Matematik som tillämpningsämne i Gymnasieskolan

Samverkan matematik-samhällskunskap

Numerisk räkning
Funktioner och beskrivande statistik
Ekonomiska kalkyler 1. Bageriet
Ekonomiska kalkyler 2. Båtvarvet

Skolöverstyrelsen 1971

Matematik som tillämpningsämne i Gymnasieskolan

Samverkan matematik-samhällskunskap

Skolöverstyrelsen 1971

Innehåll

Produktion 1971
Svenska Utbildningsförlaget Liber AB

Förord

När man i läroplanen studerar kursplanen för SE-linjens matematik finner man på flera ställen formuleringar av följande typ: Undervisningen bör ske mot bakgrunden av att dessa elever studerar matematik från andra utgångspunkter än elever som läser NT-kursen.

Lärarna uppmanas också på flera ställen att söka sina tillämpningar från ämnena samhällskunskap och företagsekonomi. Att en samverkan mellan dessa ämnen sällan äger rum på skolorna är fullt klart. Detta är beklagligt ty i ämnena samhällskunskap och företagsekonomi finns så mycket konkret stoff att hämta att i det närmaste hela matematikkursen kan täckas. Vårt mål med det här studiepaketet är att överbrygga en del av de svårigheter som uppstår vid en samverkan. Detta vill vi göra genom

- att ge matematikläraren tillämpningsproblem från och en orientering om stoffet i ämnena samhällskunskap och företagsekonomi,
- att ge läraren i samhällskunskap (företagsekonomi) en orientering om vilka stora möjligheter det finns att under matematiklektionerna lösa problem i samhällsekonomi samt hur man kan utnyttja elevernas kunskaper i matematik,
- att initiera en meningsfull samverkan och en gemensam årskursplanering för nämnda ämnen.

Det är däremot inte vårt mål att göra ämnet samhällskunskap mera matematiskt betonat. Vi vill endast lokalisera och diskutera de moment i kursen där en samplanering och samverkan väsentligt kan öka utbytet för SE-eleverna i resp ämnen.

Vi vill slutligen påpeka att en sådan här samverkan inte hindrar oss från att "hinna med kursen". Snarare kan man göra stora tidsvinster vid en vettig planering genom

- att eleverna genom ett meningsfullt arbete får högre motivation,
- att lärarna slipper att på olika håll och med olika termer behandla samma eller likartat stoff,

- att t ex läraren i samhällskunskap repeterar delar av matematikstoffet genom att vid lämplig tidpunkt tolka diagram eller diskutera de ekonomiska konsekvenserna av en prishöjning.

Materialet är utarbetat av en arbetsgrupp vid fortbildningsavdelningen vid Lärarhögskolan i Göteborg bestående av: lektor Wiggo Kilborn, ordförande, lektor Göran Emanuelsson, fortbildningskonsulent Rolf Gullstrand och lektor Lars Sundgren.

Hur skall materialet användas?

Materialet är uppdelat i fyra delar. Dessa har avpassats så att de skall ge underlag för vardera en halv studiedag. Givetvis kan hela materialet eller delar därav studeras i studiecirkelform eller på egen hand som självstudium. Vi ger här ett förslag till hur arbetet kan bedrivas på en halv studiedag.

- Den del av materialet som skall behandlas under studiedagen bör läsas igenom i förväg.
- Under studiedagen bör arbetet ske i grupper som innehåller minst en lärare i vardera ämnet. På en större skola kan eventuellt olika grupper koncentrera sig på att specialbehandla var sitt område av stoffet.
- I grupperna diskuteras först texten utgående från respektive ämne. Detta bör göras med läroböckerna uppslagna. Sedan övergår man till att diskutera mer konkret vad som på skolan i fråga lämpar sig för en samverkan och hur denna samverkan bör ske. (Vad gör respektive lärare?)
- Därefter övergår man till att skissera en mer långsiktig planering. Eventuellt kan här utses arbetsgrupper som tar hand om olika stoffområden eller årskurser. Arbetsgruppens uppgifter bör vara dels att samordna arbetet tidsmässigt, dels att konstruera problem som är lämpliga att använda vid en samverkan. Vi vill speciellt framhålla koncentrationshalvdagen i detta sammanhang. Denna arbetsform är särskilt lämplig om man önskar utnyttja stoff från "fel årskurs".

Vid arbetet bör grupperna ha tillgång till kurslitteraturen i respektive ämne samt räknetabeller, räknesticka och i förekommande fall statistisk årsbok.

Under den tid vi arbetat med materialet har vi erfarit att även lärarna i företagsekonomi bör ha behållning av det. Genom att en ekonom ingår i gruppen vinner man en stor fördel. Läraren i företagsekonomi kan nämligen genom en mer matematisk inriktning än läraren i samhällskunskap fungera som "en felande länk" när det uppstår samverkansproblem (i fråga om stoffet) mellan ämnena samhällskunskap och matematik.

1 • Numerisk räkning

Inledning

Ett viktigt område för samverkan sk-ma är vad som vanligtvis kallas numerisk räkning. Däri ingår på gymnasiala stadiet arbete med bl a närmevärden, feluppskattning, procenträkning, räknestickan och räknemaskiner.

För sk-läraren är det viktigt att eleverna snabbt kan göra överslagsräkningar, rimlighetskontroller och beräkningar med räknesticka.

För ma-läraren är det viktigt, att de begrepp som gås igenom på matematiklektionerna används i sk och att han får kännedom om att tillämpningar kan hämtas från sk.

Naturligtvis är det nödvändigt att en samplanering görs, så att moment som sk-läraren behöver kan ha behandlats i matematik och så att elevernas matematikkunskaper verkligen utnyttjas på sk-lektionerna. (Det är här viktigt att sk-läraren får reda på vilka kunskaper i matematik eleverna har.)

Målen för del 1 (numerisk räkning) är alltså:

- att ge sk-läraren information om den matematik som bjuds eleverna på ma-lektioner,
- att ge ma-läraren en orientering om i vilken omfattning matematiska hjälpmedel behövs i sk,
- att ge underlag för en samplanering i de båda ämnena.

Då enligt vår erfarenhet inte alla sk-lärare behärskar räkning med räknesticka, ger vi här en introduktion om detta med tillämpningar från sk. Materialet är här tänkt att tjäna som diskussionsunderlag för vidare samplanering vid varje enskild skola.

Det kan anmärkas att sidorna 12-16,18 och 21 endast är avsedda för sk-lärare som ej behärskar räkning med räknesticka. På dessa sidor ger vi en kort handledning i handhavandet av räknestickan.

Gemensamma uppgiftstyper och beröringspunkter för diskussion finns på de övriga sidorna.

är närmevärden. Nedan följer några exempel på användning av närmevärden.

Ex 1. De senaste bestämningarna pekar på en ålder hos jordskorpan av 3 000 miljoner år.

Ex 2. Forskningsresanden Sven Hedin använde karavankamelernas steglängd som enhet vid längdbestämning. Med hjälp [illegible]

Ex 3. Enligt SÅ-68 var Sveriges järnmalmsproduktion 1965 29 354 000 ton.

Ex 4. Nigerias folkmängd uppges av officiell FN-statistik till 55 670 052 i nov 1963.

<u>Att diskutera</u>

1. I vilket (vilka) av exemplen är det fråga om närmevärden a) går att bestämma b) inte går att bestämma?

2. Diskutera varför man alltid får närmevärden vid mätning och vägning.

3. Folkräkningar i u-länder har ofta mött hård kritik. Diskutera varför.

Ex 5. I två olika källor anges befolkningstalen för Göteborg (1 nov 1967) till

444 200 och 444 176.

Vilket förefaller noggrannast?

Många skulle förmodligen säga: "444 176 verkar noggrannare". Nu var det i själva verket 444 202 mantalsskrivna i Göteborg 1 nov 1967. (Låt oss anta att man räknat rätt.)

Alltså är 444 200 ett noggrannare närmevärde än 444 176. (Se tallinjen i bild 1.)

Bild 1

Att diskutera

4. Noggrannhet i källmaterial - noggrannhet i siffror. (Gällande siffror.)

Ex 6. Enligt SOU:69:2 anser 10 % av männen att en äkta man får vara otrogen, om han ser till att hans hustru inte vet det. Här har man valt att genom stickprov få fram ett närmevärde, även om en exakt bestämning i princip hade varit möjlig.

Ex 7. När det gäller förutsägelser om framtiden, prognoser, är närmevärden det enda möjliga: Det kommer att finnas 7 000 miljoner innevånare i världen år 2000.

Närmevärden är praktiska att arbeta med. De ger oftast tillräcklig noggrannhet. Det spar tid att räkna med närmevärden. Man måste dock hålla i minnet och ha förståelse för olika bestämningars osäkerhet.

Vid räkning med närmevärden bör man se till att man avrundar så att man inte har fler siffror i svaret än i något av de tal man räknar med.

Ex 8. $56\ 320 + 78\ 000 = 134\ 320 \approx 134\ 000$

$78\ 000 - 56\ 320 = 21\ 680 \approx 22\ 000$

$78 \cdot 56{,}3 \approx 4\ 400$

$\frac{78\ 000}{56\ 320} \approx 1{,}4$

Att diskutera

5. Matematik- och samhällskunskapens synpunkter på följande: Mexico City hade folkmängden 3 287 000 år 1966. Hur exakt är detta värde?

a) Ange det procentuella (relativa) felet.

b) Ange storleken av (det absoluta) felet.

6. Folkmängden i Fomask angavs 1/1-69 till 720 000. Vid en folkräkning 1/1-70 bestämdes folkmängden till 721 127.
   a) Hur stor var folkökningen under året?
   b) Hur stort är (det absoluta) felet i folkmängdsangivelsen 1/1-69?
   c) Kan det ha varit en folkminskning? Hur stor kan den högst ha varit?

7. Sätt följande metoder att avrunda i relation till matematikens avrundningsregler.
   a) Vid självdeklaration avrundas avdragen uppåt till jämnt hundratal och slutliga beskattningsbara inkomsten nedåt. Hur stort blir skattebortfallet maximalt på 4 miljoner löntagare?
   b) En artikels styckepris kalkyleras till 13,2 öre. Vid försäljning prissätter man varan till 14 öre/st. Hur mycket skulle den kalkylerade vinsten ha krympt om man prissatt varan till 13 öre och sålt 30 miljoner av den?

8. a) När kommer momentet närmevärden in i matematikkursen?
   b) När behöver sk-läraren använda närmevärden?
   c) Var skulle momentet komma in i matematikkursen för att ge en bättre samplanering? I samband med räknestickan?

Räknestickans användning i sk

Med en räknesticka kan man bland annat utföra multiplikationer och divisioner. Resultaten är närmevärden som oftast är tillräckligt noggranna. Den stora fördelen är att snabba beräkningar kan utföras. Vi ger först några exempel på uppgifter som snabbt kan lösas med hjälp av räknesticka och som ofta förekommer i samhällskunskap.

Ex 9. a) Om 100 D-mark = 143,10 kr, hur många
   1. svenska kronor är 5 650 D-mark,
   2. D-mark är 520 svenska kronor?

   b) Hur stor procent av världens befolkning fanns i Europa 1966 om Europas befolkning var 449 miljoner och hela världens befolkning 3 356 miljoner?

c) Merkostnaden vid avbetalningsköp antas vara 26 %. Hur mycket kostar vid avbetalningsköp en färg-TV som vid kontantköp kostar 3 390 kr?

d) Nedanstående tabell visar konsumentpriset i kr för vissa varor och tjänster åren 1964-1967. Beräkna index om 1964 väljs som basår.

Varor/tjänster	1964	1965	1966	1967
Cigarretter, 20 st	3,26	3,57	3,87	4,34
Dagstidning	0,42	0,45	0,49	0,53
Hårklippning, hr	6,34	7,08	7,50	8,24
Bilmontörsarbete, tim	17,17	19,21	21,73	24,41

e) Nedanstående uppgifter visar exportens sammansättning i miljoner kronor 1967. Åskådliggör exportens sammansättning med cirkeldiagram.

Malm	Metaller	Trävaror, papper	Verkstads-produkter	Övrigt
1 050	2 650	5 900	9 400	4 400

Beskrivning av räknestickan

Räknestickans delar framgår av bild 2 och nedanstående text. Vi kommer i det följande endast att utnyttja två av räknestickans skalor, nämligen C- och D-skalan.

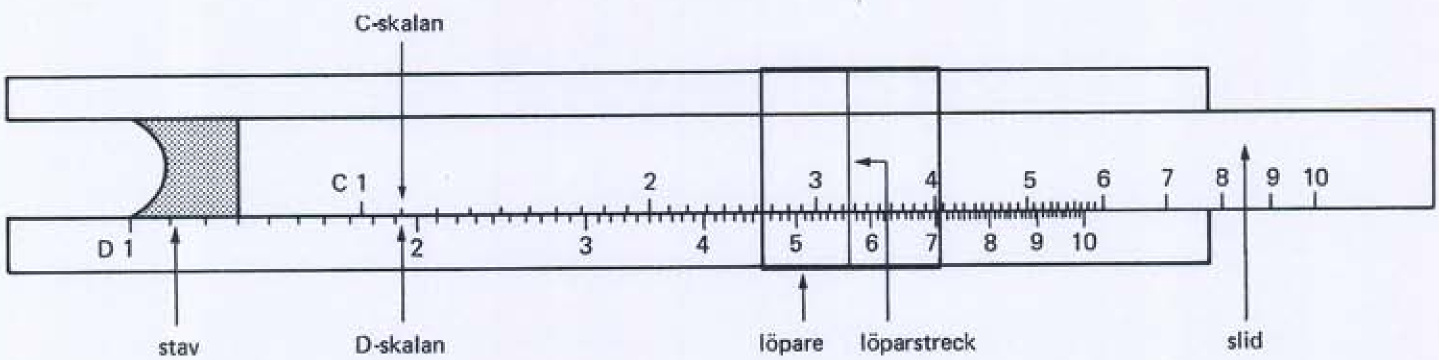


Bild 2

Staven	är räknestickans "fasta" del.
Sliden	kan skjutas i ett spår i staven.
Löparen	är en genomskinlig platta som kan flyttas utefter staven.
Löparstrecket	är ett streck på löparen.
C-skalan	finns nertill på sliden.
D-skalan	finns på stavens nedre del.

<u>C- och D-skalorna</u>

C- och D-skalorna har samma skalindelning. Avståndet 1 - 2 = avståndet 2 - 4 = avståndet 4 - 8. Detta medför att det är olika långt mellan skalstrecken på olika avsnitt av skalorna. Se bild 3. (Här förutsätts att D-skalan är 25 cm.)

Avsnittet 1 - 2
Mellan två på varandra följande skalstreck är det 0,01.

Avsnittet 2 - 4
Mellan två på varandra följande skalstreck är det 0,02.

Avsnittet 4 - 10
Mellan två på varandra följande skalstreck är det 0,05.

Bild 3

Ö 1. Se bild 4. Vilka tal står under de olika lägena av löparstrecket?

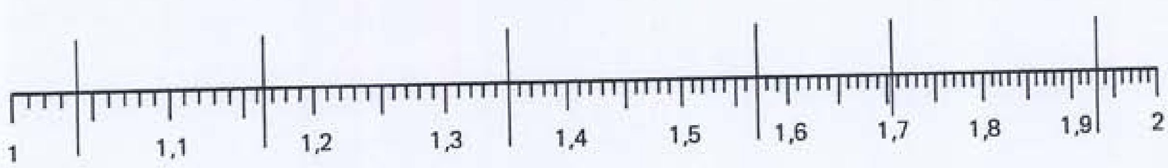


Bild 4

Ö 2. Ställ in löparstrecket på D-skalan över vart och ett av talen 2,2 2,02 2,03 3,89 3,92 3,95 3,99.

Ö 3. Vilka tal står under strecken i bild 5? Försök ange talen med två decimaler.

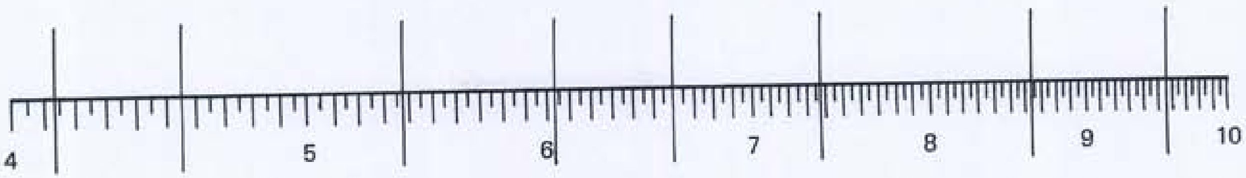


Bild 5

Multiplikation

Ex 10. Ställ in sliden på räknestickan, så att 1 på C-skalan står mitt för 2 på D-skalan. Se bild 6.

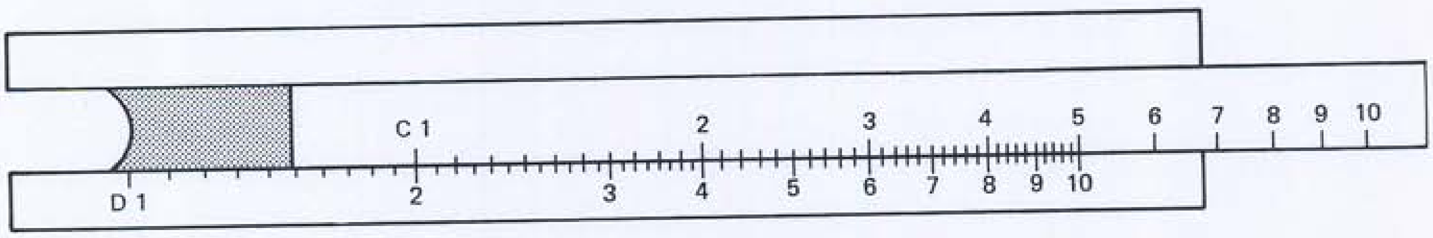


Bild 6

Man upptäcker då, att talen på D-skalan får man genom att multiplicera talen på C-skalan med 2.

Ex 11. Vi beräknar produkten $1,56 \cdot 2,32$ med räknesticka.

a) Ställ först C 1 (1 på C-skalan) över D 1,56 (1,56 på D-skalan).

b) Ställ sedan löparstrecket över C 2,32.

c) Avläs på D-skalan under löparstrecket. Där står 3,62. Se bild 7.

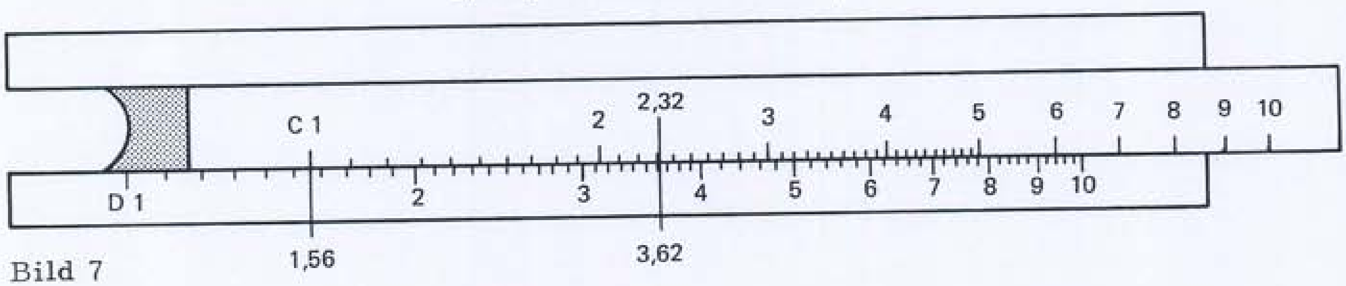


Bild 7

Vi har fått ett närmevärde till produkten och skriver

$1,56 \cdot 2,32 \approx 3,62.$

Tecknet $\approx$ utläses "är ungefär lika med". Det exakta värdet är 3,6192.

Ö 4. Beräkna med räknesticka

a) 1,9·2,5 b) 1,62·1,42 c) 2,07·2,9

d) 1,19·3,9 e) 1,74·3,01 f) 3,02·3,31

Ex 12. Försök räkna ut produkten 3·5 med räknesticka på samma sätt som ovan. Det går tydligen inte. Man kommer utanför D-skalan, när man skall avläsa under C 5. Då gör vi på följande sätt. Ställ C 10 över D 3. Under C 5 står nu 1,5. Men 3·5 = 15. Inställningen i bild 8 ger alltså produkten 3·5 bortsett från decimaltecknets placering.

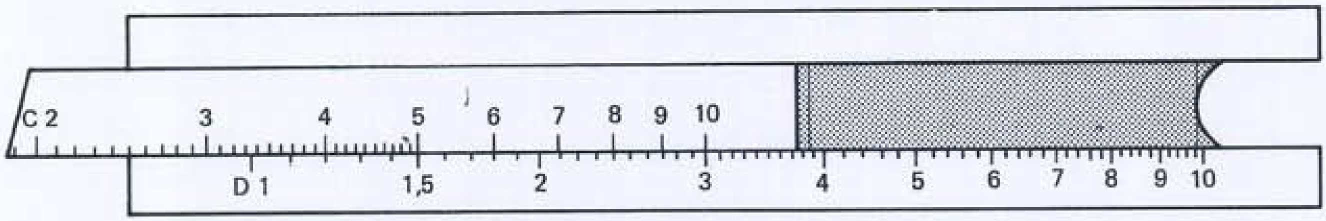


Bild 8

Räknesticken ger alltså de siffror som skall ingå i svaret. Storleksordningen av svaret (var decimaltecknet skall placeras) får man avgöra med <u>överslagsräkning</u>. När man skall multiplicera (eller dividera) tal som är mindre än 1 eller större än 10, gör man inställningen på stickan med tal mellan 1 och 10, men med samma siffror. Svarets storleksordning avgörs med överslagsräkning på samma sätt som tidigare.

Ex 13. Bild 9 visar hur man beräknar produkten 0,33·815. (Eller: Hur mycket är 33 % av 815?)

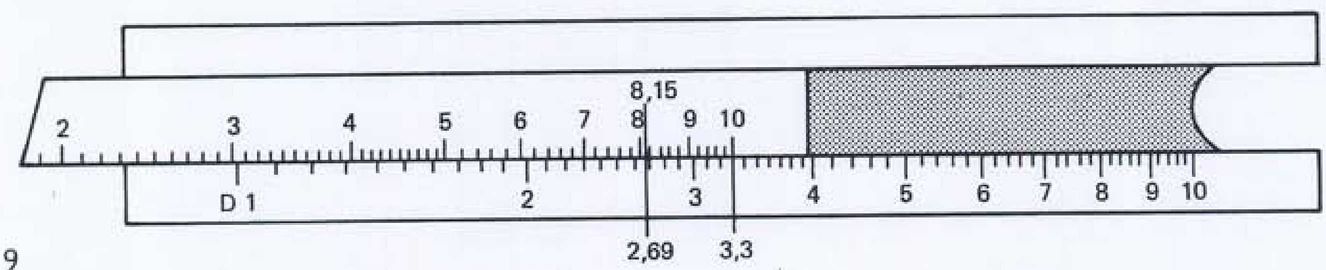


Bild 9

Produkten har siffrorna 269. För att få reda på var decimaltecknet skall stå, gör vi en överslagsräkning.

$$0,33 \cdot 815 \approx 0,3 \cdot 800 = 240.$$

Alltså är

$$0,33 \cdot 815 \approx 269.$$

Multiplikation med räknesticka utförs alltså med nedanstående inställning (bild 10).

