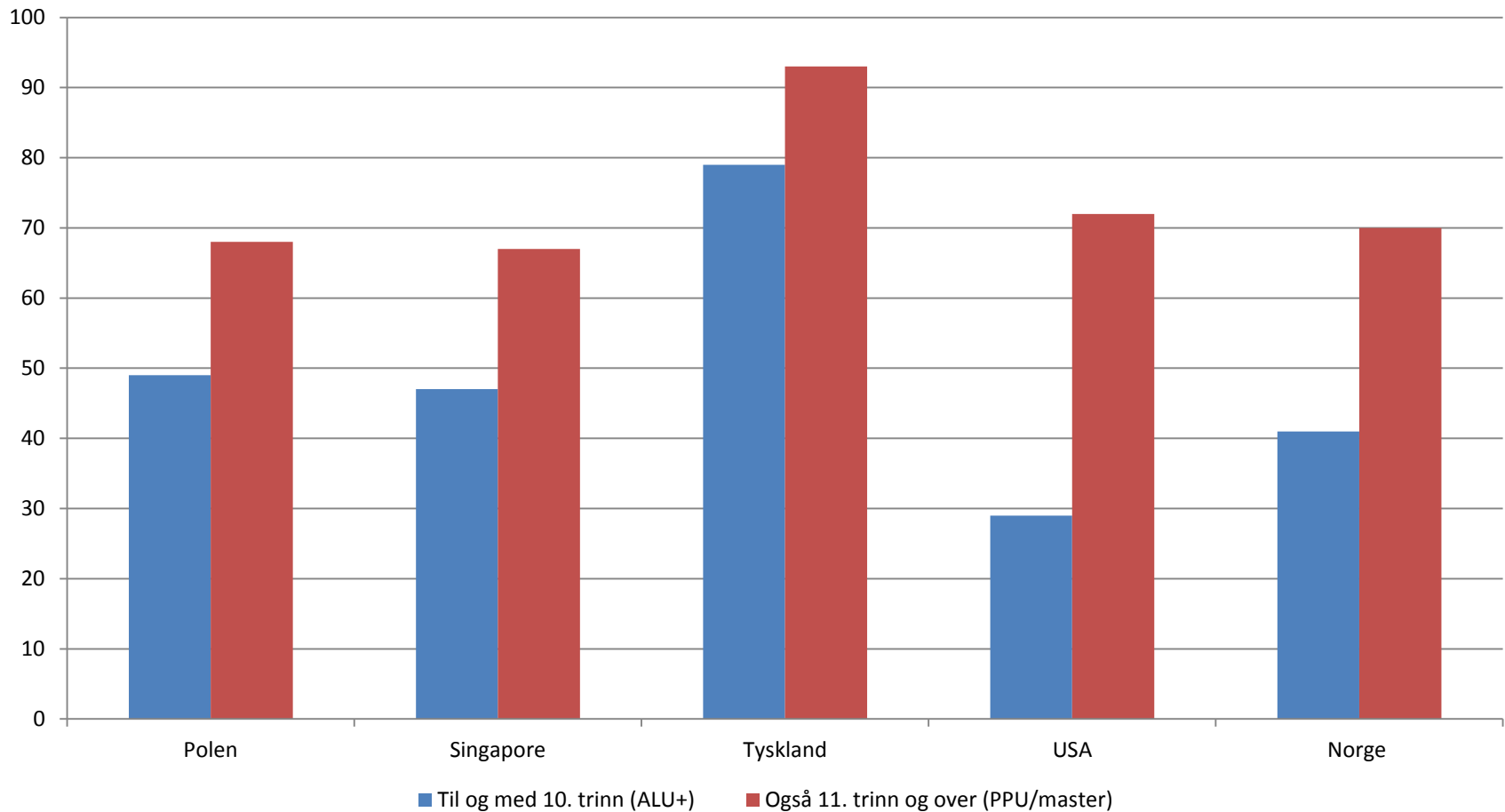
Prosent som svarer rett på oppgave 2 (Karis svar)