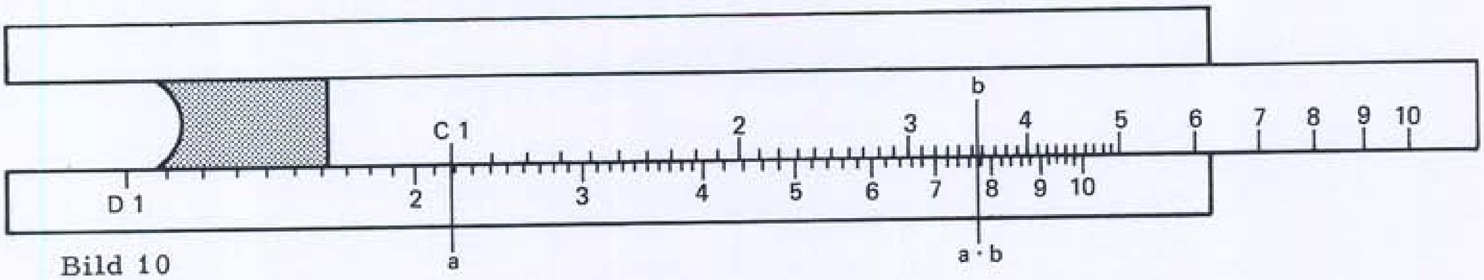


Bild 10

Om b skulle hamna utanför D-skalan, så använder man nedanstående inställning (bild 11).

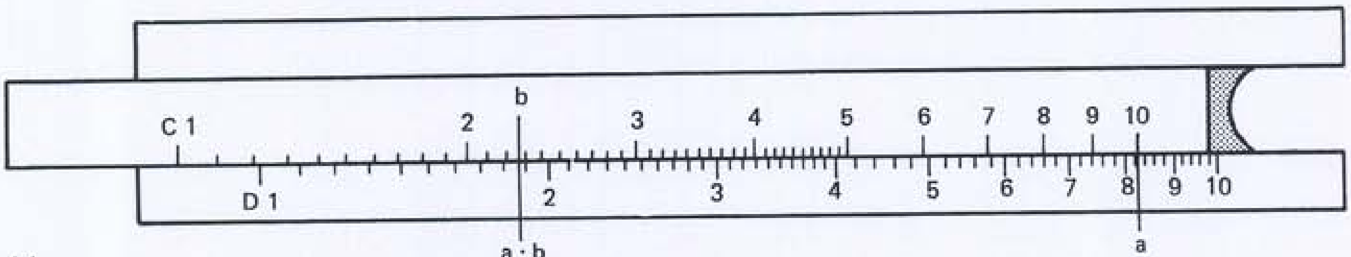


Bild 11

Ö 5. I en produkt av närmevärden bör man inte ha större noggrannhet än i någon av faktorerna. Beräkna med hjälp av räknesticka:

a) 0,213· 5120	b) 0,35· 13500
c) 1,27· 689	d) 1,73· 534
e) 525000· 0,36	f) 254· 452

Ö 6. Vad är

a) 35 % av 13 500 (jämför Ö 5b))
b) 55,4 % av 369
c) 7,5 % av 37 000
d) 2,3 % av 479
e) 106 % av 7 950
f) 136 % av 985.

Räknestickan som tabell

Ex 14. Priserna (moms ej inräknad) på ett antal varor är

240 360 495 642 790 kr.

Vi skall beräkna priserna efter att moms på 11,11 % inräknats. Eftersom 11,11 % = 0,1111 blir priserna 1,111 ggr större, när momsen pålagts. (En vara som kostat 1 kr kostar sedan momsen pålagts 1,111 kr.) Med hjälp av räknesticka räknar vi ut närmevärden. Ställ in C 1 mitt för D 1, 111 (se bild 12). Med samma inställning (utan att flytta sliden) avläser vi nu under C 240, C 360, osv de nya priserna. Priserna blir (fullborda tabellen):

267 400 --- --- --- kr.

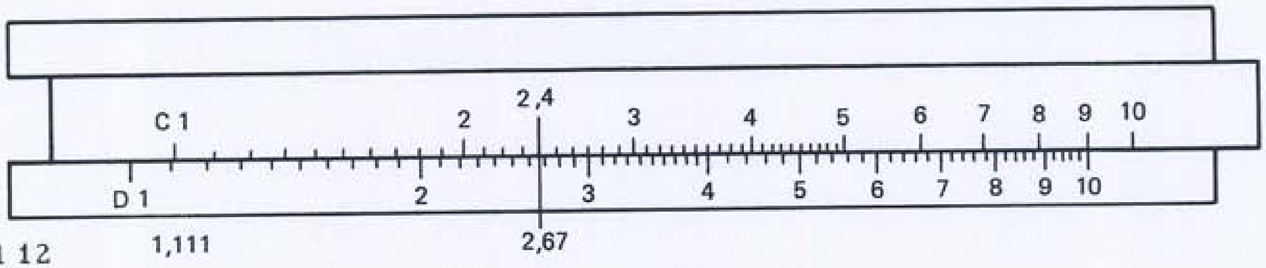


Bild 12

Ö 7. Om man räknar med en genomsnittlig befolkningstillväxt av 2, 5 % per år, betyder det att befolkningen under en 8-årsperiod ökar med cirka 20 %. Vilken blir den ungefärliga folkmängden i miljoner i nedanstående områden 1974 under ovanstående antagande?

	Asien	Indien	Kina	S-Vietnam	N-Vietnam
1966	1868	499	710	16, 5	19, 5
1974					

Ö 8. Beräkna med hjälp av bankernas valutakurser hur många kr nedanstående valutor motsvarade den 22 juli 1970.

a) 13, 160, 4 500, 67 500 pund

b) 17, 670, 5 650, 38 000 D-mark

c) 52, 392, 7 380, 15 650 USA-dollar

Utdrag ur bankernas valutakurser den 22/7, 1970:

1 pund	12:40
1 USA-dollar	5:19
100 D-mark	143:10

Division

Ex 15. Bild 6 på s. 14 visar hur man får produkterna

$2 \cdot 2 = 4 \qquad 20 \cdot 270 = 5\,400$

$2 \cdot 3 = 6 \qquad 0,2 \cdot 405 = 81$

$2 \cdot 4 = 8 \qquad 0,02 \cdot 39 = 0,78$

Men den visar också hur man får kvoterna

$$\frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{5\,400}{270} = 20$$

$$\frac{6}{3} = 2 \qquad \frac{81}{405} = 0,2$$

$$\frac{8}{4} = 2 \qquad \frac{0,78}{39} = 0,02$$

Den sista kvoten får man genom att ställa C 3,9 mitt för D 7,8 och avläsa på D-skalan under C 1.

Ex 16. Vi beräknar kvoten $\frac{80,5}{460}$ med räknesticka.

a) Ställ löparstrecket över D 8,05.

b) Ställ C 4,6 under strecket.

c) Avläs på D-skalan under C 1.

Bild 13 visar inställningen.

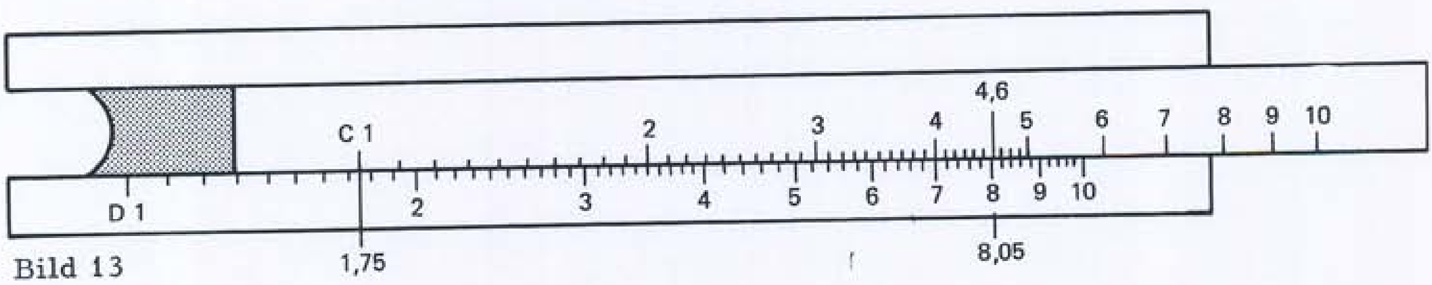


Bild 13

d) Överslagsräkning ger

$$\frac{80,5}{460} \approx \frac{80}{500} = \frac{160}{1000} = 0,16$$

Resultatet blir alltså

$$\frac{80,5}{460} \approx 0,175.$$

Anm. Vi har här också beräknat hur många procent som 80,5 är av 460. 0,175 = 17,5 hundradelar = 17,5 %.

Ö 9. Beräkna med räknesticka

a) $\frac{6850}{57}$ b) $\frac{4,55}{34}$ c) $\frac{6,04}{47,8}$ d) $\frac{8450}{39,2}$

Ex 17 Uppskattad folkmängd i olika områden vid mitten av 1966 framgår av nedanstående tabell. (Enl. SÅ-68.)

Afrika	Amerika	Asien	Europa	Hela världen
318	470	1868	449	3 356 milj.

Vi beräknar hur många procent av världens befolkning som enligt ovanstående fanns i Asien 1966.

För att bestämma kvoten $\frac{1868}{3356}$ gör vi så här:

a) Ställ löparstrecket över D 1,868.

b) Ställ C 3,356 under strecket.

c) När vi skall avläsa under C 1 på D-skalan ser vi att C 1 hamnat utanför. Vi avläser då under C 10. Se bild 14.

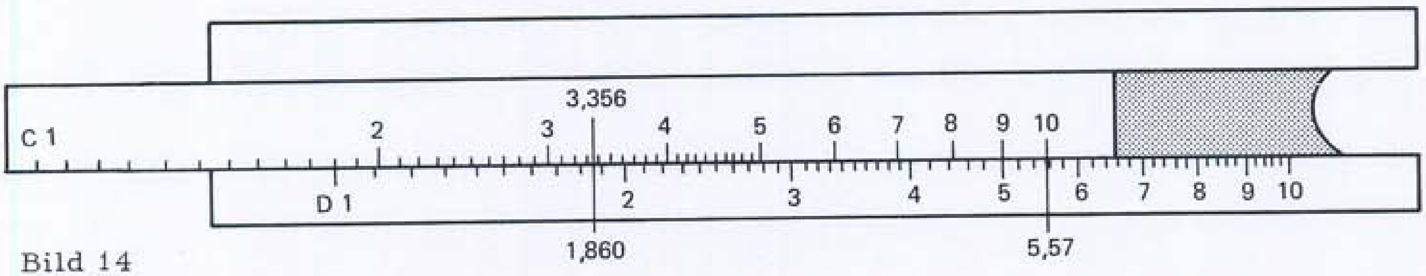


Bild 14

d) Överslagsräkning ger att $\frac{1868}{3356} \approx 0,5$.

Alltså gäller att

$$\frac{1868}{3356} \approx 0,557 \quad \text{(55, 7 hundradelar)}$$

Den sökta andelen är 55,7 %.

Ö 10. Beräkna de återstående världsdelarnas procentuella andelar av världens befolkning. Hur många procent blir det sammanlagt? Varför blir det inte 100 %?

Antag att vi vill åskådliggöra fördelningen i Ex 17 ovan i ett cirkeldiagram. Det är då mycket enkelt att få cirkelsektorernas medelpunktsvinklar.

Det är ju så att

100 % svarar mot 360°

och alltså

$1\ \%$ svarar mot $3,6^{\circ}$.

En multiplikation av procenttalen i nedanstående tabell med 3, 6 ger cirkelsektorernas medelpunktsvinklar.

Afrika	Amerika	Asien	Europa
9, 5 %	14, 0 %	55, 7 %	13, 4 %

Ö 11. Beräkna cirkelsektorernas medelpunktsvinklar enligt ovan.

Afrika	Amerika	Asien	Europa
---- $^{\circ}$	---- $^{\circ}$	---- $^{\circ}$	---- $^{\circ}$

För att få medelpunktsvinklarna ovan utförde vi i två steg nedanstående beräkningar:

Afrika	Amerika	Asien	Europa
$\frac{318}{3356} \cdot 3,6$	$\frac{470}{3356} \cdot 3,6$	$\frac{1868}{3356} \cdot 3,6$	$\frac{449}{3356} \cdot 3,6$

Talen i tabellen i Ex 17 på s. 19 har alla multiplicerats med

$$\frac{3,6}{3356}$$

Följande inställning ger då medelpunktsvinklarnas storlek direkt.

a) Ställ löparstrecket över D 3, 6.

b) Ställ C 3, 356 under strecket.

c) Under C 1 har vi nu kvoten $\frac{3,6}{3356}$ $(\approx 0,00107)$

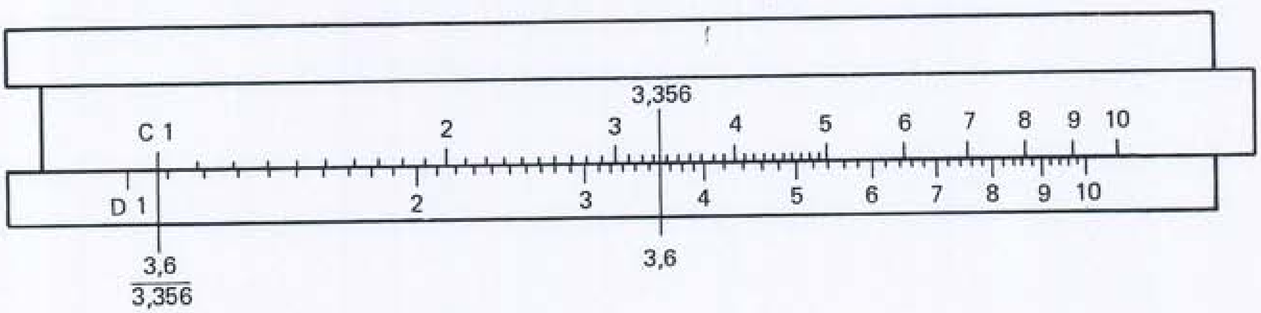


Bild 15

Vi behöver emellertid aldrig göra denna sista avläsning. Vi skall ju multiplicera talen i tabellen i Ex 17 s. 19 med detta tal.

d) Under C 3, 18 avläser vi C 4, 7 osv. (Se bild 16.)

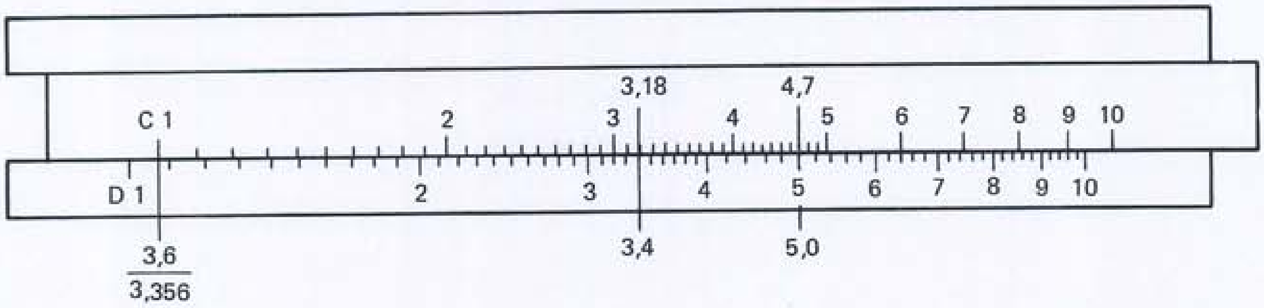


Bild 16

Resultat enligt nedanstående tabell.

Afrika	Amerika	Asien	Europa
34°	50°	201°	48°

Ö 12. Enligt Statistisk årsbok var år 1965 den svenska förvärvsarbetande befolkningens fördelning efter näringsgren den i tabellen nedan. Fyll i de tomma kolumnerna.

Näringsgren	Antal personer	% av totala antalet	Medelpunktsvinkel i cirkeldiagram
Jordbruk	407 600		
Industri	1 486 100		
Handel, samfärdsel	880 900		
Tjänster mm	762 000		
Summa	3 536 600		

Ö 13. Ur Statistisk årsbok 1968 är följande uppgifter om valutakurser hämtade. De anger värdet av en USA-dollar uttryckt i valutaenheten i olika länder.

Sverige (Krona)	Danmark (Krone)	Frankrike (Franc)	Storbrit. (Pund)	Västtyskland (Mark)
5,172	7,524	4,974	0,4175	4,019

Beräkna värdet av 1 Krone, 1 Franc, 1 Pund och 1 Mark i svenska kronor.

Division med räknesticka utförs alltså med nedanstående inställning (bild 17).

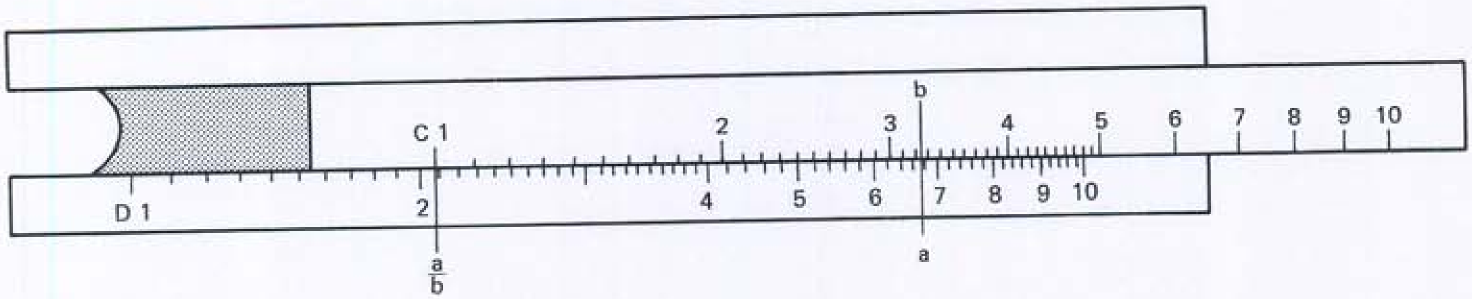


Bild 17

Om C 1 hamnar utanför D-skalan, avläser man under C 10 (bild 18).

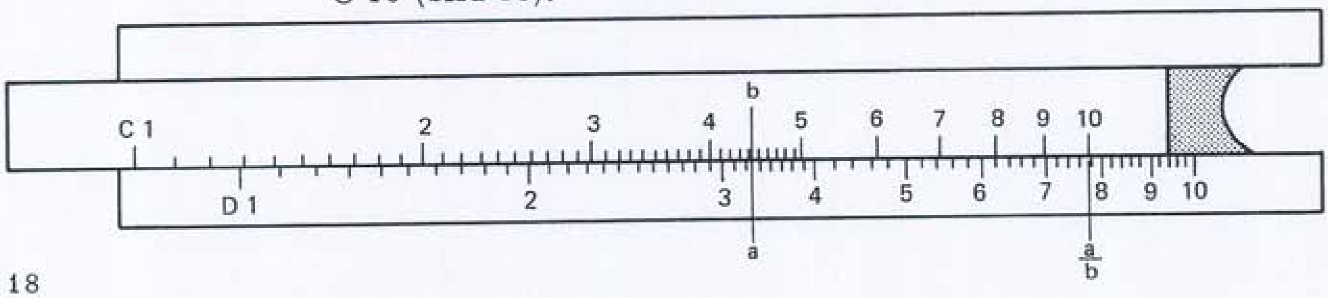


Bild 18

Ö 14. Beräkna med hjälp av räknesticka. Observera därvid att i en kvot av närmevärden bör man inte ha större noggrannhet än i någon av faktorerna.

a) $\frac{345}{567}$ b) $\frac{56,2}{95}$ c) $\frac{213\ 000}{57\ 600}$

d) $\frac{9,07}{365}$ e) $\frac{0,87}{36,2}$ f) $\frac{1\ 560\ 000}{5\ 345\ 000}$

Ö 15. Hur många procent är:

a) 56,2	av	95	(jämför Ö 14b))
b) 345	av	980	
c) 1 569	av	7 800	
d) 13,2	av	96,8	
e) 25,85	av	406,2	
f) 3 685	av	9 900	

Index

Nedanstående tabell anger konsumentpriser för vissa varor och tjänster åren 1965 - 1967 i kr.

Varor/tjänster	1965	1966	1967
Långfranska, 400 g	1,17	1,27	1,35
Köttfärs, 1 kg	13,00	13,48	14,04
Cigarretter, 20 st	3,57	3,87	4,34
Elenergi, 1 kWh	0,12	0,12	0,12
Herrlågskor, 1 par	62,19	65,98	69,29
Damdräkt	285,24	283,32	290,48
Vattenondulering med klippning	10,06	10,59	11,22
Bilmontörsarbete	19,21	21,73	24,41

För att lättare kunna jämföra prisförändringar hos de olika varorna och tjänsterna, väljer vi 1965 som basår och beräknar de andra årens priser i procent av basårets priser. Vi exemplifierar räkningen med räknesticka på "Herrlågskor". För att få procenttalen för 1966 och 1967 skall vi beräkna kvoterna

$$\frac{65,98}{62,19} \quad \text{och} \quad \frac{69,29}{62,19}$$

Här förekommer samma tal i nämnaren i båda kvoterna. Vi gör då på stickan först inställningen C 6,219 över D 1. Därefter avläser vi under C 6,598 och C 6,929 på D-skalan. Se bild 19.

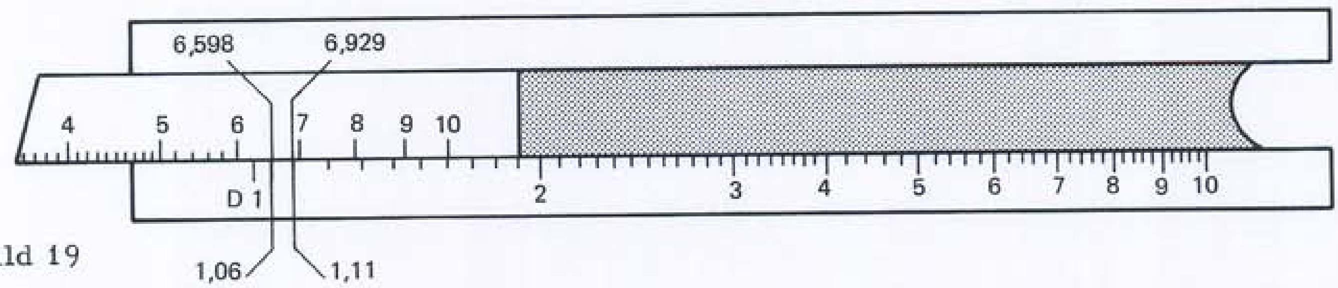


Bild 19

Resultaten blir

$$\frac{65,98}{62,19} \approx 1,06 \qquad \frac{69,29}{62,19} \approx 1,11$$

eller i procent

106 % resp. 111 % av basårets priser.

Procenttalen är införda i tabellen på nästa sida.

Ö 16. Fullborda tabellen nedan.

Varor/tjänster	1965	1966	1967
Långfranska, 400 g	100		
Köttfärs, 1 kg	100		
Cigarretter, 20 st	100		
Elenergi, 1 kWh	100		
Herrlågskor, 1 par	100	106	111
Damdräkt	100		
Vattenondulering med klippning	100		
Bilmontörsarbete, 1 h	100		

Med hjälp av tabell s. 23 skall vi nu beräkna ett konsumentprisindex för år 1967 med 1966 som bas. Vi antar då att ett hushåll förbrukar de kvantiteter som är angivna i tabellen nedan.

Varor/tjänster	kvantitet	1966 à-pris	1966 kostnad	1967 à-pris	1967 kostnad
Långfranska, 400 g	400	1,27	508	1,35	514
Köttfärs, 1 kg	50	13,48	674	14,04	702
Cigarretter, 20 st	50	3,87	194	4,34	217
Elenergi, 1 kWh	3000	0,12	360	0,12	360
Herrlågskor, 1 par	2	65,98	132	69,29	139
Damdräkt	2	283,32	567	290,48	581
Vattenondulering med klippning	10	10,59	106	11,20	112
Bilmontörsarbete, 1 h	15	21,73	326	24,41	366
Summa kostnader			2867		2991

Summorna nederst i tabellen ger index:

$$\frac{2991}{2867} \approx 1,04 = 104\ \%$$

Enligt denna beräkning skulle alltså konsumentpriserna höjts med i genomsnitt 4 % från 1966 till 1967.

Att diskutera

9. a) Vilket urval och hur många varor skall tas med vid en beräkning av ovanstående slag?

b) Hur skall kvantiteterna bestämmas?

Ö 17. Ur Statistisk årsbok är följande material hämtat.

Konsumentprisindex 1965 - 1967 (1949 = 100)

År	Livsmedel	Kläder	Totalindex
1965	227	145	190
1966	242	152	202
1967	250	157	211

a) Med hur många procent har totalindex stigit mellan 1966 och 1967? (Jfr beräkningen i tabellen ovan.)

b) Med hur många procent har livsmedelspriserna höjts från 1966 till 1967?

c) Med hur många procent har klädpriserna höjts från 1965 till 1967?

Statistiska Centralbyrån beräknar för varje månad ett konsumentprisindex med föregående månad som bas. Beräkningen sker i princip enligt metoden i tabellen på s. 24, men naturligtvis med ett betydligt större antal varor. Varorna sammanfattas i grupper (se exempelvis Statistisk årsbok) och för varje grupp beräknas ett särskilt index, som sedan sammanvägs till ett totalindex. Slutligen beräknas också index för varje år med föregående år som basår.

Att diskutera

10. I vilka sammanhang använder man i samhällskunskap de formler för indexberäkningar vilka har namn efter Laspeyres och Paasche.

11. Hur får man kedjeindex och varför använder man denna typ av index? (Varför använder man vid exempelvis konsumentprisindex inte direkt Laspeyres' formel och beräknar ett index för 1970 med 1949 som basår?)

Ett mycket stort antal av olika index publiceras. Ett problem vid jämförelser är att för olika index gäller olika basår.

Genomsnittlig timförtjänst för arbetare inom egentlig industri. Index (1939 = 100)	
1956	392
1966	814

Konsumentprisindex (1949 = 100)	
1956	139
1966	202

Hur skall man göra för att kunna jämföra löne- och konsumentprisutvecklingen för industriarbetare 1956 - 1966?

12. Tabellen nedan visar inkomstfördelningen i Göteborg 1967 för inkomster under 20 000 kr.

Civilstånd Inkomstklass	Män g	Män og	Kvinnor g	Kvinnor og	Alla
- 9 999	8 801	20 009	38 837	20 181	87 828
10 000 - 14 999	6 538	8 350	10 603	13 582	39 073
15 000 - 19 999	9 617	8 827	7 690	11 354	37 488
Summa	24 956	37 186	57 130	45 117	164 389

För att lättare kunna göra jämförelser är det här lämpligt att beräkna olika procentuella fördelningar (relativa andelar).

Man kanske vill

a) jämföra de olika civilståndens inkomstfördelning,

b) jämföra de olika inkomstskiktens civilståndsfördelning.

Diskutera hur tabellerna i dessa fall borde utformas och gör de beräkningar som kan vara lämpliga.

13.

Sk	Ma
När kommer de områden i sk in, där man använder numerisk räkning av olika slag?	När kommer de moment som ovan berörts in i ma?

Vilka matematikkunskaper behövs?

Hur skall samverkan ske, under vilka former? Diskutera en samplanering. (Samplanering i tid, samplanering i stoff, koncentrationsdagar.)

Svar till övningar

Ö 1. Från vänster till höger:

1,04 1,165 1,35 1,57 1,705 1,93

Ö 2. Se bild 20

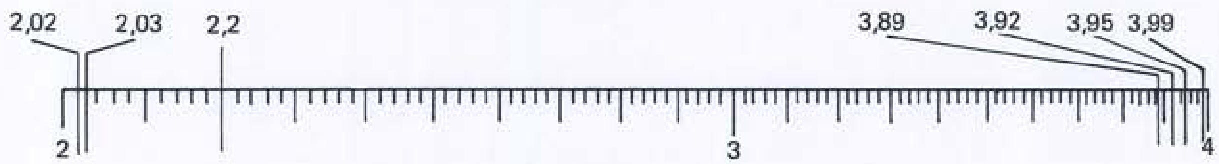


Bild 20

Ö 3. Från vänster till höger:

4,14 4,55 5,38 6,03 6,60 7,38 8,63 9,56

Ö 4.

a) 4,75	b) 2,30	c) 6,00
d) 4,64	e) 5,24	f) 10,0

Ö 5.

a) 1090	b) 4720	c) 875
d) 924	e) 189 000	f) 115 000

Ö 6.

a) 4720	b) 204	c) 2800
d) 11,0	e) 8430	f) 1340

Ö 7.

	Asien	Indien	Kina	S-Vietnam	N-Vietnam
1974	2240	599	852	19,8	23,4

Ö 8.

a) 161,20	1984	55 800	837 000 kr
b) 24,30	959	8 090	54 400 kr
c) 270	2030	38 300	81 200 kr

Ö 9. a) 120 b) 0,134 c) 0,126 d) 216

Ö 10. Andelarna är:

Amerika 14,0 %, Afrika 9,5 %, Europa 13,4 %

Ö 11.

Afrika	Amerika	Asien	Europa
34°	50°	201°	48°

Ö 12.

Procent av totala antalet	Medelpunktsvinkel i cirkeldiagram
11,5	$41,4^o$
42,0	$151,3^o$
24,9	$89,6^o$
21,6	$77,7^o$
100,0	$360,0^o$

Ö 13. 1 Krone = 0,687 kr, 1 Franc = 1,04 kr,
1 Pund = 12,39 kr, 1 Mark = 1,29 kr.

Ö 14. a) 0,608 b) 0,592 c) 3,70
d) 0,0248 e) 0,0240 f) 0,292

Ö 15. a) 59,2 % b) 35,2 % c) 20,1 %
d) 13,6 % e) 6,4 % f) 37,3 %

Ö 16.

Varor/tjänster	1965	1966	1967
Långfranska, 400 g	100	109	115
Köttfärs, 1 kg	100	104	108
Cigarretter, 20 st	100	108	122
Elenergi, 1 kWh	100	100	100
Herrlågskor, 1 par	100	106	111
Damdräkt	100	99	102
Vattenondulering med klippning	100	105	112
Bilmontörsarbete, 1h	100	113	127

Ö 17. Använd räknestickan
a) 4,5 % b) 3,3 % c) 8,3 %

2 • Funktioner och beskrivande statistik

Inledning

I samhällskunskap används ofta funktionsbegreppet, som är mycket viktigt i gymnasiets matematikkurs. Det är viktigt att eleverna får motivation och tillämpningar för sina matematikkunskaper inom detta område. Vidare underlättas elevernas förståelse och inlärning av begrepp i samhällskunskap om kunskaper från matematiken utnyttjas. Ofta är de problem som uppkommer vid samplanering och samverkan av rent terminologisk art.

Problemställningar som hör hemma inom den beskrivande statistiken är rikligt förekommande i sk, och den matematiska behandlingen kan här starkt knytas till material hämtade från sk. En samplanering spar här mycket tid för båda ämnena och gör tillämpningarna meningsfullare. Då samverkansmöjligheterna i allmänhet är mycket väl kända, ges här endast några exempel som diskussionsunderlag.

Anm. Exemplen är i del 2 huvudsakligen hämtade från sk-området befolkningsförhållanden. Naturligtvis kan man lika gärna hämta exempel på användningar och tillämpningar från andra sk-områden.

Målen för del 2 (funktioner och beskrivande statistik) är:

- att ge sk-läraren en orientering om den matematik som biuds eleverna på ma-lektioner, för att överbrygga elevernas terminologisvårigheter och öka användningen av för sk intressanta moment från ma,
- att ge ma-läraren en orientering om problemställningar i sk, vilka leder till tillämpningsuppgifter i matematik (matematiska modeller),
- att ge underlag för en samplanering i de båda ämnena inom ovanstående områden.

Ex 18. Tabell 1 visar Sveriges folkmängd i miljoner för några olika år. Mängden av talparen (1750, 1,78), (1800, 2,38), (1850, 3,48), osv är ett exempel på vad som i matematiken kallas en funktion. Den skrivs där

$$f = \{(1750,\ 1{,}78), (1800,\ 2{,}38), (1850,\ 3{,}48), (1900,\ 5{,}14), (1950,\ 7{,}04), (1968,\ 7{,}89)\}.$$

Mängden av tal i vänstra kolumnen kallas definitionsmängd och skrivs

$$D_f = \{1750,\ 1800,\ 1850,\ 1900,\ 1950,\ 1968\}.$$

Mängden av tal i högra kolumnen kallas värdemängd och skrivs

$$V_f = \{1{,}78,\ 2{,}38,\ 3{,}48,\ 5{,}14,\ 7{,}04,\ 7{,}89\}.$$

Tabell 1

År	Folkmängd (milj.)
1750	1,78
1800	2,38
1850	3,48
1900	5,14
1950	7,04
1968	7,89

Sk

I matematiken ges en bild av denna funktion: pildiagram

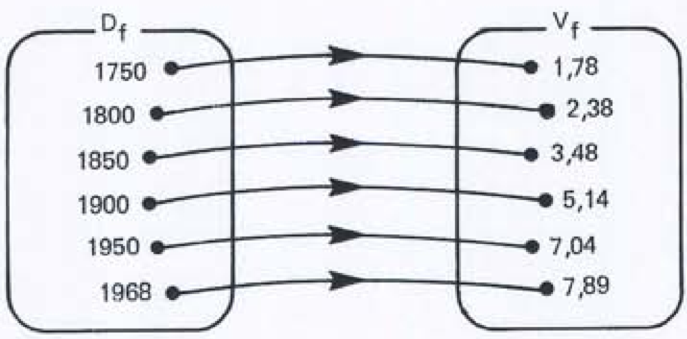


Bild 21

Till varje år hör en viss folkmängd. Till varje element i D_f hör ett element i V_f.

Ma

I vänstra spalten exemplifieras för sk begreppet pildiagram.

I samhällskunskap ges funktionerna oftast av tabeller eller grafiska bilder. Det matematiken här kan ge hjälp med är alltså: hur man läser, tolkar och konstruerar dessa.

Tabell 2

t	f(t)
1750	1,78
1800	2,38
1850	3,48
1900	5,14
1950	7,04
1968	7,89

I matematiken använder man oftast symboler. Man säger att år t var folkmängden f (t) miljoner: Funktionen skrivs

$t \curvearrowright f(t)$ läses "t övergår i f(t)" eller "t avbildas på f(t)".

För olika värden på variabeln t får man olika funktionsvärden f(t). Se tabell 2, och jämför med tabell 1. Vi har alltså här att

$$f(1750) = 1,78 \quad f(1900) = 5,14 \quad f(1850) = \ldots$$

Sk

En motivering för att använda symboler är, att då funktionens definitions- och värdemängd innehåller ett oändligt antal element kan man inte ange funktionen genom en tabell. Man måste då ange funktionen genom en räkneföreskrift.

Ex. Till varje värde på t svarar funktionsvärdet f(t), där

$$f(t) = 3t + 10.$$

För att få funktionsvärdet för ett visst t-värde, ersätter man t med talet ifråga.

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 10 = 13,$$
$$f(0,58) = 11,74.$$

Ma

I vänstra spalten ges en motivering för variabelbegreppet.

Funktioner från sk är sällan givna genom explicita uttryck. Från sk kan man ändå få samband som på matematiktimmarna kan ges explicita uttryck.

Tillämpningsuppgifternas grafer ligger nästan uteslutande i första kvadranten. Att observera är här, att problemens formulering och bakgrund ofta naturligt bestämmer definitions- och värdemängder. Detta är av stort värde vid illustrationen av dessa begrepp.

Den grafiska bilden till funktionen given i tabell 2 ritas i ett rätvinkligt koordinatsystem med t utefter första axeln och f(t) utefter andra axeln. Se bild 22.

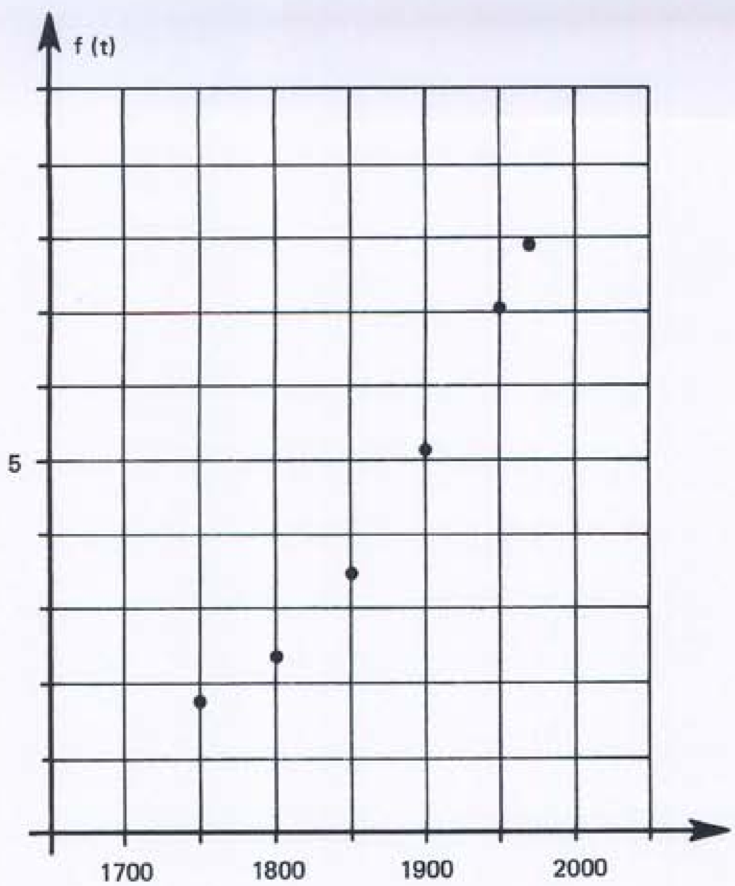


Bild 22

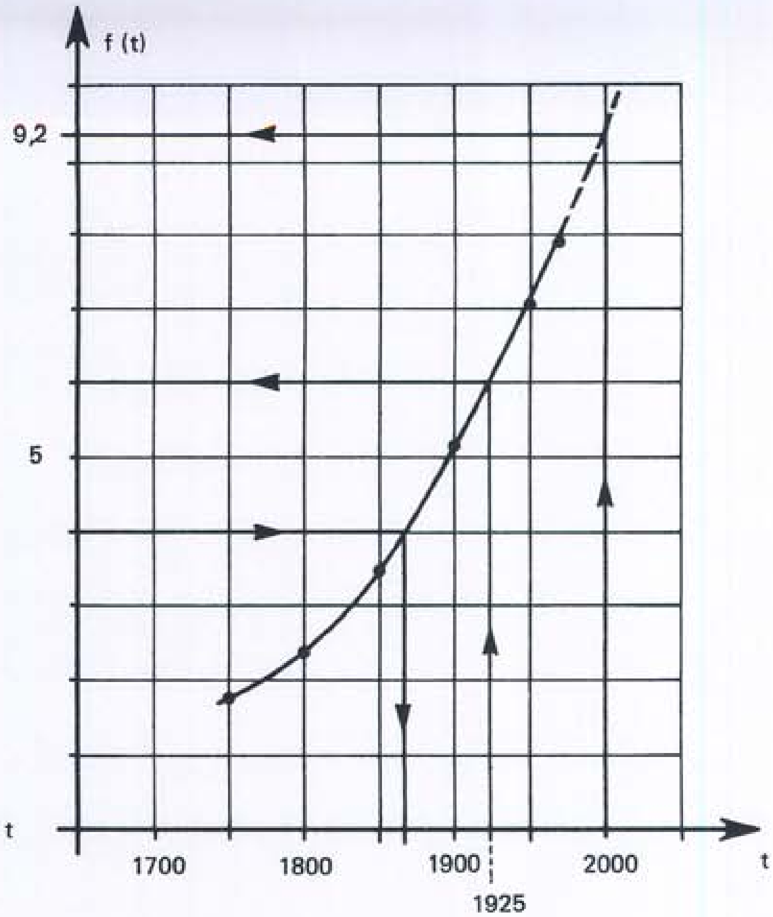
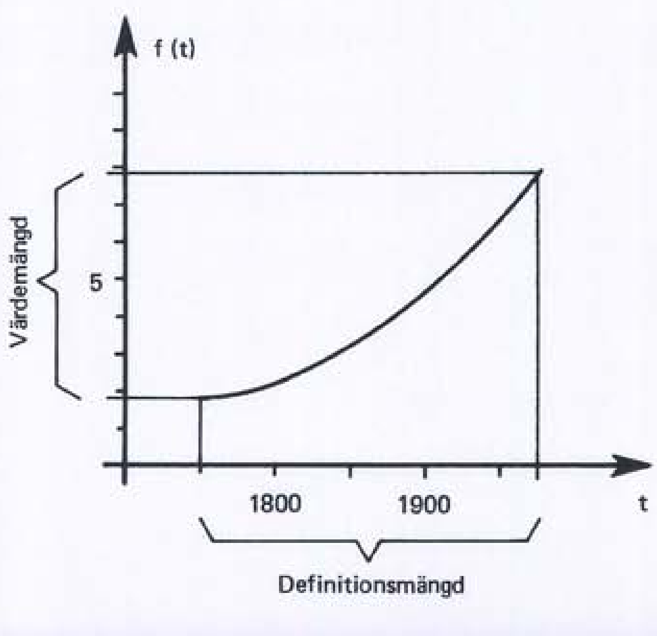


Bild 23

Ofta gör man en matematisk modell av verkligheten och antar att invånarantalet kan väntas ha varierat jämnt och utan "språng" och drar en jämnt förlöpande kurva genom punkterna. Se bild 23. Med hjälp av kurvan finner man t ex att folkmängden bör ha varit ungefär 6 miljoner år 1925. (Jämför Statistisk årsbok.) Genom att "fortsätta" kurvan (streckad i bild 23) finner vi att folkmängden år 2000 kan väntas bli i runt tal 9,2 miljoner. Ur bild 23 kan vi även se att folkmängden uppgick till 4 miljoner första gången ungefär år 1865.



Funktionens definitionsmängd har utvidgats att omfatta andra t-värden än de i tabellen angivna. Bild 24 visar var i den grafiska bilden definitions- resp värdemängd kan avläsas.

Bild 24

Att diskutera

14. Samhällskunskapens och matematikens olika synpunkter på användning av begreppet "matematisk modell", och den idealisering av verkligheten man då gör.

15. Vilka formella krav har matematiken på grafritning?

16. I ma-böcker behövs men saknas ofta konkreta exempel på funktionsbegreppet. Undersök i sk-boken om det finns lämpliga exempel som kan utnyttjas i matematik.

17. Tabell 3 och 4 visar folkmängden i olika världsdelar olika år. Tabell 4 med variabelbeteckningar.

Världsdel	År 1930	1940	1960
Afrika	164	191	278
Amerika	242	274	412
Asien	1120	1244	1661
Europa	355	380	425

Tabell 3

x	t 1930	1940	1960
Afrika	164	191	278
Amerika	242	274	412
Asien	1120	1244	1661
Europa	355	380	425

Tabell 4

I tabellen beror folkmängden ett visst år av världsdelen. En funktion ges av

$$f = \{(\text{Afrika}, 164), (\text{Amerika}, 242), (\text{Asien}, 1120), (\text{Europa}, 355)\}$$

Funktionen ger folkmängden i olika världsdelar 1930.

a) Ytterligare sju funktioner av en variabel kan fås ur tabellen. Ange någon.

b) Tabellen ger också en funktion av två variabler. Vilken?

18. Hur kan funktionsbegreppet utnyttjas vid konstruktion av tabeller? Hur väljer man tabellhuvud? Var i tabellen står elementen i definitions- och värdemängd?

Linjära funktioner

En viktig typ av funktion är den linjära. Man kan kort säga att en linjär funktion är en funktion vars grafiska bild är en rät linje.

Ex 19. Kommunalskatten i Göteborg var 1970 20 %. Vid en förtjänst av x kr är alltså kommunalskatten 0,20·x kr. Den linjära funktion som anger kommunalskatten vid olika inkomster är ett exempel på en <u>proportionalitet</u>. (Kommunalskatten är proportionell mot inkomsten.) Funktionen skrivs

$$x \mapsto 0{,}20x\ .$$

Nedan finns <u>värdetabell</u> och funktionens grafiska bild.

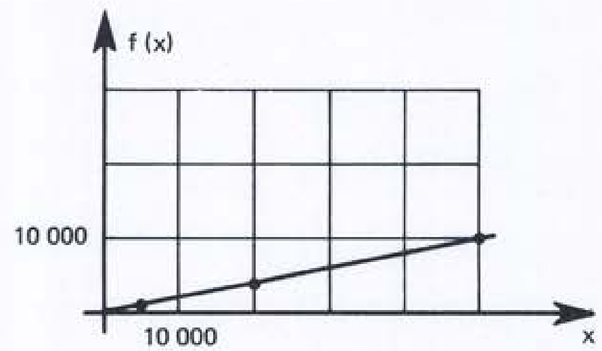


Bild 25

Värdetabell:

x	f(x) = 0,20x
5000	f(5000) = 1000
20000	f(20000) = 4000
50000	f(50000) = 10000

<u>Anm.</u> För kontrollens skull bestämmer man tre värdepar, även om två entydigt bestämmer funktionen.

Ex 20. Ceylons mortalitet i promille som funktion av år t finns angiven i vidstående tabell. I koordinatsystemet i bild 26 är markerade punkterna (t, f(t)). En rät linje har dragits (anpassats) så att den så nära som möjligt ansluter till de sex punkterna.

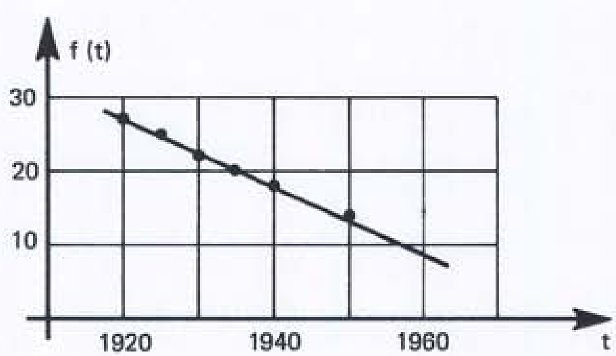


Bild 26

År t	mortalitet ($^o/_{oo}$) f(t)
1920	27
1925	25
1930	22
1935	20
1940	18
1950	14

Ma

Här kommer begreppen "matematisk modell" och "anpassning" till en viss typ av funktion in.