Ungdomstrinn



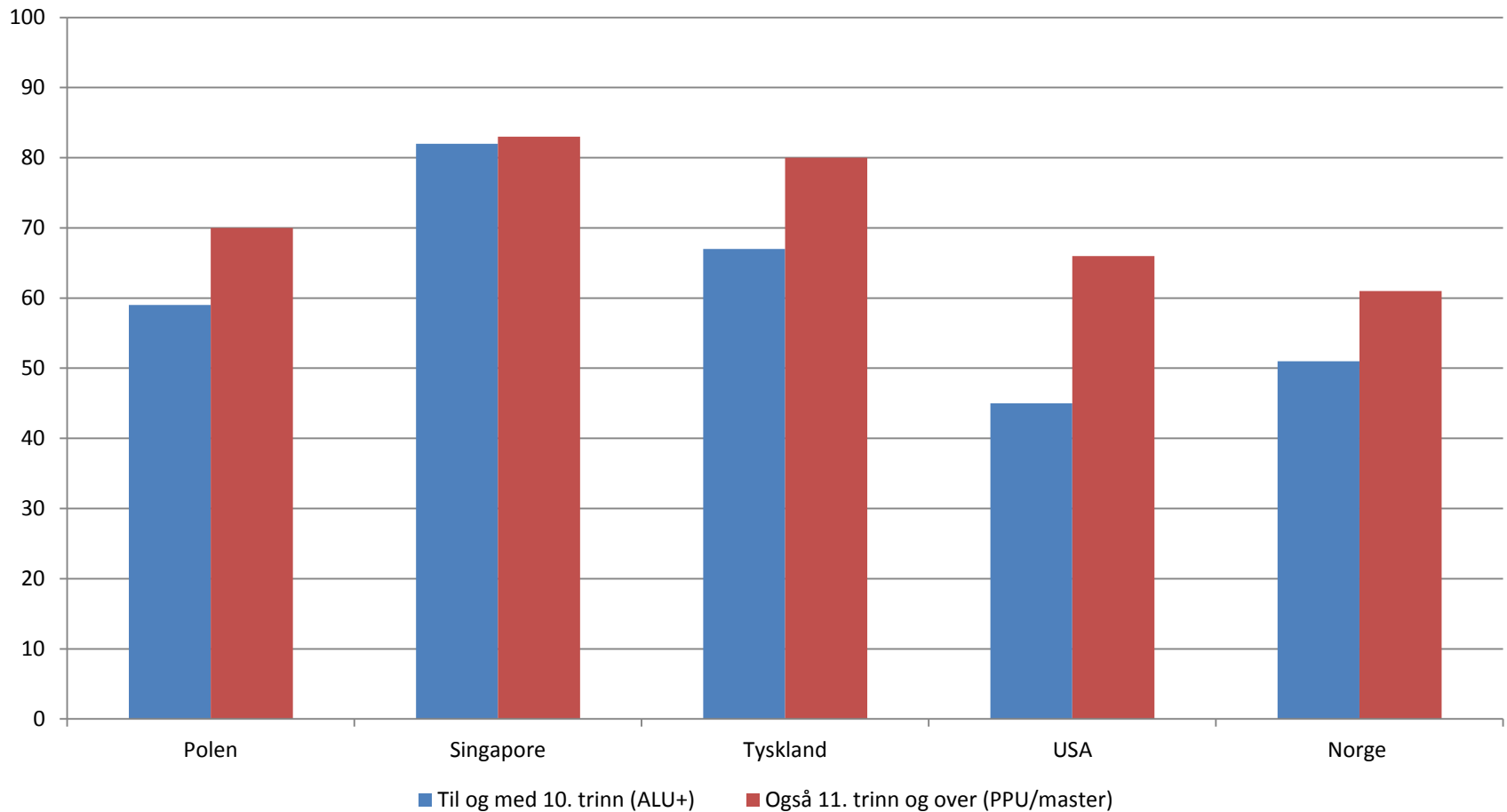
Prosent som svarer rett på oppgave 2 (Leifs svar)