Skall man i matematik ur den grafiska bilden "ta fram" funktionsuttryck?

<u>Att diskutera</u>

19. Ge ytterligare exempel på samband i samhällskunskap som ger linjära funktioner.

20. Definitions- och värdemängder är ofta naturligt angivna i tillämpningar från sk. Vad kan man i ovanstående exempel säga om modellens giltighet (definitionsmängd)?

21. Om man känner två värdepar till en linjär funktion är denna fullständigt bestämd. (Genom två punkter går en och endast en rät linje.) I vilka sammanhang är man i sk intresserad av linjära funktioner för att ange ungefärliga funktionsvärden, diskutera prognoser?

(Av typen: Hur stor var Ceylons mortalitet 1945? När blir mortaliteten 10 %?)

22.

Sk	Ma
I vilka sammanhang är man i sk intresserad av linjära funktioner?	När kommer momentet linjära funktioner med tillämpningar in i matematik?
Vilka matematikkunskaper är det önskvärt att eleverna har?	

Vilken samverkan och samplanering är önskvärd? På vilka nivåer skall tillämpningsuppgifter ges i matematik för att anpassas till behoven i sk? (Grafiska bilder, algebraiska lösningsmetoder.)

Logaritmisk skala. Exponentialfunktioner

Genom att lägga räknestickans slid med C-skalan utefter andra axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem och pricka av punkterna 1, 2, 3, osv får man en logaritmisk skala på denna axel. Se bild 27. Observera att en logaritmisk skala ej börjar på 0. (Ma-läraren kan här ge en förklaring.)

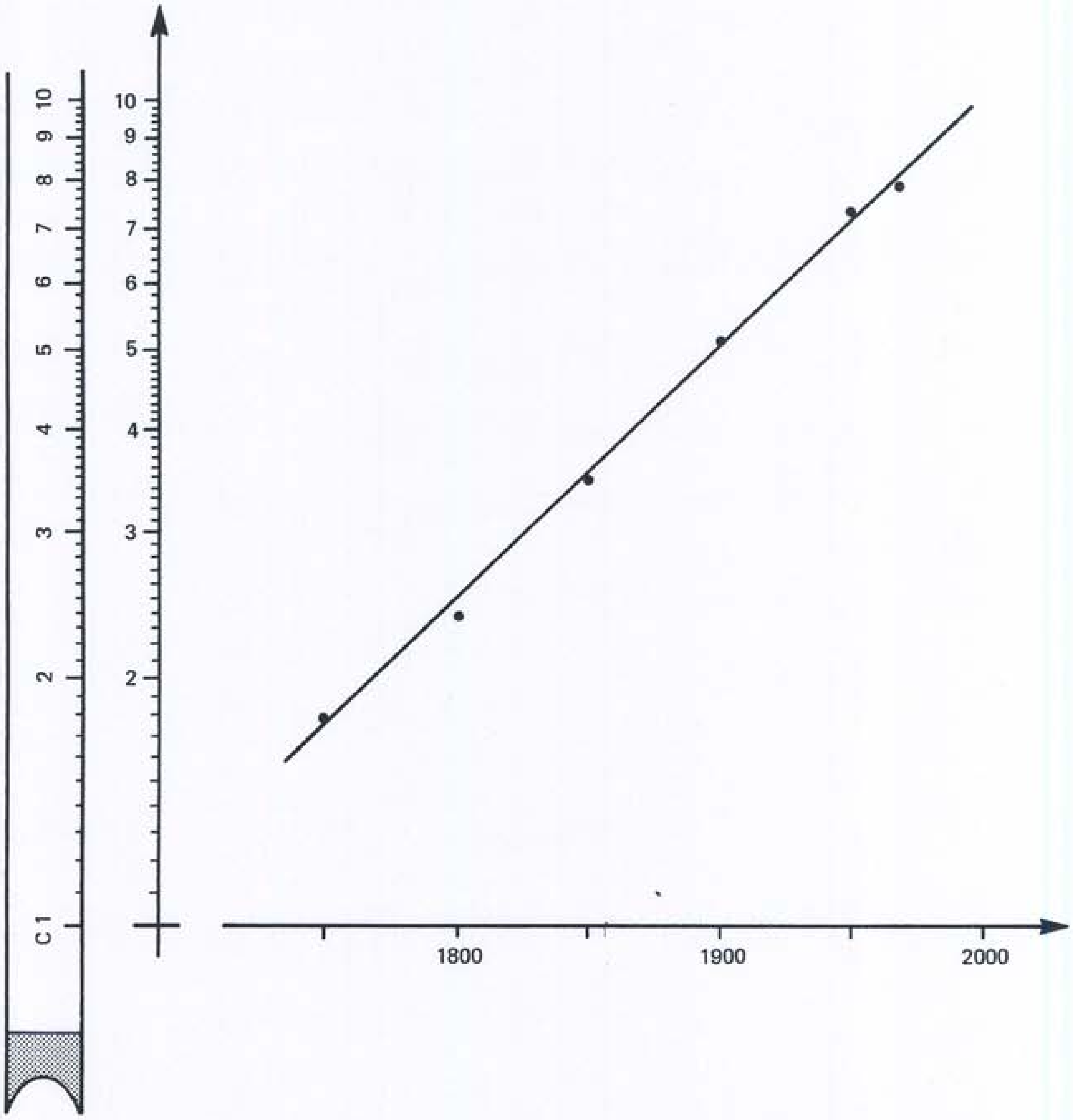


Bild 27

Ex 21. I ovanstående koordinatsystem prickar vi in punkterna givna i tabell 2 s. 31. Det är tydligen så, att det går att anpassa en rät linje ganska väl till punkterna. Se bild 27.

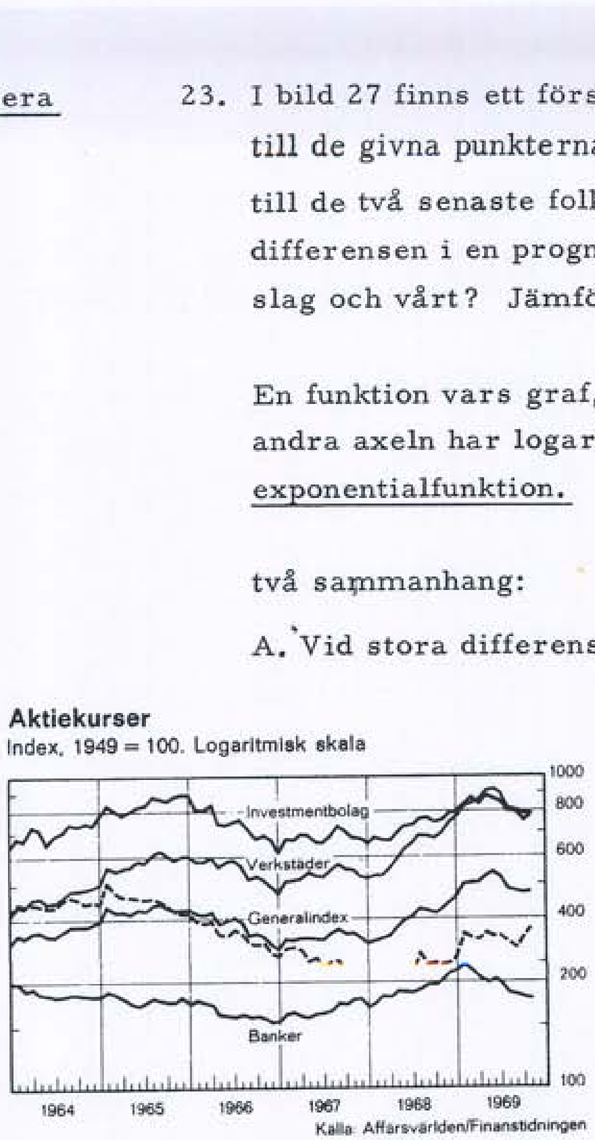
Att diskutera

23. I bild 27 finns ett förslag till anpassning av en rät linje till de givna punkterna. Diskutera andra möjligheter att till de två senaste folkmängdsangivelserna.) Hur stor blir differensen i en prognos för folkmängden år 2000 av ditt förslag och vårt? Jämför även Ex 18, bild 23.

En funktion vars graf, i ett rätvinkligt koordinatsystem där andra axeln har logaritmisk skala, är en rät linje kallas en exponentialfunktion.

två sammanhang:

A. Vid stora differenser i funktionsvärdena. Se bild 28 och



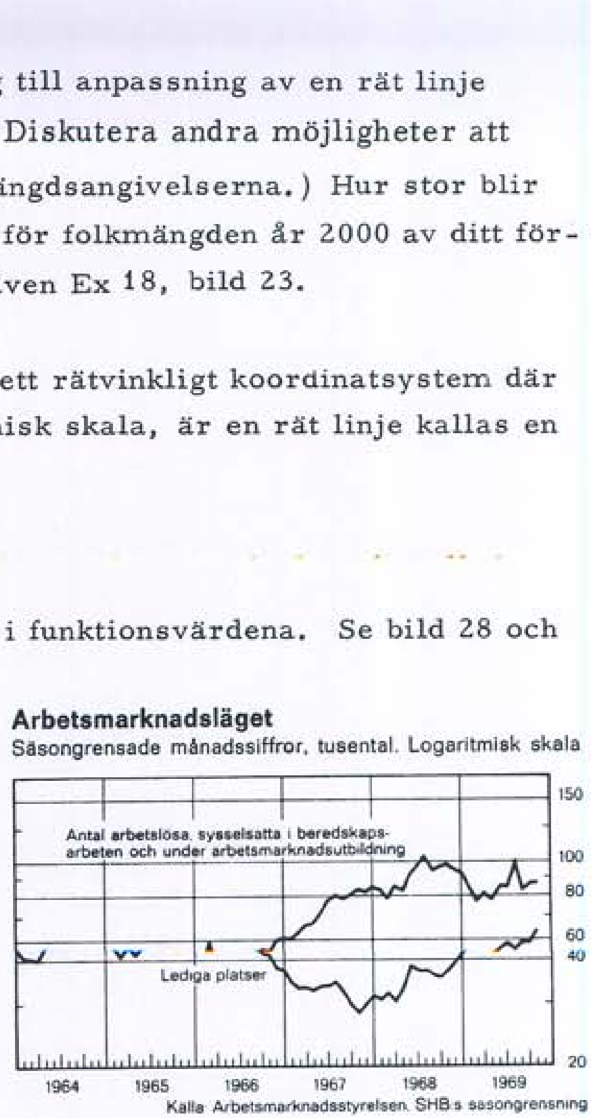


Bild 28.

Bild 29.

Anm. Det gäller att göra noggranna avläsningar i diagram med logaritmisk skala. Bild 30 visar löner (genomsnittliga 1966. (Statistisk årsbok 1968.) I logaritmisk skala tycks kvinnornas genomsnittsinkomster närma sig männens. Men, differensen var

1956 155 öre

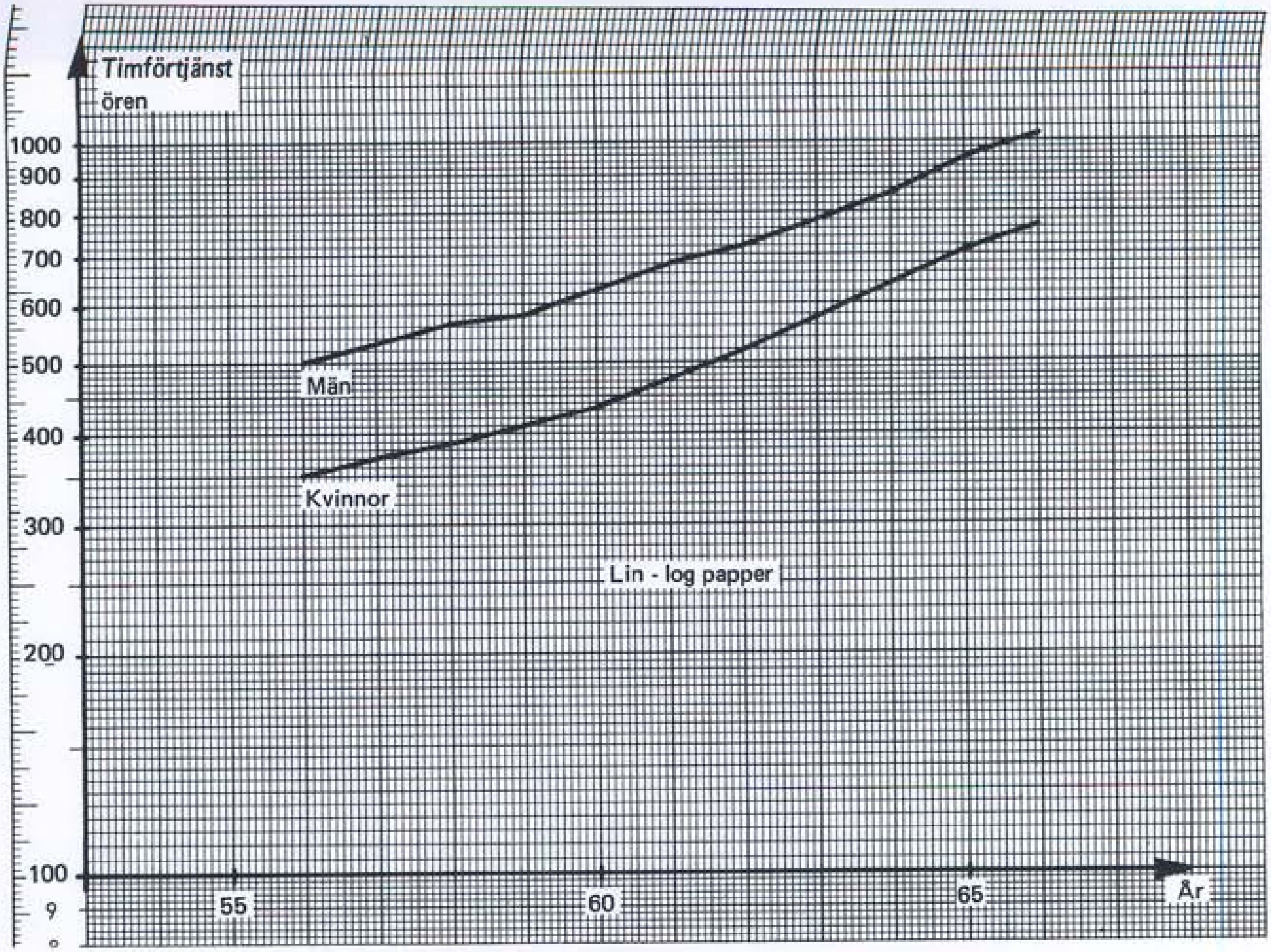


Bild 30.

B. Vid så kallad exponentiell förändring för att lättare kunna bestämma funktionsvärden. Tillämpningar inom sk är t ex folkmängdens förändringar och ekonomisk tillväxt.

Anm. Speciellt diagrampapper, s k lin-logpapper finns i handeln. En liknande typ av papper, normalfördelningspapper kan användas vid bestämning av medelvärde och standardavvikelse i samband med normalfördelningen (åk 3). Med tanke på sk, räcker det att eleverna kan använda diagram av ovanstående typ.

En exponentialfunktion är bestämd om två talpar är kända. Detta kan utnyttjas för att konstruera den grafiska bilden (på lin-log-papper) eller för att explicit bestämma funktionsuttrycket (i matematik åk 2-3).

Ex 22. Colombias folkmängd var 1 jan 1959 14,9 miljoner och 1 jan 1968 19,8 miljoner. Hur stor kan Colombias befolkning väntas bli år 2000, om man antar att folkmängden växer

a) linjärt, b) exponentiellt?

	Sk	Ma
a)	I ett rätvinkligt koordinatsystem inprickas värdeparen (1959, 14, 9) och (1968, 19, 8). En rät linje dras genom punkterna. Se bild 31.	I vänstra spalten visas hur man grafiskt kan bestämma folkmängden i de två fallen. Detta kan man göra redan i åk 1.
	Av bild 31 framgår att Colombias folkmängd under antagande om linjär tillväxt kan väntas bli cirka 37 miljoner.	Exemplets a)-del kan av duktigare elever lösas algebraiskt i åk 1-2.
		Exemplets b)-del kan lösas algebraiskt i åk 2 (Ek) och åk 3 (S).

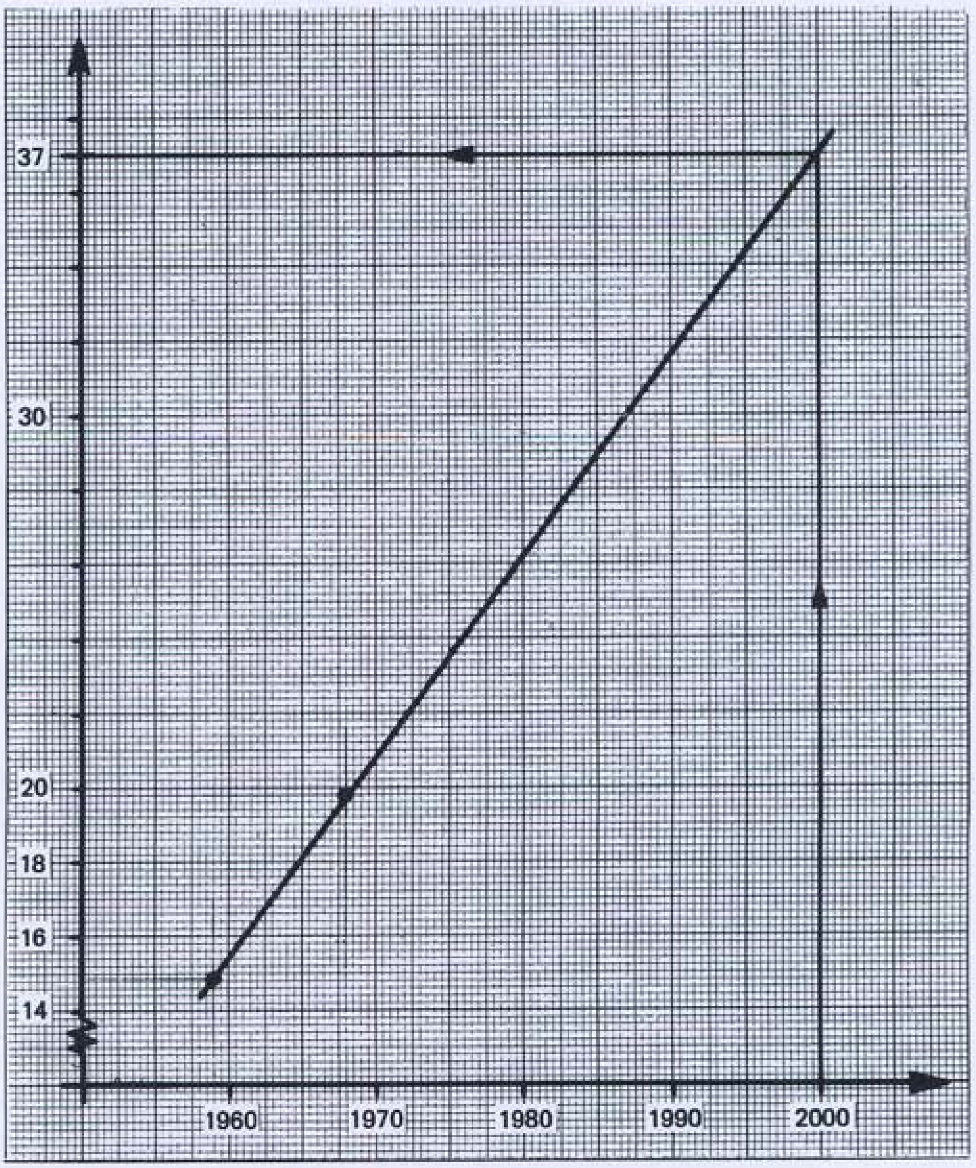


Bild 31

	Sk	Ma
b)	I ett koordinatsystem med logaritmisk skala efter andra axeln inprickas talparen (1959, 14, 9) och (1968, 19, 8). En rät linje dras genom punkterna. Se bild 32.	En logaritmisk skala (räknestickans skalor) kan introduceras med hjälp av potensbegreppet. Detta kan göras på både NT- och SE-linjerna i åk 1 och leda till en inledande behandling av exponentialfunktioner.
	Av bild 32 framgår, att Colombias folkmängd under antagande om exponentiell tillväxt kan väntas bli cirka 56 miljoner år 2000.	2^0 2^1 2^2 2^3 1 2 4 8

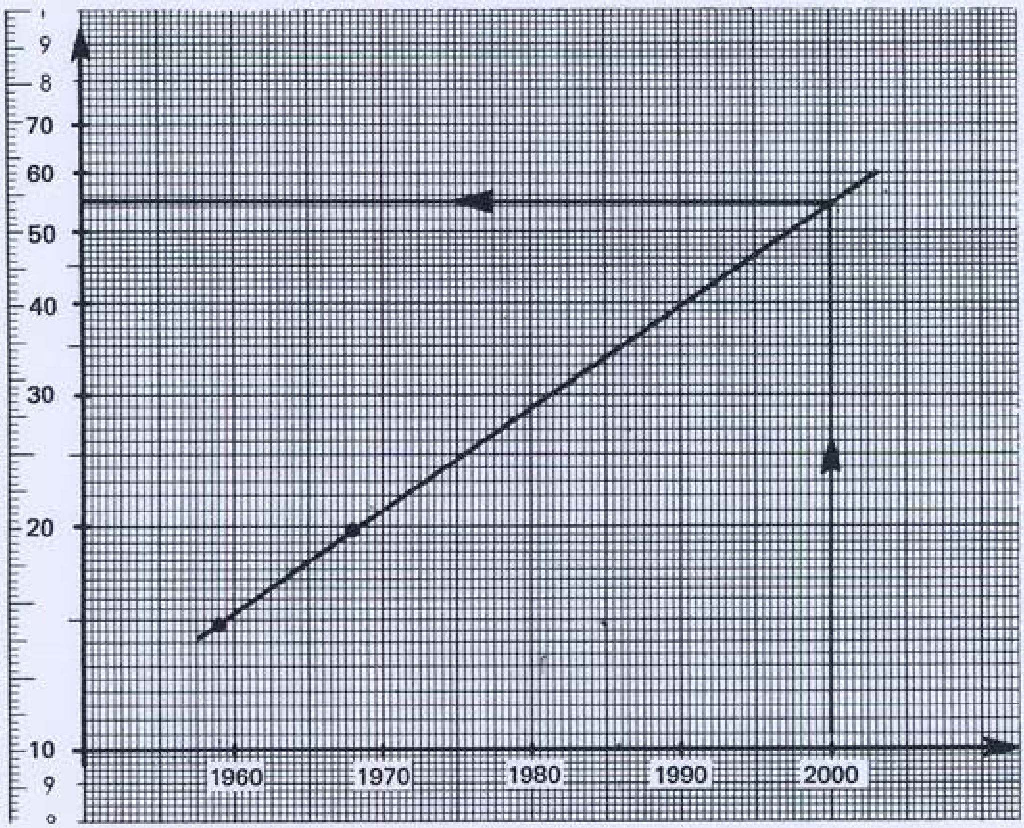


Bild 32

Att diskutera

24. I prognoserna i exemplets a)- och b)-del ovan får vi en ganska stor differens. Vilken prognos är den tillförlitligaste?

25. Pricka in konsumentprisindex som funktion av år i ett lin-log diagram. Diskutera resultatet.

26.

Sk	Ma
När och hur kommer användning av logaritmiska skalor och exponentialfunktioner in i sk?	När behandlas momenten logaritmiska skalor och exponentialfunktioner i ma? Vilka tillämpningar från sk kan tas in i matematik?

Vilken samverkan och samplanering är önskvärd? På vilka nivåer skall tillämpningsuppgifter ges i matematik för att anpassas till behoven i sk? (Grafiska lösningsmetoder i åk 1, algebraiska i åk 2 E, åk 3 S?)

Tillämpningar av ränta på ränta

Ex 23. Vi antar att ett kapital på 20 miljoner växer med ränta på ränta enligt 6 %. Med hjälp av en räknetabell får vi nedanstående tabell.

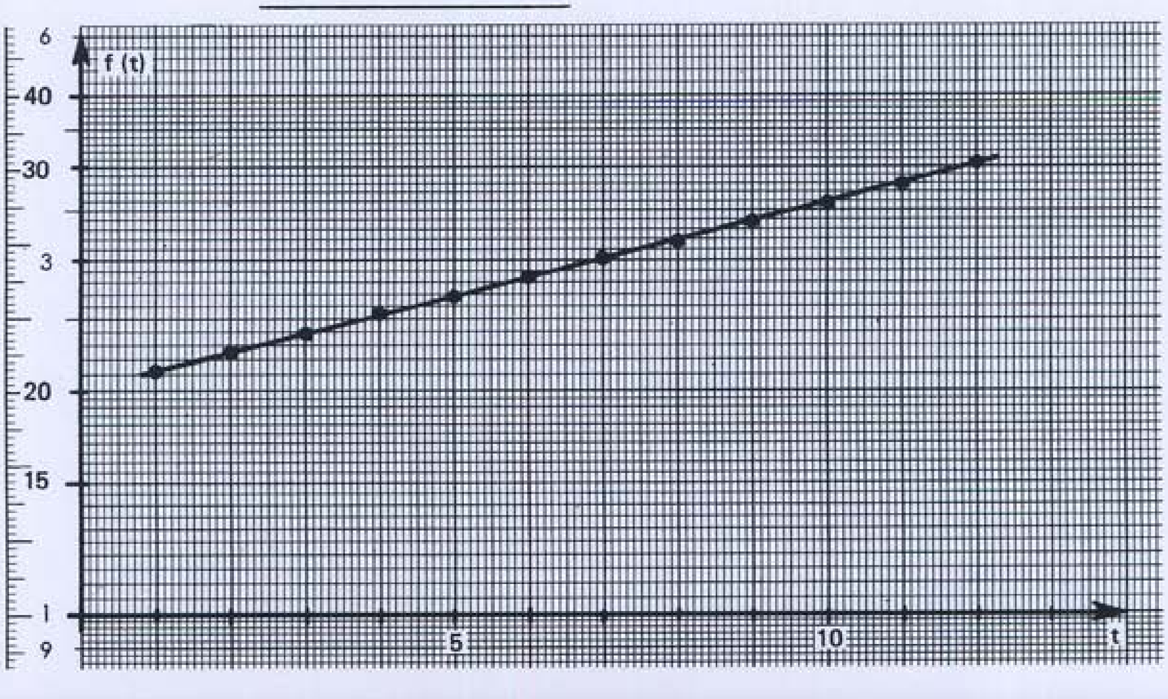
Efter t år	Kapitalet f(t) milj. kr
1	21,2
2	22,5
3	23,8
4	22,5
5	26,8
6	28,4
7	30,1
8	31,9
9	33,8
10	35,8
11	37,9
12	40,2

Vi finner alltså att efter 7 år kapitalet växt till 30,1 miljoner.

Kapitalet fördubblas (40 milj.) under det tolfte året.

Vi prickar in punkterna (t, f(t)) på lin-log papper. Se bild 33.

Bild 33



Punkterna kommer att ligga utefter en rät linje. Det är alltså så att procentuell tillväxt (ränta på ränta) motsvaras av exponentiell förändring.

Att diskutera

27. Ovanstående kan naturligtvis utnyttjas vid problem som rör befolkningstillväxt. Antag att folkmängden i ett u-land med 10 miljoner invånare 1970 växer med 4 % årligen.

a) Använd räknetabell för att få fram när folkmängden blir 15 miljoner.

b) När har folkmängden fördubblats?

Ex 24. Världens folkmängd ökar för närvarande (1970) med mellan 1,5 % och 2,5 % årligen. Bild 34 visar folkmängdsutvecklingen under antagande om exponentiell tillväxt. Den undre linjen visar ökningen vid 1,5 procents tillväxt. Den övre linjen visar ökningen vid 2,5 procents tillväxt. 1970 års folkmängd har satts till 1. Folkmängden 1990 med 1970 års folkmängd som enhet framgår av nedanstående tabeller.

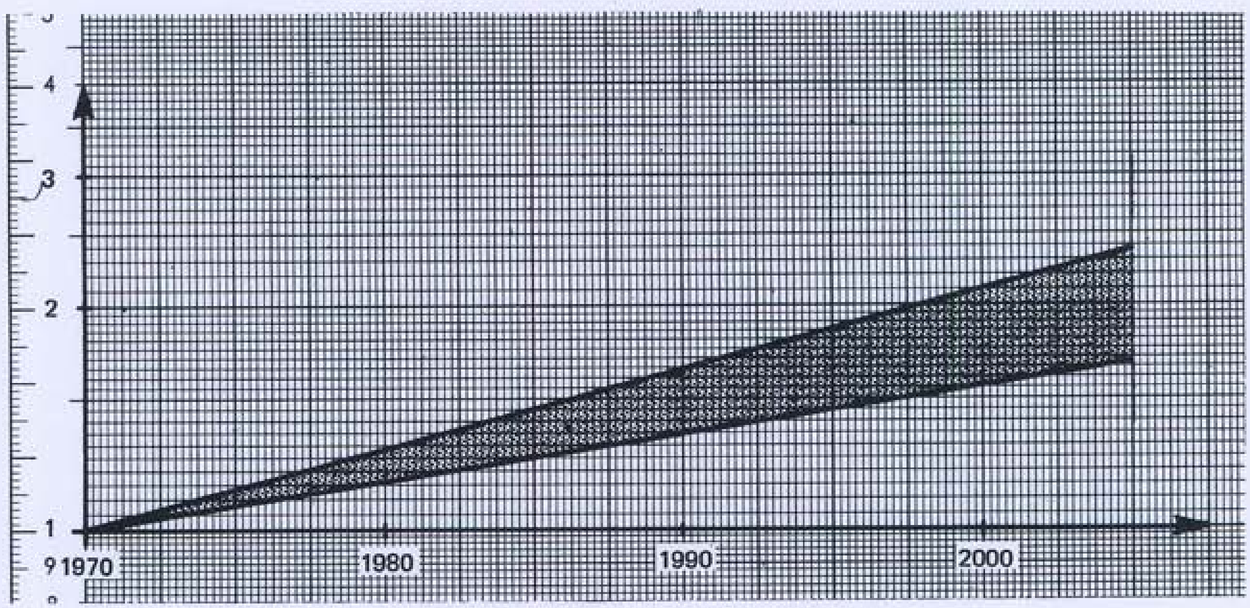
Procentuell ökning 1,5 % per år

År t	relativ folkmängd f(t)
1970	1
1990	1,35

Procentuell ökning 2,5 % per år

År t	relativ folkmängd f(t)
1970	1
1990	1,64

Bild 34



I bild 34 ser vi att differensen av folkmängden år 2000 vid en folkmängdsökning av 1, 5 % per år och den vid en folkmängdsökning av 2, 5 % per år är 0, 5 ggr folkmängden 1970. I absoluta tal:

$0,5 \cdot 3,6$ miljarder $= 1,8$ miljarder.

<u>Att diskutera</u>

28.

Sk	Ma
Inom vilka områden i sk kan "ränta på ränta" komma till användning?	Vilka typer av tillämpningsproblem från sk kan ges på ma-lektioner?
Vilken matematik svarar bäst mot behoven i sk? ("Ränta på ränta" enligt tabell eller grafisk framställning som exponentialfunktioner?)	

Vilken samverkan och samplanering är möjlig att göra? Formulera konkreta tillämpningsproblem på logaritmiska skalor, exponentialfunktioner och "ränta på ränta". (Alt: Planera för en koncentrationsdag i åk 1, där ett eller flera av ovanstående moment från ma-kursen ingår. Diskutera även om en medverkan från andra ämnen än ma och sk är önskvärd.)

Statistiska undersökningar

I både samhällskunskap och matematik behandlas och utnyttjas olika moment i <u>statistiska undersökningar</u>. Det är här viktigt att en samplanering kommer till stånd för att spara tid och nå en bättre effekt vid inlärningen av gemensamt behandlade begrepp.

<u>Att diskutera</u>

29. En <u>statistisk undersökning</u> kan kortfattat sägas bestå av
1. Insamling av materialet,
2. Bearbetning och presentation av materialet,
3. Analys av materialet. Slutsatsdragning (inferens).

En modell för samverkan inom ett avgränsat område tillhörande sk, vore här, att sk-läraren gav tips om något lämpligt material (alt. insamlade material), som sedan bearbetades och presenterades i tabeller och diagram (beskrivande statistik) på matematiklektioner. Därefter skulle materialet kunna bli föremål för tolkning och slutsatsdragning på sk-lektioner. Försök hitta något område i sk som lämpar sig för en dylik samverkan och gör en planering (ev koncentrationsdag) för genomförandet.

Hur skall materialet insamlas?

Vilka tabeller och diagram skall konstrueras?

Vilka beräkningar av läges- och spridningsmått skall utföras? (Se s.48)

Urvalsundersökningen är ofta förekommande i olika sammanhang. Den är en mycket användbar metod för att snabbt och förhållandevis billigt få svar på frågor av skilda slag. Det är dock ytterst viktigt att träna den kritiska inställningen till undersökningar av det här slaget!

Ex 25. Statens pris- och kartellnämnd gjorde under tiden 30 juni-12 augusti 1970 en undersökning av prishöjningarna på vissa matvaror. Resultatet redovisades i Dagens Nyheter den 27 augusti enligt nedanstående tabell. (Prishöjningar i ören.)

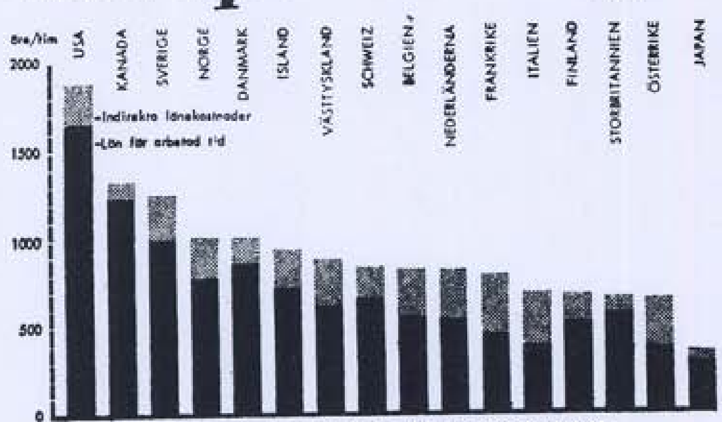
		VETE-MJÖL	HÅRT BRÖD	MJÖLK	SMÖR	MARG.	SVEC. OST	NÖT-KÖTT
Enl. jordbruksuppg.		+8	—	+9	+15	+11	+35	+31
I partihandeln		+14,5	+5,5	+9	+15	+30	+60	—
Sthlm.	Enskilda	+23,5	+8	+12	+40	+50	+90	+39
	Konsum	+22,5	+10	+12	+40	+50	+60	—
Göteb.	Enskilda	+16	+10	+12	+28	+34	+100	+91
	Konsum	+17,5	+10	+12	+26	+34	+80	+48
Umeå	Enskilda	+15	+8	+11	+20	+26	+45	—
	Konsum	+15	+10	+11	+20	+30	+50	—

DN 27/8-70

Ex 26. Den 28 augusti 1970 beslutade regeringen om prisstopp. Finansminister Gunnar Sträng sade vid en presskonferens att han räknade med att husmödrarna skulle fungera som priskontrollanter. Den 29 augusti 1970 redovisade Göteborgs-Posten en gjord enkät. Tidningen hade frågat två män och två kvinnor, om de ansåg att husmödrarna skulle "agera prisspioner". Av de tillfrågade ansåg en att husmödrarna skulle kontrollera prisstoppet (anmäla prishöjningar till polisen). Två ställde sig mera tveksamma ("Det blir nog så att man hellre talar med handlaren än polisen".). En av de tillfrågade ansåg att husmödrarna inte skulle "agera prisspioner".

Bild 35

Sverige toppar Europas löneliga



Totala lönekostnader i svensk valuta för industriarbetare i olika länder 1968.

Ex 27. Vidstående diagram är hämtat från tidningen Arbetsgivaren och visar lönekostnaderna för olika länder 1968. Den ljusare andelen av staplarna utgör de indirekta lönekostnadernas andel av den totala lönekostnaden.

<u>Att diskutera</u>

30. Vad kan man säga om genomförandet av undersökningarna i föregående exempel? Vad kan man säga om slutsatserna?

31. Diskutera begreppen <u>population</u>, <u>slumpmässigt urval</u> (stickprov), <u>slumpmässiga och systematiska fel</u> i anslutning till undersökningarna ovan.

32. Det slumpmässiga urvalet kan ske enligt olika metoder (enkelt slumpmässigt urval, clusterurval (gruppurval), stegvis urvalsförfarande, stratifierat urval). Diskutera ovanstående undersökningar med hänsyn till urvalsmetoderna.

33.

Sk	Ma
I vilka sammanhang görs, behandlas, utnyttjas urvalsundersökningar i sk?	En inledning till sannolikhetsläran ges i åk 1. Urvalsförfaranden behandlas sedan i åk 3. Skulle man kunna göra en inledande diskussion om

urvalsförfarande i anslutning till relativa frekvenser i åk 1 ?

I vilken mån kan urvalsundersökningar planeras och utföras gemensamt i sk och ma? (Gör ev ett förslag till planering av en följd av lektioner, koncentrationsdag. Obs! Specialarbete.)

Litteratur:

Jacobsen-Körner: Statistisk metodik (Studentlitteratur Lund) ca 27 kr

Vejde: Matematik på nytt/del 2 (TRU/Brevskolan)

Grafisk behandling av statistiska material

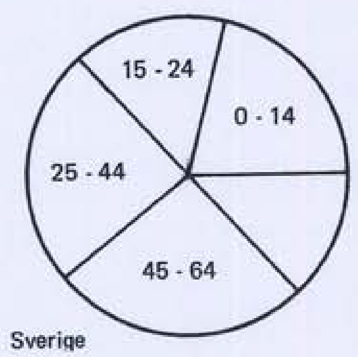
Det gäller att få eleverna att rätt avläsa och kritiskt granska olika diagramtyper.

Att diskutera

34. Granska följande diagram och ange vilka fel som begåtts och hur materialen borde åskådliggjorts (ev alternativ).

a) I tabellen nedan är angivna antal invånare i milj. inom olika åldersklasser i Sverige och Colombia 1966.

Land	0 - 14	15 - 24	25 - 44	45 - 64	65 -	totalt
Sverige	1,63	1,23	1,92	2,00	0,99	7,77
Colombia	8,16	3,18	3,84	1,78	0,52	17,48



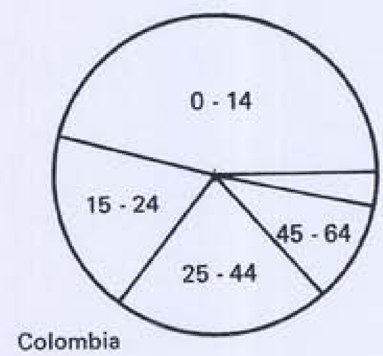


Bild 36

b) Sveriges export i miljarder kr 1959 - 1963 framgår av nedanstående tabell.

År	1959	1960	1961	1962	1963
Export	11,4	13,3	14,2	15,1	16,6

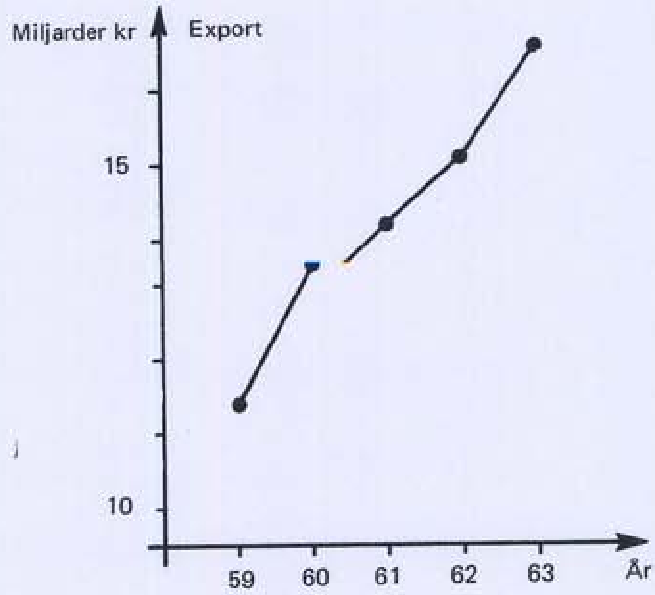


Bild 37

c) En tidnings upplageförändring 1969-1970 redovisas av tidningen på följande sätt. (Se bild 38.)

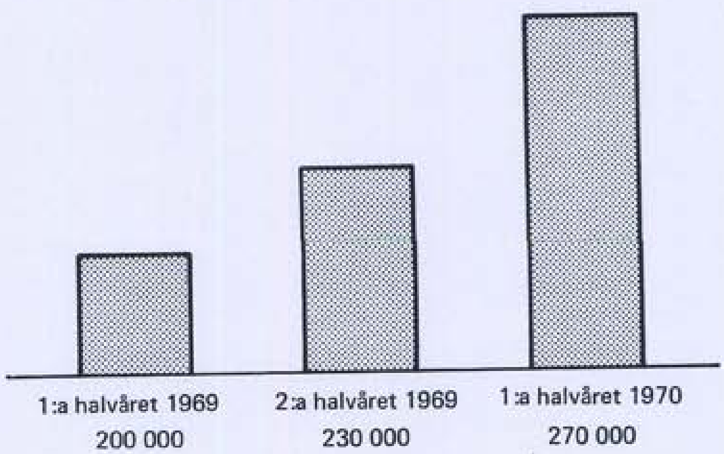


Bild 38

35. Diskutera olika synpunkter från sk och ma på konstruktion av diagram. Ge även konkreta exempel hämtade från exem- böcker? diagramtyper?

Hur skall en samplanering ma-sk av detta område se ut? (Tidplanering; vilka avsnitt bör behandlas först i ma, vilka avsnitt bör behandlas endast i ma?)

Lägesmått

Ex 28. Generalagenten och en återförsäljare av ett visst bilmärke resonerar om olika sätt att finna och vinna köpare till bilen. Efter det intryck av ekonomisk status som den presumtive köparen ger kan följande uttalanden användas:

a) "Detta är en flott vagn. De som köpt den här i sta´n har haft en genomsnittsinkomst på 60 000 kr."

b) "Det är en gedigen bil. De som köpt den har haft en genomsnittsinkomst av 25 000 kr."

c) "Det är en trevlig liten bil. De som har köpt den har haft en genomsnittsinkomst av 18 000 kr."

Att diskutera

37. Ovanstående exempel är påhittat. Men det skulle kunna ha hänt i verkligheten. Och varje uttalande skulle kunna vara sant! Försäljaren är i så fall inte bara psykolog utan också statistiker! Olika genomsnittsvärden kan ha utnyttjats.

Försök fundera ut inkomsterna för dem som köpt bilen och vilka genomsnittsvärden som använts i de olika uttalandena ovan, om de var sanna samtidigt, och sju stycken köpt bilen.

38. Diskutera användningen av olika typer av lägesmått. (Medelvärde, median, typvärde.)

39.

Sk	Ma
I vilka sammanhang har sk behov av att använda läges- och spridningsmått?	Diskutera introduktionen av läges- och spridningsmått i matematik.

Formulera ett antal konkreta exempel hämtade från sk, vilka leder till beräkning av medelvärde, median och standardavvikelse. (Observera att utnyttjandet av räknemaskiner spar tid vid dessa beräkningar.)

3 • Ekonomiska kalkyler 1. Bagarens problem

<u>Inledning</u>

I det här avsnittet kommer vi att behandla några matematiska modeller inom samhällsekonomin. Modellerna ingår i gymnasiekurserna i samhällskunskap (åk 2) och företagsekonomi. För matematikläraren ges inom detta område stora möjligheter att finna tillämpningsproblem. Det visar sig att så gott som hela gymnasiekursen i matematik kan täckas med enbart sådana problem.

Genom en samhällsekonomisk inriktning inom ämnet matematik tror vi att eleverna på de nämnda linjerna skulle få

- o större motivation, eftersom de klart kan se vad matematik kan användas till,
- o större förståelse för modellbegreppet och en fullständigare bild av flera samhällsekonomiska problem.

Innan vi övergår till det egentliga stoffet vill vi göra läsaren uppmärksam på ett par saker:

Ett av målen med materialet är att ge lärarna i det ena ämnet en orientering om vilket användbart stoff eleverna bär med sig från det andra ämnet. Detta skall i sin tur ge underlag för en samplanering mellan ämnena. Däremot vill vi starkt understryka att det inte är vår mening att t ex läraren i samhällskunskap skall ägna sig åt någon form av matematikundervisning eller vice versa.

När man gör en matematisk modell måste man först renodla problemen och ta bort en del detaljer som skymmer sikten för det väsentliga i modellen. Inom ämnet fysik antar man t ex att en bil accelererar likformigt, att snören är viktlösa osv. Givetvis måste man arbeta på detta sätt även när det gäller ekonomiska modeller. Vi anser det vara viktigt att detta klargörs även för eleverna. Om vi nu ser på vår första modell där vi behandlar "Bagarens problem", så kan man liksom i fallet med det viktlösa snöret påpeka att den här bagaren existerar inte. Men genom att välja ett tillräckligt okomplicerat problem kan vi presentera en modell som ger en i vår mening konkret bild av samhällsekonomins teoribildning. Det har också varit vår strävan att genomgående välja problemen på ett sådant sätt att matematikläraren direkt kan överföra dem till sin egen undervisning.

Liksom tidigare har vi här på flera ställen delat upp sidan i två spalter, den vänstra för samhällskunskaps- (företagsekonomi) läraren och den högra för matematikläraren. För att få största möjliga utbyte av studiematerialet bör båda kolumnerna läsas.