Ungdomstrinn



Prosent som svarer rett på oppgave 2 (Marias svar)

Ungdomstrinn



Problemområder basert på resultatene i TEDS

- Lærerstudenter i **alle utdanningsprogrammene i Norge presterer svakt på oppgaver i matematikk** i TEDS sammenliknet med studenter i andre land. Det peker mot et klart behov for å styrke norske studenters kunnskaper i matematikk
- Matematisk kunnskap som peker seg ut som spesielt viktig for lærerstudentene er **rene matematiske kunnskaper i aritmetikk og algebra**
- Matematikkdiraktisk kunnskap framstår i TEDS som tett sammenvevd med kunnskaper i matematikk på den måten at kunnskap i **matematikkdiraktikk forutsetter en tilstrekkelig faglig basis i matematikk**
- Resultatene i TEDS peker mot et behov for **en bedre integrering mellom matematisk kunnskap og fagdiraktisk kunnskap** i lærerutdanningen. Det synes som om norsk lærerutdanning til en viss grad har tatt for gitt at elevene har en tilstrekkelig faglig basis i matematikk og noe ensidig har lagt vekt på det didaktiske

Problemområder basert på resultatene i TEDS

- Lærerstudentene trenger kunnskaper om hva som skiller ren matematikk og anvendt matematikk, og om hva som karakteriserer matematikk som fag. Dette er spesielt viktig i en skole som legger vekt på at elevene skal oppmuntres til utforsking og utvikling av egne metoder og strategier
- Det kan framstå som et paradoks at ved å legge mer vekt på utforskende og aktive elever, stiller det større faglige krav til lærerens basiskunnskaper i matematikk, på kunnskaper om hva som skiller ren og anvendt matematikk og på hva som karakteriserer faget matematikk
- Resultatene i TEDS peker mot et behov for en grundig gjennomgang og debatt av innholdet i lærerutdanningene i Norge – om prioritering av matematikkunnskap, fagdidaktisk kunnskap og pedagogisk kunnskap
- Konklusjonene over om lærerutdanning basert på TEDS kan med stor sannsynlighet antas også å ha relevans for etter- og videreutdanning av lærere som er i skolen
- Det er et tankekors at på tross av svake faglige resultater, har våre lærerstudenter generelt kompetanse for undervisning på høyere trinn enn studenter i de land vi sammenlikner med

Takk for oppmerksomheten!

Jeg har presentert noen hovedresultater fra TEDS-M 2008 - vi trenger nå en åpen diskusjon av

- resultater
- konklusjoner
- konsekvenser for lærerutdanningen i Norge

Hva er undervisningskunnskap i matematikk? eller

Hva trenger matematikklærere av kunnskap?

- Hva er basiskunnskap for lærere i matematikk?
- Hvordan er **forholdet** mellom kunnskap i matematikk og i matematikkdiraktikk/matematikkdiragogikk?
- Hvordan er forholdet mellom kunnskap i matematikk, matematikkdiraktikk og generell pedagogikk?
- Hvilke konsekvenser trekker vi for utdanning av lærere i matematikk
 - **Grunn**utdanning?
 - **Etter- og videre**utdanning?
 - **Organisering**/bruk av lærere **i skolen**?

Verdt å tenke over?

Vi kan ikke "kjøpe" lærere fra andre land!

Matematikk læres på skolen?

THE ROLE OF PROOF IN TEACHER EDUCATION IN MATHEMATICS

ICME – 12

**The 12 International Conference on Mathematics Education
July 8-12, 2012, Seoul, Korea**

Topic Study Group 33 (TSG 33)

Assessment and Testing in Mathematics Education

THE ROLE OF PROOF IN TEACHER EDUCATION IN MATHEMATICS

- Liv Sissel Grønmo
Department of Teacher Education and School Research, University
of Oslo, Norway
l.s.gronmo@ils.uio.no
- Hege Kaarstein
Department of Teacher Education and School Research, University
of Oslo, Norway
hege.kaarstein@ils.uio.no
- Paul Ernest
School of Education, University of Exeter, United Kingdom
Department of Teacher Education and School Research, University
of Oslo, Norway
p.ernest@ex.ac.uk