BAGARENS PROBLEM

Utbudsfunktionen

En bagare kalkylerar för en ny produkt, en kanelbulle, och resonerar då så här: Antag att jag kan få 20 öre/st för bullarna. I så fall tillverkar jag 400 per dag. Om jag däremot kan få 30 öre/st, så kan jag tänka mig att öka min arbetstid och tillverka 650 bullar. (Ökad förtjänst ger till en viss gräns ökad villighet att öka arbetsinsatsen.) En fullständigare kalkyl kan se ut så här:

p öre	q st
20	400
25	525
30	650
35	775

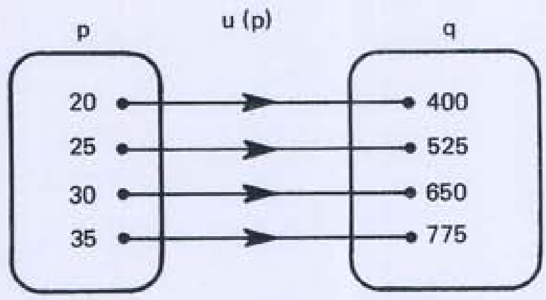


Bild 39

I höger kolumn har vi bildat en funktion $U = u(p)$ som anger kvantiteten q som en funktion av priset p.

Lägg märke till att man inom ekonomin använder variablerna p och q och inte x och y.

Ovanstående kalkyl ger ett exempel på den s k utbudsfunktionen. Utbudsfunktionen som brukar tecknas $U = u(p)$ anger den utbjudna kvantiteten q som en funktion av priset p.

Exempel på matematiska problem

Hur stor är den utbjudna kvantiteten vid priserna 20 öre och 30 öre?

Bestäm $u(20)$ och $u(30)$.

Vad är priset vid utbudet 525 enheter?

Bestäm p så att $u(p) = 525$.

För vilka priser är kalkylen gjord och mot vilka utbud svarar dessa priser?

Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen U.

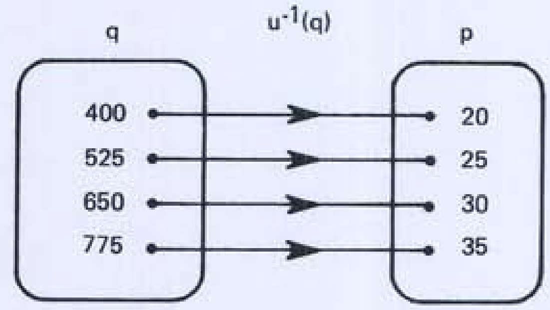
Utbudsfunktionens graf

Vi har ovan betraktat den utbjudna kvantitetens beroende av priset. Men vi kunde lika gärna ha betraktat prisets beroende av den utbjudna kvantiteten.

Inom matematiken ser man detta som en ny funktion, den s k inversa funktionen. Man skiljer alltså mellan funktionen $U = u(p)$ som ger den utbjudna kvantitetens beroende av priset och den inversa (omvända) funktionen $U^{-1} = u^{-1}(q)$ som anger prisets beroende av den utbjudna kvantiteten. Jämför f ö vidstående diagram med det tidigare.

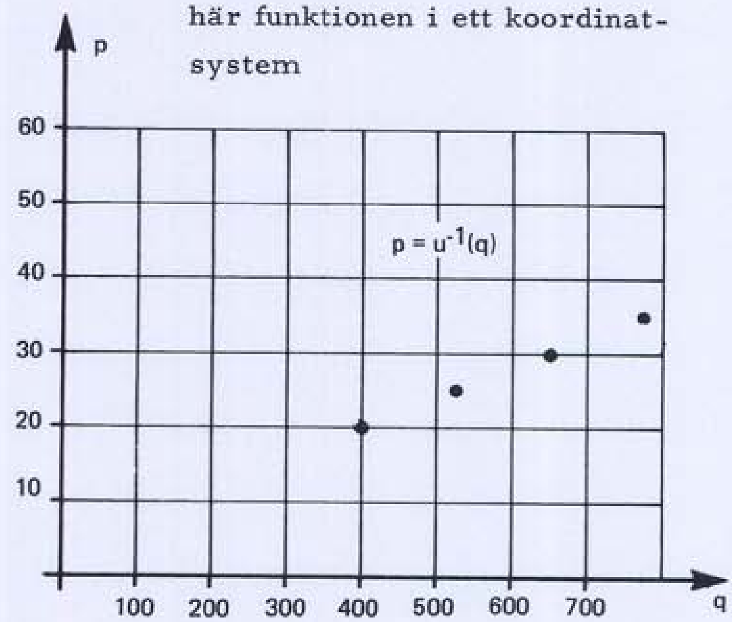
Bild 40

Vi hade i så fall fått den inversa funktionen till u(p).



I höger kolumn ritas nu grafen till den inversa funktionen U^{-1}. Denna graf är i och för sig ointressant inom ekonometrin, men leder till en matematisk inkonsekvens som vållar stort problem för eleven. Vi går in på detta problem nedan.

Låt oss nu rita grafen till den här funktionen i ett koordinatsystem



När man inom ekonometrin ritar en graf, så väljer man konsekvent q-axeln till första-axel och p-axeln som andra-axel, oberoende av om det är p eller q som är den oberoende variabeln. Detta strider helt mot matematiska konventioner. För att lösa detta dilemma ritar ekonomen grafen till u^{-1} när han vill åskådliggöra utbudsfunktionen u. Utbudsfunktionen ritas alltså så här

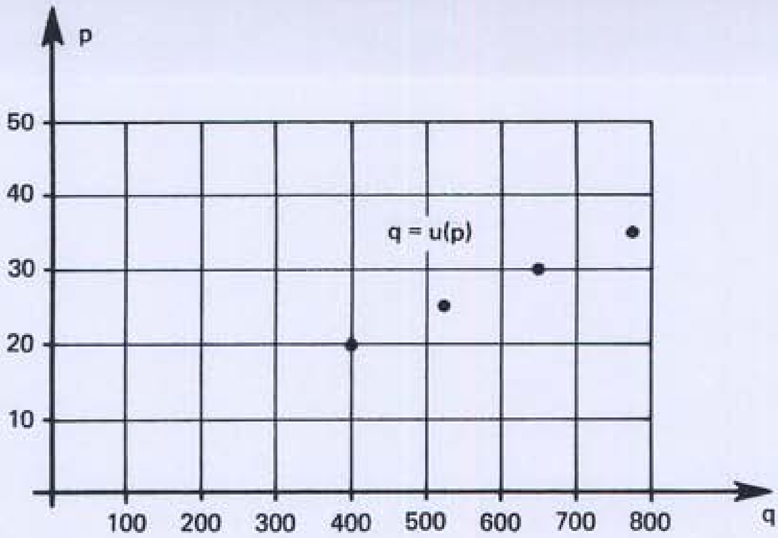


Bild 42

Observera att denna konvention har vållat stora problem för våra elever. Brister i samverkan mellan ämnena inom detta område har lett till att onödiga svårigheter uppstått vid centrala prov (och motsvarande) inom såväl matematik som ekonomi.

Exempel på matematiska problem

Problemen i höger kolumn gäller snarast det interna arbetet inom ämnet matematik. Genom att läraren i samhällskunskap (företagsekonomi) hjälper till att formulera problem och korrigera ev felaktigt använda termer, så kan avsevärd tid sparas.

Ett elegant sätt att dra fördel av den beskrivna situationen är följande. Vid introduktion av begreppet invers funktion väljs just utbudsfunktionen som ett konkret och för eleven bekant exempel. Avslutningsvis diskuterar man sedan de olika konventionerna för att göra eleven uppmärksam på problemet.

Vid övningar inom mängdläran och vid färdighetsträning efter definitionen av begreppet funktion kan följande typer av problem ges:

Ange $p \curvearrowright u(p)$ i listform.
Åskådliggör $p \curvearrowright u(p)$ i ett mängddiagram.
Rita grafen till $p \curvearrowright u(p)$.

Linjär anpassning

Den matematiska modell vi hittills presenterat för bagarens kalkyler är ännu inte fullständig. Priset på bullarna kan ju även sättas till 27 eller 32 öre. En uppskattning av utbudet vid dessa priser kan vi få genom att de kända punkterna förenas genom anpassning av en lämplig kurva. I det här fallet då punkterna ligger i rät linje, kan vi anta att den fullständiga utbudsfunktionen är linjär (grafen är en rät linje). Vi får nu följande graf.

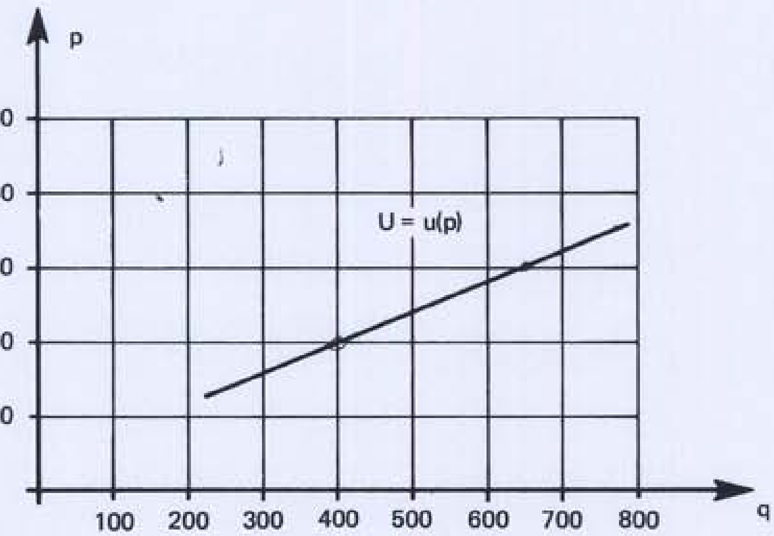


Bild 43

I och med denna generalisering av utbudsfunktionen uppstår ett flertal problem som rör samtliga inblandade ämnen. Först och främst, hur långt skall den räta linjen i figuren dras ut i ändarna? Genom att förlänga linjen åt vänster finner vi att priset är 4 öre om man framställer 0 bullar. I praktiken är bagaren knappast villig att bjuda ut några bullar till ett pris under 15 öre om vi förutsätter att detta är tillverkningskostnaden. På liknande sätt kan linjens förlängning åt höger begränsas av att bagaren på en dag inte ensam kan tillverka mer än 1000 bullar.

Ovanstående resonemang ger en naturlig begränsning av den matematiska modellens giltighet.

Matematikläraren har här ett tillfälle att med ett konkret problem exemplifiera vikten av att definitionsmängden till en funktion alltid måste anges.

Det andra problemet som dyker upp påminner om det första. Även om vi begränsar den räta linjen i figuren på ett lämpligt sätt, så får vi med en mängd punkter som inte kan tillhöra funktionen. Hur stort utbud får man vid priset 27, 5142 öre? Trots att vi endast kan acceptera heltalsvärden på priset, så ritar vi grafen som en sammanhängande rät linje (funktionen är kontinuerlig).

Man gör sig här skyldig till en typ av fel, som man inom andra områden inom matematiken brukar bortse ifrån.

Detta kan utnyttjas som underlag för en diskussion om grafritning och modeller. Eleverna måste ju möta just detta problem förr eller senare. T ex vid grafisk lösning av ekvationssystem i två variabler.

Det här problemet verkade ju vara mera bagatellartat än det tidigare, men vi skall ändå stanna vid det en stund till. Vad hade hänt om utbudsfunktionen inte varit linjär utan haft ett minimum. En ekonom hade i så fall bestämt detta minimum genom att pröva kanske ett tjugotal värden (som tillhör definitionsmängden). Skulle en matematiklärare som fått samma problem givet som en modell (i funktionsform) godkänt denna lösning (utan att derivata, teckenschema och hela den formella apparaten redovisats)? Även i denna fråga drabbas våra elever av brister i samarbetet mellan ämnena, t ex i samband med prov.

Totalintäktsfunktionen

När bagaren gör sina kalkyler är han kanske inte lika intresserad av bullarnas styckepris som av de totala intäkterna (den summa pengar han får in genom att sälja en given mängd bullar till ett givet styckepris). Totalintäktsfunktionen TR (Total Revenue) är ett exempel på en funktion av två variabler. Intäkten beror ju av såväl pris som kvantitet enligt formeln $TR = p \cdot q$. Funktionssambandet blir i tabellform följande

p	q	$TR = p \cdot q$
20	400	8 000
25	525	13 125
30	650	19 500
35	775	27 125

I samband med att vi nu infört totalintäktsfunktionen, vill vi visa en metod att grafiskt representera funktionen. Metoden är vanlig i ekonomiska sammanhang. I bilden visar vi totalintäktens storlek vid priset 30 öre/st.

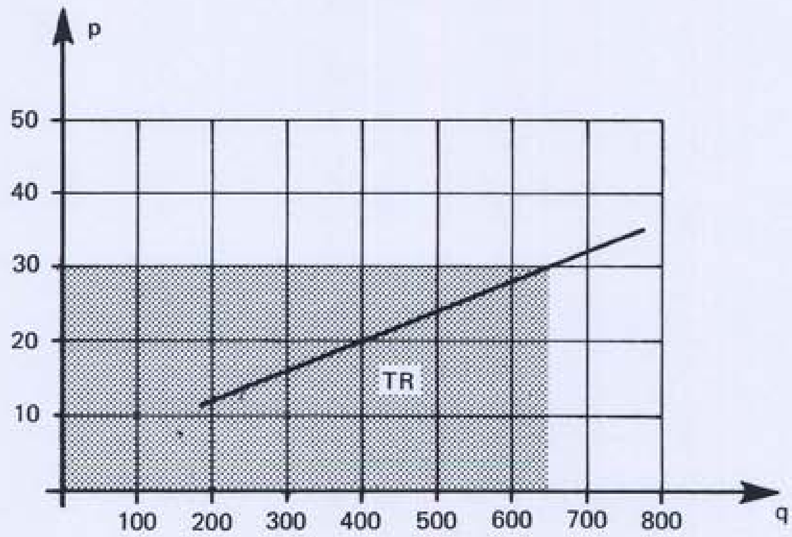


Bild 44

Exempel på matematiska problem

Bestäm med hjälp av bild 44 totalintäkten då priset är 27 öre och kvantiteten 575 st.

Bestäm definitionsmängd och värdemängd till den ovan angivna funktionen TR = t(p, q).

Bestäm med hjälp av bild 44 t(27, 575).

Bestäm den totalintäkt som svarar mot styckepriset 25 öre.

Ange totalintäkten som en funktion av priset p dvs TR = f(p).

Utbudsfunktionen och den räta linjens ekvation

Innan vi fortsätter i texten vill vi påpeka att flera andra funktioner ger en bättre bild av utbudsfunktionen än den linjära. Vi kommer att återvända till detta problem senare. När man behandlar vissa moment ger emellertid den räta linjen den enklaste och överskådligaste modellen.

När man i matematikkursen kommer till avsnitt som ekvationer och linjära funktioner, så kan man ge en ny bild av utbudsfunktionen. Utgående från de tidigare angivna värdena, kan ekvationen för den utbudsfunktion vi hela tiden har arbetat med tecknas $0,04q - p + 4 = 0$ eller $p = 0,04q + 4$. Genom ekonomiska manipulationer kan vi nu låta eleverna studera koefficienternas inverkan på ekvationen. Vi ger två exempel på detta.

Antag att bagarens råvarupris stiger med 5 öre per bulle. Hur kommer detta att påverka utbudsfunktionens ekvation? Om vi förutsätter att bagaren vill ha samma vinstmarginal per bulle som tidigare, så kommer priset vid varje utbud att höjas med 5 öre.

Utbudsfunktionens graf kommer nu att förskjutas uppåt 5 enheter.

Den nya utbudsfunktionen kommer därför att få ekvationen $p = 0,04q + 9$. I vänster kolumn har vi visat hur grafen påverkas av prishöjningen på råvaran.

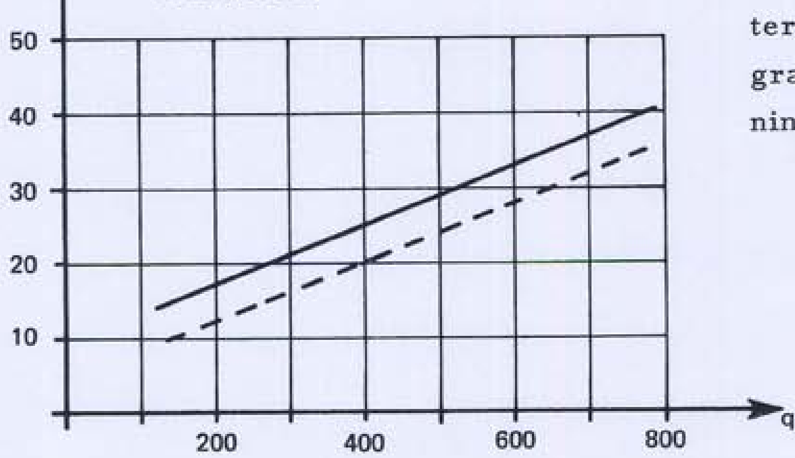


Bild 45

Antag nu att bagaren drabbas av en 20-procentig mervärdesskatt. För att behålla sin vinstmarginal per bulle, måste han i så fall höja styckepriset med 25 %. (Observera här skillnaden mellan marginal och pålägg. En enkronas dricka kostar med 10 % mervärdesskatt 1,11 kr.) Mervärdesskatten inverkar på följande sätt på utbudsfunktionen

Varje tidigare pris höjs med 25 % vilket ger grafen

Priset som tidigare var $0,04q + 4$ blir nu $1,25(0,04q + 4)$. Den nya ekvationen blir alltså $p = 0,05q + 5$. Studera även vidstående graf.

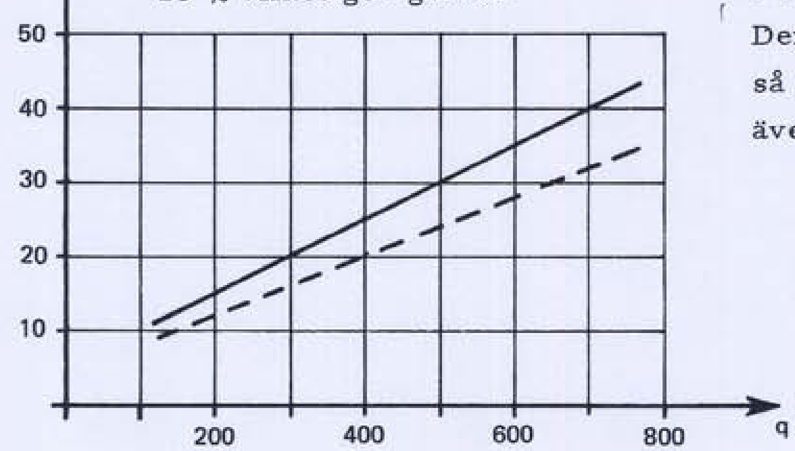


Bild 46

Exempel på matematiska problem

I hela högerkolumnen formuleras problem, som ger meningsfulla tillämpningar i

Bestäm utbudet av bullar vid priset 25 öre/st dels före och dels efter ämnet matematik. Läraren i samhällskunskap (företagsekonomi) kan här hjälpa matematikläraren att finna lämpliga och användbara exempel.

a) höjningen av råvarupriset
b) tillkomsten av 20 % mervärdesskatt.

Ange med ledning av följande uppgifter den linjära ekvation som kan anpassas till utbudsfunktionen för djupfrysta räkor samt rita motsvarande graf. Vid priset 10 kr/kg utbjuds 23 lådor och vid priset 13 kr/kg 35 lådor per dag.

På grund av hård konkurrens (t ex från Kanada) måste priset sänkas med 3 kr/kg oberoende av utbudet. Bestäm den nya utbudsfunktionen för räkor.

Efterfrågefunktionen

Det är givetvis inte bagaren ensam som bestämmer vilket pris bullarna skall ha eller hur stor kvantitet som går att sälja. Det "riktiga" priset på kanelbullen bestäms lika mycket av kundens efterfrågan (villighet att till ett visst pris köpa en viss kvantitet bullar). Låt oss med ett exempel visa den matematiska modell som reglerar en varas pris.

Antag att bagaren till en början tillverkade 400 bullar och sålde dessa för 20 öre/st. Han märkte då att mot detta pris svarade en efterfrågan hos kunderna på 1000 bullar. Han höjer därför så småningom priset till 30 öre/st och tillverkar enligt sin utbudsmodell 650 bullar per dag. Nu sjunker emellertid efterfrågan. För ett pris på 30 öre/st vill kunderna bara köpa 500 bullar per dag. Vilket pris är nu lämpligt och hur många bullar skall bagaren tillverka per dag?

För att kunna svara på denna fråga måste vi studera efterfrågefunktionen, den funktion som beskriver kundernas efterfrågan av varan som en funktion av varans pris. Antag att efterfrågefunktionen är linjär (grafen består av en rät linje). Med hjälp av de två givna värdena ovan,

för $p = 20$ var efterfrågan $q = 1000$ och
för $p = 30$ var efterfrågan $q = 500$,

kan efterfrågefunktionen helt bestämmas.

Vi behöver ju bara rita in de givna punkterna i ett koordinatsystem och förbinda dem med en rät linje. Se bild 47.

Vi finner därvid att efterfrågefunktionen $E = e(p)$ svarar mot ekvationen $p = -0,02q + 40$. Motsvarande graf finns tillsammans med utbudsfunktionens graf i bild 47.

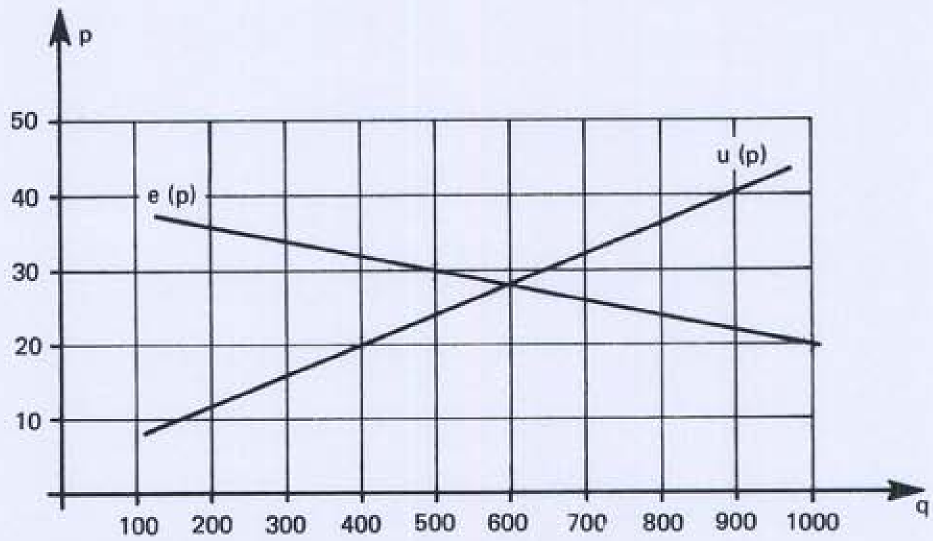


Bild 47

I bild 47 kan vi följa köparens svar på varje åtgärd från bagarens sida. Om t ex bagaren sänker priset till 25 öre och tillverkar 525 bullar, så svarar kunden med att efterfråga 750 bullar till detta pris. Först vid priset 28 öre per bulle är såväl säljare som köpare överens om samma kvantitet, 600 bullar per dag. Man har nu funnit det s k jämviktspriset.

<u>Exempel på matematiska problem</u>

Förutom den grafiska metoden att bestämma jämviktspriset finns det en algebraisk. Man löser därvid ett s k ekvationssystem.

Bestäm jämviktspriset genom att grafiskt lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} p = 0,04q + 4 \\ p = -0,02q + 40 \end{cases}$$

För vilka värden på p är utbudet större än efterfrågan?

Hur många bullar får bagaren över om han bakar 750 bullar (och sätter priset till 34 öre/st)?

Bestäm jämviktspriset efter ovan nämnda råvaruprishöjning, 5 öre per bulle, resp efter den 20-procentiga mervärdesskattens tillkomst.

Även här kan läraren i samhällskunskap (företagsekonomi) hjälpa matematikläraren med att finna exempel på hur efterfrågan påverkas av substitut, löneförhöjningar, prisstopp m m.

En konkurrerande bagare höjer kvalitén på sina wienerbröd. Effekten blir att efterfrågan på bullar sjunker med 200 bullar per dag (oberoende av bullarnas pris). Bestäm den nya efterfrågefunktionen och det nya jämviktspriset.

Vi har tidigare nämnt att en del andra funktioner ofta är mera lämpade att representera utbudsfunktionen och efterfrågefunktionen än den linjära. Exempel på sådana funktioner är (restriktioner till) polynomfunktioner, brutna rationella funktioner och exponentialfunktioner. Det är därvid viktigt att komma ihåg att båda funktionerna bör vara konvexa, U = u(p) växande och E = e(p) avtagande. Se bild 48.

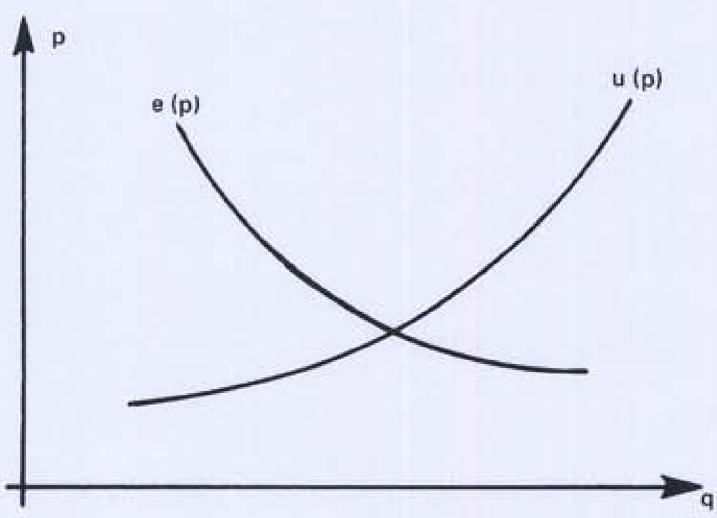


Bild 48

På grund av denna frihet vid val av lämpliga funktioner, så behöver matematikläraren inte binda sig till matematikstoffet från årskurs 1, när han inom detta område samverkar med samhällskunskap (företagsekonomi). Däremot vill vi föreslå att denna kontakt inleds så tidigt som möjligt.

Planeringsfrågor

När i samhällskunskapskursen (företagsekonomin) kommer ovan nämnda moment in?

När i matematikkursen kommer ovan nämnda moment in?

Diskutera gärna redan nu vilka former en samverkan kan ta, samt gör en skiss till en tidsplanering.

Efterfrågeelasticitet

Hittills har kanske matematikläraren tyckt att utbuds- och efterfrågefunktionerna endast ger underlag för relativt elementära matematiska operationer. Genom att införa begreppet elasticitet kommer vi att få behov av bl a derivata.

När man talar om elasticitet i samband med efterfrågan, så är man ute efter ett mått på efterfrågans priskänslighet. Man vill ha reda på hur en liten förändring i priset påverkar den efterfrågade volymen och (som vi senare kommer att se) totalintäkten.

I läroböcker i samhällskunskap och ekonomi definieras efterfrågeelasticitet på ett av följande sätt:

a) $\dfrac{\text{procentuell förändr. av efterfrågan}}{\text{procentuell förändr. av priset}}$

b) $\dfrac{\text{relativ förändring av efterfrågan}}{\text{relativ förändring av priset.}} =$

$= \dfrac{dE}{E} \,/\, \dfrac{dp}{p}$.

Av dessa två definitioner är det den senare som passar bäst med tanke på såväl den

Den matematiska definitionen av efterfrågeelasticiteten Ee ser ut på följande sätt (jfr b i vänster kolumn).

$$Ee\ (p) = \lim_{\Delta p \to 0} \left(\frac{-\Delta E/E}{\Delta p/p}\right),$$ där

p är priset och E = e(p) är efterfrågan.

Man inser genast att detta kan uttryckas enklare med hjälp av derivata:

$$Ee(p) = -e'(p) \cdot \frac{p}{e(p)} \,.$$

Lägg märke till minustecknet, som gör elasticiteten positiv.

matematiska modellen som matematikundervisningen. I allmänhet vill man att elasticiteten skall uttryckas med ett positivt tal. I så fall väljer man (och det kommer vi att göra i fortsättningen) att sätta ett minustecken framför de båda uttrycken ovan.

Låt oss nu studera priselasticiteten för efterfrågan på kanelbullar. För säkerhets skull tecknar vi efterfrågefunktionen:

$$E = e(p) = 2000 - 50p, \quad 0 < p < 40$$

Med hjälp av ovanstående definitioner och "manuellt" arbete är det relativt tidsödande att bestämma när efterfrågeelasticiteten är 1 resp att söka elasticiteten vid ett bestämt pris. Med hjälp av den matematiska metod, som beskrivs i höger kolumn och som eleverna skall behärska efter en tid i åk 2, så är dessa beräkningar enkla att utföra. Beräkningsarbetet kan utföras på matematiklektionerna, om man väljer rätt tidpunkt.

Vi konstaterar att $e'(p) = -50$ vilket ger $Ee(p) = \frac{p}{40-p}$.

Genom att lösa två olikheter och en ekvation finner man

$Ee(p) < 1$ för $p < 20$
$Ee(p) = 1$ för $p = 20$
$Ee(p) > 1$ för $p > 20$

Vi inför nu de vedertagna termer som beskriver varans priskänslighet.

Är efterfrågeelasticiteten $\left\{\begin{array}{l}\text{större än 1}\\ \text{lika med 1}\\ \text{mindre än 1}\end{array}\right\}$ sägs efterfrågan vara $\left\{\begin{array}{l}\text{elastisk}\\ \text{normalelastisk}\\ \text{oelastisk}\end{array}\right\}$

För att helt förstå användningen av termerna elastisk, normalelastisk och oelastisk bör man studera hur totalintäkten beror av elasticiteten. Företagets totalintäkt TR = $t(p)$ erhålls ur efterfrågefunktionen som produkten av p och $q = e(p)$.

I höger kolumn härleds det nedan beskrivna sambandet mellan efterfrågeelasticitet och totalintäkt.

$$t(p) = p \cdot e(p)$$

Om vi nu deriverar t så får vi

$$t'(p) = p \cdot e'(p) + e(p)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$t'(p) = e(p)\,[1 - Ee(p)]$$

(enl ovan gäller ju
$p \cdot e'(p) = -e(p)Ee(p)$)

Detta ger följande samband mellan totalintäkt och efterfrågeelasticitet.

1. För p större än 20 är efterfrågan elastisk ($Ee(p) > 1$), vilket innebär att $\begin{cases} \text{om priset höjs, så minskar intäkterna} \\ \text{om priset sänks, så ökar intäkterna} \end{cases}$ $(t'(p) < 0)$

2. För p lika med 20 är efterfrågan normalelastisk ($Ee(p) = 1$), vilket innebär att intäkterna inte förändras genom en liten förändring i priset. $(t'(p) = 0)$

3. För p mindre än 20 är efterfrågan oelastisk ($Ee(p) < 1$), vilket innebär att $\begin{cases} \text{om priset höjs, så ökar intäkterna} \\ \text{om priset sänks, så minskar intäkterna} \end{cases}$ $(t'(p) > 0)$

Tips för problemkonstruktion

När man skall konstruera problem i samband med efterfrågeelasticitet, så är det ett par funktioner och några grupper av varor, som man skall lägga märke till.

Den intressantaste funktionen är kanske $e(p) = \frac{k}{p}$, där konstanten k skall vara positiv. Funktionen har den egenskapen att elasticiteten $Ee(p) = 1$ för alla värden på p. Funktionen är alltså normalelastisk för alla värden på p (> 0). (Se bild 49.)

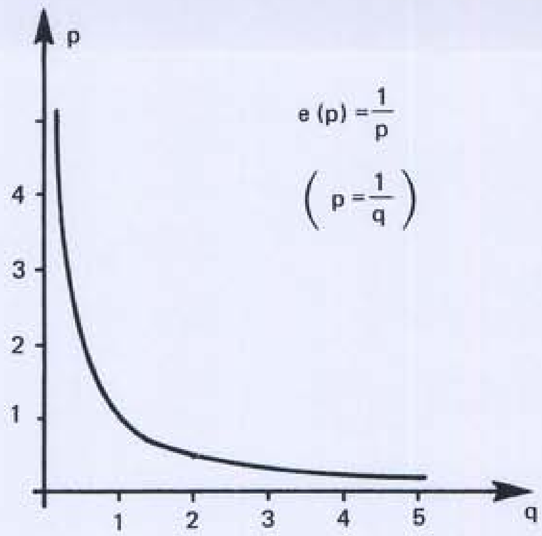


Bild 49

En annan intressant funktion är $e(p) = e^{-kp}$, där konstanten k är positiv. För denna funktion gäller att elasticiteten $Ee(p) = kp$. På olika sidor om $p = \frac{1}{k}$ är efterfrågan elastisk resp oelastisk. Grafens utseende gör vidare att den passar utmärkt till att illustrera efterfrågan för en elastisk resp oelastisk vara.

Som exempel på varor med elastisk efterfrågan brukar man nämna lyxvaror resp varor med ett närliggande substitut, sportbilar, alkohol, kosmetika, choklad resp sockerdricka, smör. Dessa varor karaktäriseras av att efterfrågan är starkt beroende av prisändringar ($Ee(p) > 1$). Grafen ser oftast ut så här (bild 50):

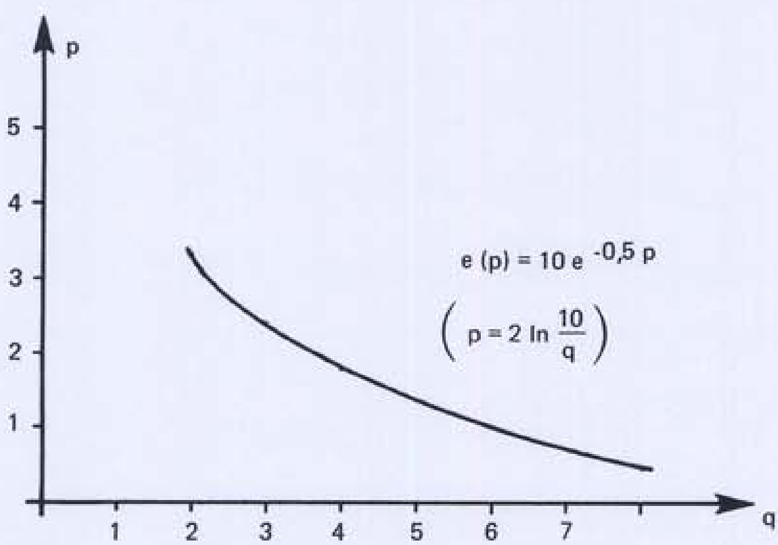


Bild 50

Som exempel på varor med oelastisk efterfrågan brukar man nämna jordbruksprodukter, såvida inte en bristsituation eller en priskontroll råder. Salt är också en utmärkt illustration. Mängden av salt som konsumeras är i det närmaste oberoende av prisförändringar.

För att belysa den sjunkande totalintäkten vid en prissänkning nämns ofta fisk. En fiskare som landar en stor fångst får ofta mindre betalt (mindre totalintäkt) då, än om han landat en mindre fångst och därvid, på grund av höjd efterfrågan, fått ett högre kilopris. Grafen till en oelastisk efterfrågefunktion brukar se ut så här (bild 51):

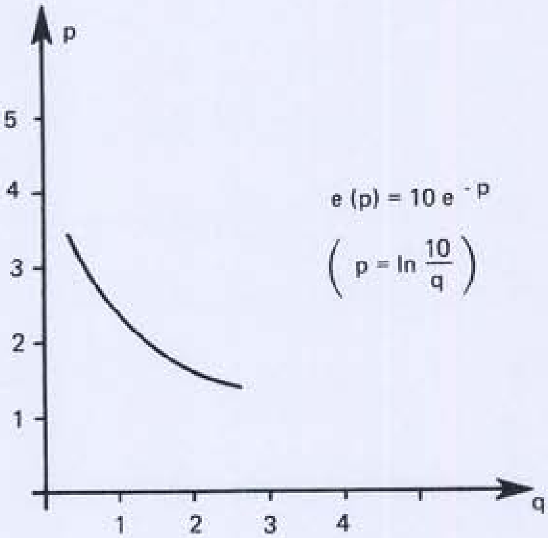


Bild 51

Exempel på matematiska problem

Bestäm Ee(p) och inom vilka intervaller följande funktioner är elastiska

a) $e(p) = a - bp$, a och b bör vara positiva rationella tal,

b) $e(p) = p^2 - 6p + 9$, $D_e = [0, 5, 3]$

Visa att funktionen $e(p) = (2p)^{-1}$ är normalelastisk.

Visa (för en given funktion) att ett maximum för totalintäktsfunktionen inträffar samtidigt med att elasticiteten är 1.

Planeringsfrågor

När i samhällskunskaps- (företagsekonomi-)kursen kommer ovan nämnda moment in?

När i matematikkursen kan ovan nämnda moment behandlas.

Gör med hjälp av samhällskunskaps-(företagsekonomi-)boken en inventering av de olika former av elasticitet som behandlas.

Tillverka flera konkreta exempel på utbuds- och efterfrågefunktioner samt formulera problem som rör avsnittet elasticitet.

Som en avslutning på det här avsnittet vill vi gärna ge några tips som vi själva haft stor nytta av.

1. Lärarna i matematik och samhällskunskap är oftast utbildade på ett sätt som försvårar ett samarbete i ovan nämnda frågor. Kom emellertid ihåg att lärarna i företagsekonomi utgör en värdefull "felande länk" som kan överbrygga svårigheterna.

2. Det finns på marknaden en hel del böcker om samhällsekonomi genom vilka läraren i matematik på ett trevligt sätt och utan förkunskaper kan få "lite kött på benen". Vi har själva haft stor behållning bl a av följande böcker:
   Havemann & Knopf, Marknadsekonomi (Rabén & Sjögren, 27 kr)
   Robert Dorfman, Priser och marknader (Aldus, 16:75 kr)
   Ingemar Gerhard, Samhällsekonomi (Akademiförlaget-Gumperts)
   Lars Andersson, Allmän företagsekonomi (Hermods).

4 • Ekonomiska kalkyler 2. Båtvarvet

Inledning

Vad som sagts som inledning till del 3 gäller i huvudsak även här. Vi vill emellertid här också ta upp ett metodiskt problem för ämnet matematik. I slutet av 60-talet uppmärksammade bl a gymnasieinspektörerna problemet med den stora lågpresterande gruppen i matematik. Man gav även förslag på hur matematikkursen kan nivågrupperas.

Lägg märke till vilka stora möjligheter följande stoff har när det gäller en sådan nivågruppering. Ett problem som t ex rör maximal vinst för ett företag, kan (vilket framgår bl a av sammanfattningen) lösas grafiskt på minst två olika sätt, med hjälp av derivata eller med hjälp av differentialkalkylens medelvärdessats. Liknande möjligheter finns även inom tidigare behandlade områden. Man kan därför inte säga att ett visst avsnitt är för lätt eller för svårt för eleven. Det gäller snarast att välja den för eleven lämpligaste nivån att arbeta på.

När vi tidigare behandlade efterfrågefunktionen, så gick vi från en mycket elementär nivå fram till en mera komplicerad nivå i samband med elasticitet. Vi kommer att i det följande arbeta på ett liknande sätt. Till att börja med kommer vi att behandla de ekonomiska kalkylerna för ett företag så gott som uteslutande med hjälp av grafiska metoder. Vi kommer därefter att visa hur dessa problem kan behandlas på en mera avancerad nivå med hjälp av begreppen derivata och integral.

BÅTVARVET 1

Kostnadsfunktionerna

Vi skall studera inkomst- och utgiftssidan i ett mindre företags kalkyler. Som exempel väljer vi att betrakta ett småbåtsvarv. För enkelhets skull kommer vi hela tiden att ange kostnader och intäkter i 1000-tal kronor.

Beskrivning av varvets kostnader:

De fasta kostnaderna TFC (Total Fixed Cost) är helt oberoende av antalet producerade enheter. De omfattar poster som hyra, viss administrativ personal etc. Vi antar att dessa kostnader är (i tusen kr)

$$TFC = 100.$$

De <u>rörliga kostnaderna</u> TVC (Total Variable Cost) är däremot beroende av antalet framställda enheter. De omfattar t ex löner till arbetare, kostnader för material och lagerkostnader. Vi antar att dessa kostnader vid produktion av q enheter är

$$TVC = 15q + q^2.$$

De <u>totala kostnaderna</u> TC (Total Cost) utgör summan av de båda nämnda kostnaderna. Vi får alltså

$$TC = 100 + 15q + q^2.$$

I ämnet matematik behandlas funktioner av denna typ mycket lägligt i början av åk 2.

I samband med avsnittet polynom kan dessa kostnadsfunktioner utnyttjas dels vid grafritning och dels för att på ett konkret sätt belysa hur konstanterna inverkar på funktionsvärdet.

Andra kostnadsfunktioner är de s k genomsnittliga kostnaderna dvs de funktioner som erhålls genom att ovanstående kostnader slås ut på antalet tillverkade enheter, q.

Vi får då följande funktioner:

Den <u>genomsnittliga fasta kostnaden</u> (Average Fixed Cost)

$$AFC = \frac{100}{q}$$

Den <u>genomsnittliga rörliga kostnaden</u> (Average Variable Cost)

$$AVC = 15 + q$$

Den <u>genomsnittliga totala kostnaden</u> eller <u>styckekostnaden</u> (Average Cost)

$$AC = \frac{100}{q} + 15 + q$$

Av ovanstående kostnader skall vi nu i första hand ägna oss åt "genomsnittskostnaden" (AC). Vi börjar med att rita dess graf.

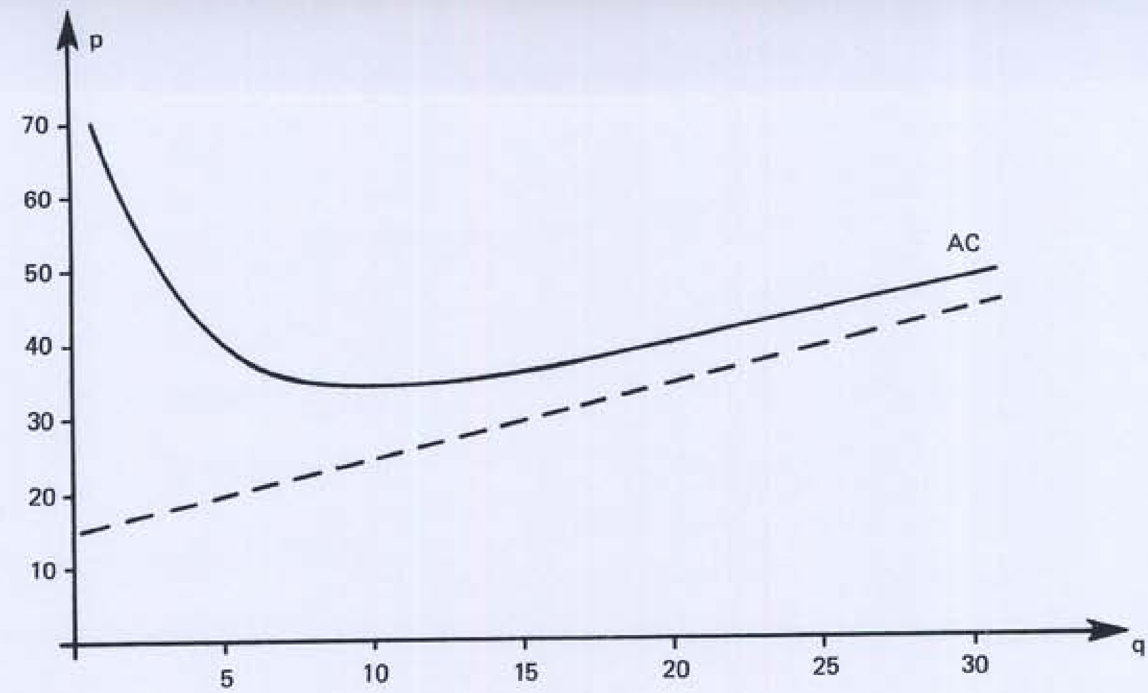


Bild 52

Observera att den streckade asymptoten i figuren är grafen till AVC-funktionen.

I grafen kan vi avläsa styckekostnaden vid produktionsvolymen q enheter (per år). Som framgår av bild 52 så har AC-funktionen ett minimum, vilket svarar mot den lägsta möjliga styckekostnaden. Man säger att detta inträffar vid optimal produktionsvolym. Vi återkommer till detta, men först skall vi jämföra styckekostnaden med en ny funktion, gränskostnaden MC (Marginal Cost), där $MC = 15 + 2q$.

Gränskostnaden anger vad det kostar att tillverka en ny enhet, nummer $q + 1$, när man redan har tillverkat q enheter.

MC-funktionen erhålls givetvis genom att man deriverar TC-funktionen.

I bild 53 har vi ritat in både AC- och MC-funktionens graf i samma koordinatsystem.