THE ROLE OF PROOF IN TEACHER EDUCATION IN MATHEMATICS

- *We want to discuss teachers' need for **competence in the syntactical structure of mathematics** (not only **the substantive structure**)*
- the substantive structure constitutes, or at least expresses, the substance of the discipline; **the syntactical structure is the discipline's methodology** ... [T]o be educated in a discipline, the student must have an understanding of **both the substance and the syntax** of that field. (Phillips, 1996)
- *We use data from **TEDS-M 2008 for Norway** as a background for our discussion*
- *Norway is used as **an example** – our discussion is general*

TEDS-item about Proof – Teacher students for Secondary School

Some lower secondary school students were asked to prove the following statement:
When you multiply 3 consecutive natural numbers, the product is a multiple of 6.

Below are three responses

Kate's answer

A multiple of 6 must have factors of 3 and 2.

If you have three consecutive numbers, one will be a multiple of 3.

Also, at least one number will be even and all even numbers are multiples of 2.

If you multiply the three consecutive numbers together the answer must have at least one factor of 3 and one factor of 2.

TEDS-item about Proof – Teacher students for Secondary School

Leon's answer

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$$

$$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$$

$$6 \times 7 \times 8 = 336 = 6 \times 56$$

Maria's answer

n is any whole number

$$\begin{aligned} n \times (n + 1) \times (n + 2) &= (n^2 + n) \times (n + 2) \\ &= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

Canceling the n 's gives $1 + 1 + 2 + 2 = 6$

Determine whether each proof is valid.

Check one box in each row.

- A. Kate's proof
- B. Leon's proof
- C. Maria's proof

Valid

Not valid

☐
☐
☐☐
☐
☐

CATEGORIZATION OF ITEMS

- These three items are categorized in TEDS-M as mathematics pedagogical content knowledge. On the basis that these items can be solved simply by knowing the mathematics involved, we argue that
 - the school learning context makes no further knowledge demands for determining the correct answer to these items; it is, for testing purposes, what Hill, Sleep, Lewis and Ball (2007) have called window dressing
- We have presented these items in four different groups of mathematics education professionals as teachers in school, teacher educators in mathematics and mathematics pedagogy, and researchers in mathematics education. An overwhelming majority categorized them as testing future teachers in mathematics content knowledge
- We do not intend to discuss categorizing of items here today. For more about categorizing of items in TEDS-M we suggest that you participate in Strand 3 on Wednesday, July 11, 11.15-12.00 when Hege Kaarstein present here paper “Analyzing the construct of mathematics pedagogical content knowledge for teaching and its operationalization used in TEDS”

TEDS-item about Proof – Teacher students for Secondary School

Programtype	Correct answer: Kate's answer is valid ITEM A	Correct answer: Leon's answer is not valid ITEM B	Correct answer: Maria's answer is not valid ITEM C
ALU	52	27	42
ALU+	61	41	51
PPU/master	63	70	61

- ALU:** Generalists that can teach all subjects including mathematics Grade 1-10
- ALU+:** Generalists with extra math that can teach all subjects including math Grade 1-10
- PPU/master:** Specialist in math (and one other subject), can teach math Grade 8-13

Proof item Secondary School continues

- We have pointed out the problematic issue that future teachers in Norway to a great extent:
 - were not able to recognize a correct argument from a student for a mathematical statement about numbers
 - wrongly tended to accept that a number of examples are a valid proof in mathematics

How **relevant** is this type of knowledge for teachers in school?

We argue that:

Competence in the syntactical structure of mathematics (not only the substantive structure) is important for teachers in school

What do **you** think?

The fact that curricula in countries like Norway are **emphasizing that students should develop their own methods** in mathematics at all levels in school, instead of only learning accepted algorithms, makes **this type of competence even more important**

This type of competence about the syntactical structure of mathematics is relevant for teachers **at all levels in school**