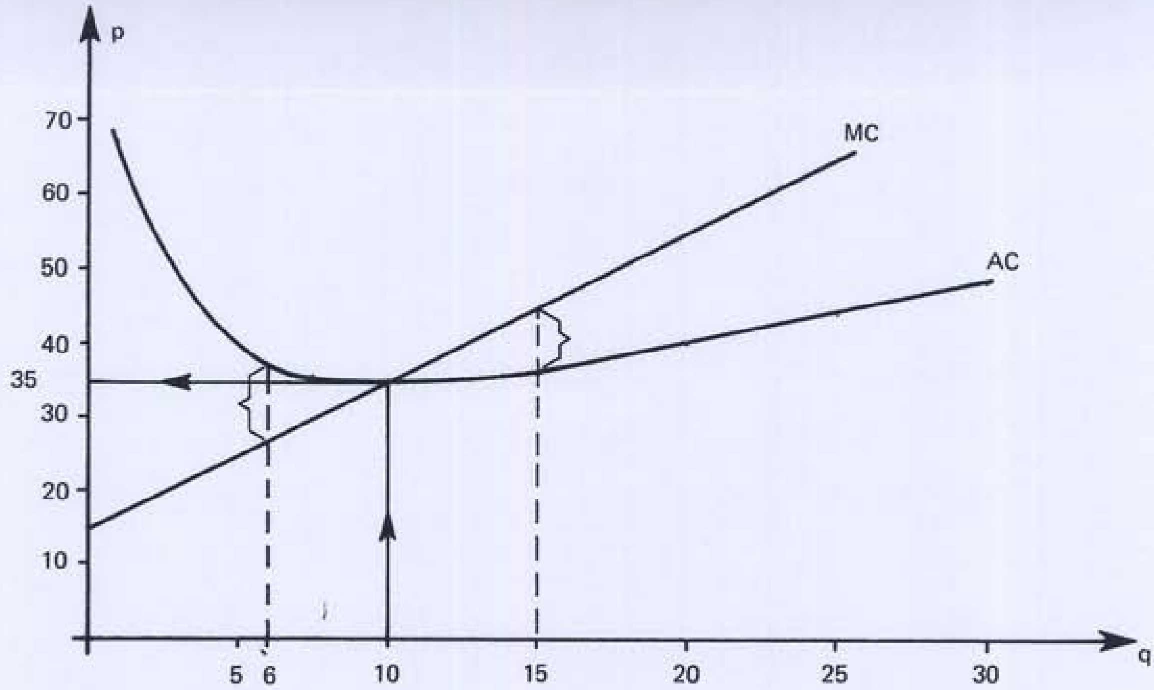


Bild 53

Vi kan här avläsa att t ex för $q = 6$ så är gränskostnaden mindre än styckekostnaden ($MC < AC$). Detta innebär att om vi producerar en 7:e enhet, så kan detta göras till ett pris som understiger genomsnittskostnaden. Detta kan även uttryckas så här: om en ny enhet produceras, så sjunker styckekostnaden.

För $q = 15$ är emellertid gränskostnaden större än styckekostnaden ($MC > AC$). Detta får till följd att om vi producerar en ny enhet, så kommer genomsnittskostnaden att stiga.

Av detta kan vi dra följande slutsats: för $q = 10$, som enligt grafen ger att gränskostnaden är lika med genomsnittskostnaden ($MC = AC$), så antar funktionen AC ett minsta värde. Om man tillverkar 10 båtar vid varvet, så blir m.a.o. tillverkningskostnaden per båt minst, nämligen 35 (tusen kr).

Inom matematiken är det inte naturligt att lösa ovan nämnda problem som vi nu gjort. Lägg emellertid märke till att om man gör det, så kan det även ske med en algebraisk metod, genom att lösa vidstående ekvationssystem.

Lägg märke till att detta är en bland ekonomer vedertagen metod att lösa ifrågavarande extremvärdesproblem. Givetvis kan vi alternativt låta eleverna lösa följande ekvationssystem om vi önskar en algebraisk lösning av problemet

$$\begin{cases} p = 15 + 2q \\ p = \dfrac{100}{q} + 15 + q \end{cases}$$

Prisbildning vid fri konkurrens

Låt oss anta att det ovan skisserade varvet producerat sin båttyp under en längre tid. Genom fri konkurrens med andra varv, har det då bildats ett fast marknadspris på båten i fråga. Detta pris är $P = 40$ (tusen kr). (Lägg märke till att i det här fallet är P inte något annat än efterfrågefunktionen $E = e(p)$.) Hur många båtar skall vårt varv i det här läget tillverka? Vi börjar en analys av problemet med att rita in grafen till $P = 40$ i bild 54.

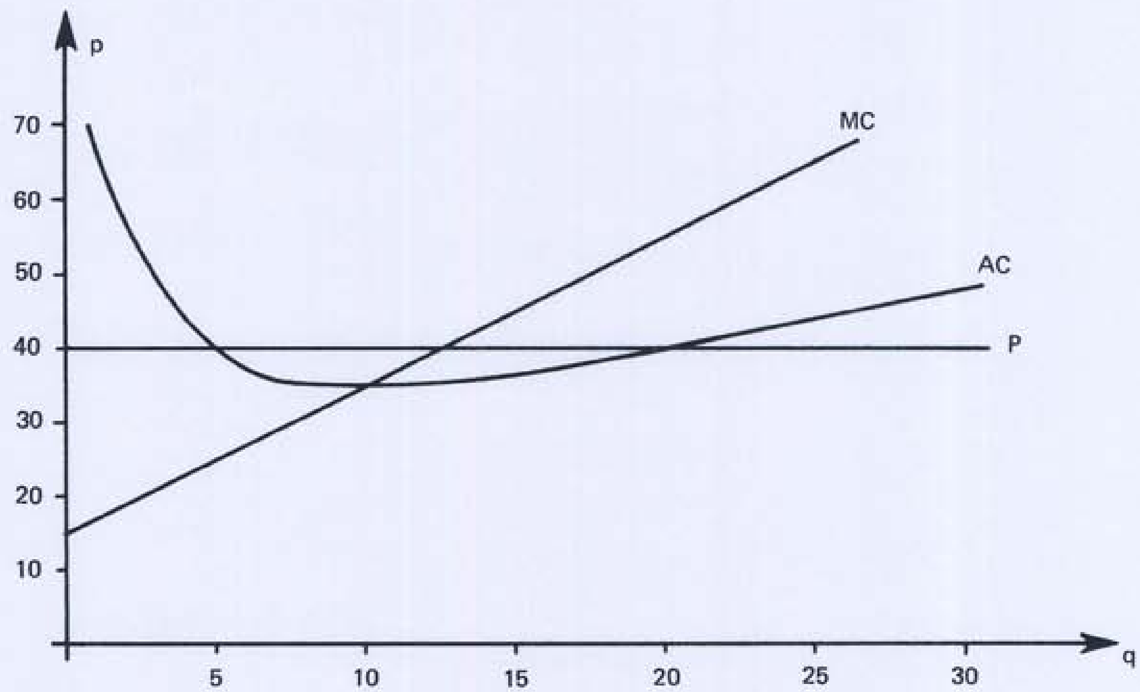


Bild 54

Till att börja med kan vi av bilden se att om man tillverkar mellan 5 och 20 båtar ($5 \leq q \leq 20$), så är priset hela tiden större än genomsnittskostnaden ($p \geq AC$). Detta innebär att inom dessa gränser går företaget med vinst. Om man däremot tillverkar mer än 20 båtar, så går man med förlust.

Om vi i stället jämför funktionerna P och MC, så finner vi att för $q = 12,5$ så gäller $P = MC$. Detta betyder att om man tillverkar mer än 13 båtar, så blir kostnaden att tillverka en ny båt (MC) större än motsvarande intäkt (P). Genom tillverkning av flera båtar sjunker alltså företagets totalintäkt. Analogt gäller att om man tillverkar mindre än 12 båtar, så är marginalkostnaden mindre än priset. Detta innebär att man genom att tillverka en ny enhet ökar totalintäkten. Slutsatsen av detta resonemang blir att maximal vinst erhålles då $P = MC$ d v s för $q = 12,5$.

Exempel på matematiska problem

Rita grafen till de olika funktionerna.

Bestäm den optimala produktionsvolymen om de fasta kostnaderna ökas till 2000 (tusen kr).

Bestäm med hjälp av grafiska metoder den maximala vinsten.

Hur mycket sjunker vinsten om varvet ökar sin produktion från 13 till 15 båtar?

Vilken är den minsta förlust varvet kan göra om marknadspriset sjunker till 30 (tusen kr)?

BÅTVARVET 2

Utbudsfunktionens beroende av MC

Den modell vi använde när vi beskrev båtvarvet 1 är givetvis mycket förenklad. Om vi t ex betraktar MC-funktionen, så brukar den inte se ut så som vi beskrivit den. I allmänhet är gränskostnaden mycket större till en början varefter den till en viss gräns avtar. $MC = 40 - 4q + 0,2q^2$ ger en mera rättvisande bild av en gränskostnadsfunktion. Låt oss utgå från denna nya funktion när vi betraktar kalkylerna för ett annat båtvarv.

Genom ett speciellt förfarande kallat integration kan matematikern direkt ange TC-funktionen om man känner MC-funktionen.

Genom att integrera MC-funktionen finner vi motsvarande TC-funktion

$$TC = 100 + 40q - 2q^2 + 0,2q^3/3.$$

Vi har då förutsatt att TFC liksom tidigare är 100.

När vi nu känner TC, så kan vi även lätt bestämma AC till

$$AC = \frac{100}{q} + 40 - 2q + \frac{0,2q^2}{3}.$$

Innan vi fortsätter skall vi kommentera utbudsfunktionens utseende. Vi utgår från de nya MC- och AC-funktionerna, som vi avbildat i bild 55. Det är uppenbart att ett företag inte vill sälja en vara under styckekostnaden. Vidare är man inte villig att sälja varan under gränskostnaden, eftersom man då får en mindre vinst genom att sälja mera. (Vi förutsätter att företaget arbetar efter principen om maximal vinst.) Av dessa skäl kommer utbudskurvan att rätt nära ansluta sig till den övre av de två avbildade graferna.

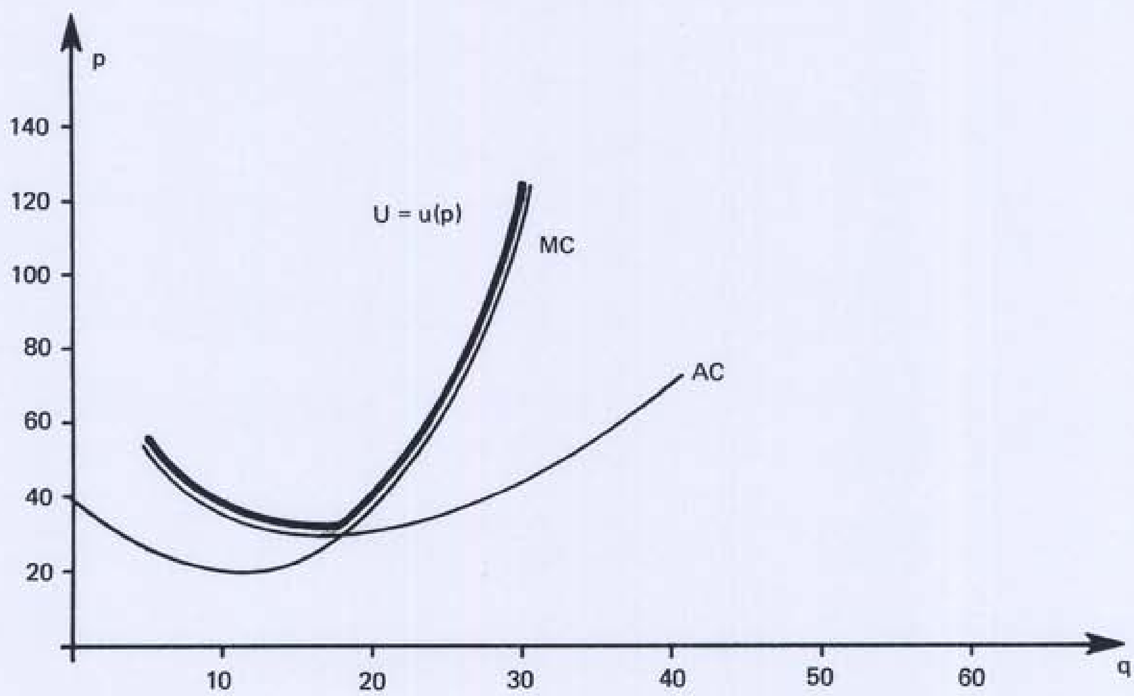


Bild 55

Prisbildning vid monopol

Vi antog att det tidigare båtvarvet arbetade under fri konkurrens. Låt oss nu anta att det här varvet har monopol på sin produkt. Inom företaget kan man då själv bestämma priserna genom att utgå från efterfrågan på varan. Antag nu att efterfrågefunktionen definieras av ekvationen $p = -2,5q + 150$. Man får då t ex ut ett styckepris av 100 (tusen kr) vid en produktionsvolym av 20 enheter. Lägg alltså märke till att i det här fallet ger efterfrågefunktionen styckepriset eller genomsnittsintäkten AR (Average Revenue), vid en viss produktionsvolym. Vi tecknar alltså

$$AR = -2,5q + 150$$

Genom att multiplicera AR med q får vi en ny funktion, totalintäkten TR (Total Revenue), som ger summan av intäkterna vid en viss produktionsvolym.

$$TR = -2,5q^2 + 150\,q$$

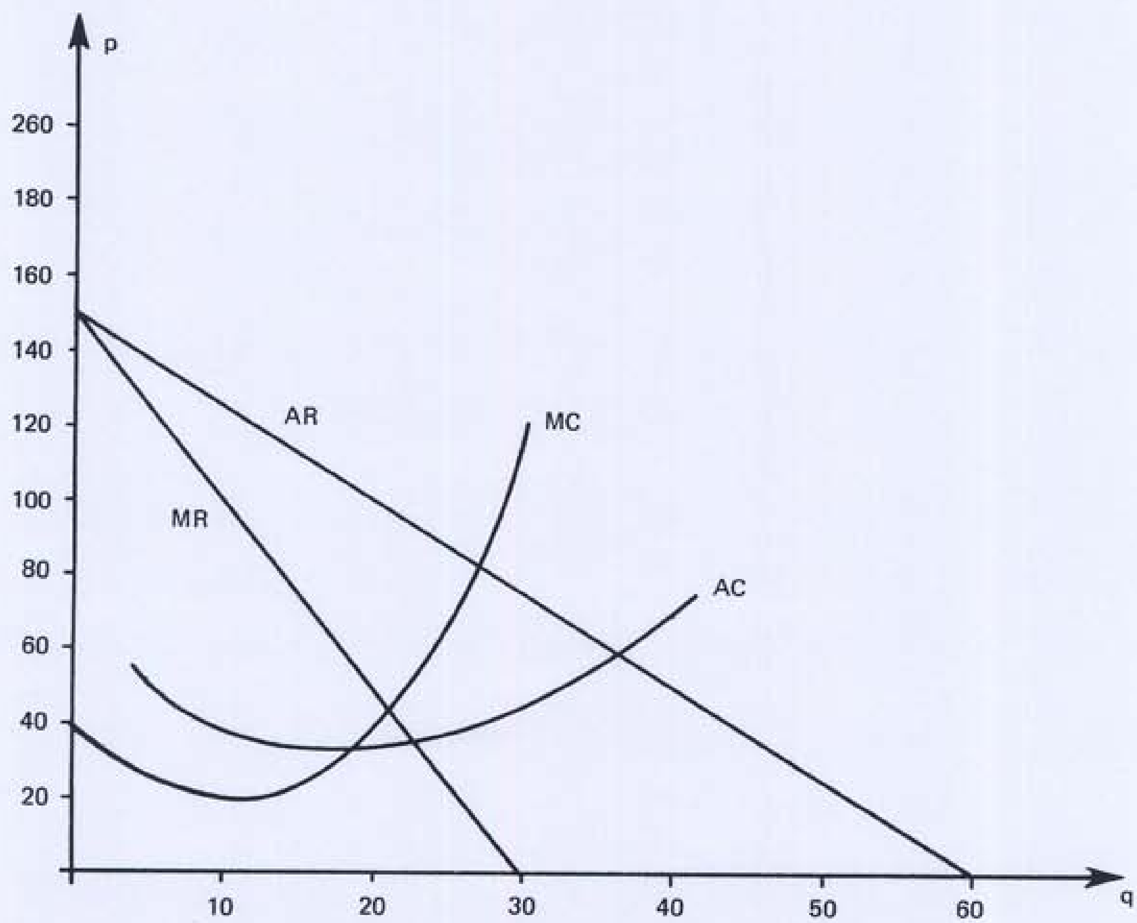
(Sedan vi nu återkopplat problemet till efterfrågefunktionen har det väl blivit mera klart varför ekonomerna ställt till med den "variabelförbistring", som vi beskrev i början av bagarens problem.)

Nu saknas bara en tredje funktion för att beskriva intäktssidan. Liksom vi tidigare arbetade med en gränskostnad finns det här en gränsintäkt MR (Marginal Revenue), som anger hur mycket intäkten ökar om man tillverkar en ny enhet. (MR erhålls givetvis enklast genom derivering av funktionen TR.)

$$MR = -5q + 150$$

Som avslutning på det här avsnittet skall vi nu presentera de fyra graferna MR, AR, MC och AC i samma koordinatsystem och därefter diskutera de ekonomiska överläggningar som grafernas inbördes lägen ger upphov till.

Bild 56



Vad kan vi nu dra för slutsatser ur bild 56?

a) AR = AC innebär att styckekostnaden är lika med priset. Detta ger inte ett öre i vinst till företaget. Däremot är som syns produktionsvolymen stor och man ger stor sysselsättning åt ortens befolkning.

b) MC = AR inträffar då gränskostnaden är lika med priset. För nästa enhet som tillverkas blir därför kostnaden större än genomsnittsintäkten. Tyder detta på att man här har nått vinstmaximum?

c) Svaret på ovanstående fråga är nej. MC är vid den här produktionsvolymen mycket större än MR. Av bilden framgår att kostnaderna för att framställa en ny enhet uppgår till 80 (tusen kr) medan intäkterna endast ökar med 10 (tusen kr). Lönsamheten har m a o för länge sedan passerat maximum.

d) Endast om MC är mindre än MR ökas vinsten genom att man producerar mera. Maximal vinst erhålls därför för MC = MR.

Exempel på matematiska problem

Bestäm vid vilken produktionsvolym man får maximal vinst. Bestäm storleken av denna vinst.

Bestäm den största möjliga produktionsvolym, som kan tillåtas om företaget inte skall gå med förlust.

Hur stor blir vinsten då MC = = AC?

Hur stor blir vinsten vid optimal produktionsvolym?

Bestäm q så att totalintäkten blir maximal. Ledning: studera MR.

Ekonomiska kalkyler med hjälp av derivata

Vi har hittills betraktat företagets ekonomiska kalkyler utgående från de metoder som beskrivs i våra läroböcker i samhällskunskap och företagsekonomi. Våra kalkyler har därvid baserats på en grafisk tolkning av problemen. I det här avsnittet skall vi övergå till att beskriva några nya metoder, som bygger på de kunskaper i matematik som SE-kursens elever lär i åk 2 och åk 3. Till att börja med skall vi återvända till Båtvarvet 1 och betrakta $TC = 100 + 15q + q^2$.

Om man känner totalkostnadsfunktionen, så brukar det för läraren i samhällskunskap vara ett krångligt arbete att därur bestämma MC-funktionen. Gymnasieeleven kan emellertid i åk 2 lösa detta problem med hjälp av derivering. Genom att derivera funktionen TC får man direkt MC-värdena för ett godtyckligt värde på q. Tyvärr ger emellertid denna metod inte alltid exakt de värden som samhällskunskapsläraren skulle ha fått.

För den som behärskar matematik på gymnasienivå, är det enkelt att genom derivering erhålla funktionen $MC = 15 + 2q$ ur TC-funktionen. Detta tas av förklarliga skäl sällan upp i samhällsekonomisk litteratur på gymnasienivå. Det måste därför bli matematiklärarens uppgift att ge eleverna kunskap om detta. Man skall emellertid observera att ett litet problem uppstår i det här sammanhanget. Vi skall belysa problemet genom att bestämma några MC-värden med samhällskunskapsböckernas metod.

Om vi t ex beräknar TC-värdena för några olika q så får vi:

$q = 10$ ger $TC = 350$

$q = 11$ ger $TC = 385$

$q = 12$ ger $TC = 424$

$q = 13$ ger $TC = 464$

Genom att bilda differensen mellan ett TC-värde och närmast föregående kan vi bestämma motsvarande MC-värden:

$q = 10$ ger $MC = 35$

$q = 11$ ger $MC = 39$

$q = 12$ ger $MC = 40$.

Om vi nu i stället gör motsvarande beräkningar med hjälp av derivata (vilket går betydligt fortare), så får vi:

$q = 10$ ger $MC = 35$

$q = 11$ ger $MC = 37$

$q = 12$ ger $MC = 39$.

För matematikläraren är det omedelbart klart hur denna situation uppstår. Emellertid är skillnaden så gott som alltid så liten att den knappast inverkar på de ekonomiska kalkylerna. Vi vill därför råda läraren i samhällskunskap att tolerera denna lilla avvikelse.

Den matematiska bakgrunden till de olika MC-värdena är väl fullt klar? Men även eleverna bör få detta klart för sig. Det kan annars ge upphov till onödiga problem. Den lämpligaste metoden att göra detta är att utnyttja just TC-funktionen vid införandet av begreppet derivata. Man kan i detta sammanhang även beröra begreppet differential.

När vi i samband med MC-funktionens införande i Båtvarvet 1 bestämde den optimala produktionsvolymen, sökte vi skärningen mellan MC-och AC-graferna. Även här hade det varit enklare att använda sig av derivering. Jfr bild 56.

Genom att studera derivatan till en funktion lär sig eleverna att finna det eventuellt största eller minsta värde funktionen kan anta. Detta betyder att man kan finna den optimala produktionsvolymen utan att rita grafen till AC och utan att känna funktionen MC.

Vi kunde givetvis ha bestämt ett minimum för funktionen

$$AC = \frac{100}{q} + 15 + q$$

på vanligt sätt utan att gå via grafen till MC-funktionen.

I samband med Båtvarvet 2 sökte vi bl a maximal vinst i monopolfallet. Eftersom vinsten definieras som totalintäkten TR minus totalkostnaden TC, så gäller det att söka ett största värde för funktionen TR-TC.

Genom att studera derivatan till funktionen TR-TC, som består av funktionen MR-MC kan man på matematisk väg bestämma vinstmaximum resp förlustminimum och även andra förändringar i företagets lönsamhet.

Detta löser vi ånyo enklast genom att derivera och söka nollställen till derivatan MR-MC. Vi ser här också orsaken till att skärningen mellan MR och MC svarar mot maximal vinst resp minimal förlust. (Om TR $\leq$ TC.)

Ekonomiska kalkyler med hjälp av integraler

Vi har tidigare beskrivit vilket samband som råder mellan funktionerna TR, AR och MR. Låt oss nu peka på några konsekvenser av detta samband. Vi utgår därvid från att endast MR-funktionen MR = -5q + 150 är känd från Båtvarvet 2.

a) Gränsintäkten för q = 0 är 150, vilket betyder att det kostar 150 (tusen kr) att tillverka den första båten. Men för detta värde på q är detta också lika med genomsnittsintäkten AR. Av detta skäl kommer funktionerna MR och AR alltid att skära p-axeln i samma punkt.

b) På samma sätt som man kan bestämma MR om man känner TR med hjälp av derivering, så kan man bestämma TR om man känner MR genom integrering. Avsnittet integraler kommer emellertid först i åk 3 och endast i S-kursen.

Eftersom MR är derivatan till TR, så kan i det här fallet TR-funktionen bestämmas som en primitiv funktion till MR. Observera därvid att för q = 0 är alltid TR = 0, vilket ger den arbiträra konstanten = 0.

c) Om den här beskrivna TR-funktionen vet vi att den har ett (lokalt) maximum samtidigt som MR = 0. När sedan MR-funktionen passerar under q-axeln, så sjunker totalintäkten för varje nytillverkad enhet. Så länge TR är positiv, så är emellertid även genomsnittsintäkten AR positiv. Man inser emellertid att TR och AR måste bli 0 samtidigt, d v s kurvorna skär varandra på q-axeln. Observera också att detta q-värde alltid är dubbelt så stort som det q-värde som erhålls i MR-kurvans skärning med q-axeln.

Som en avslutning skall vi nu ge exempel på de olika möjligheter som finns att lösa ekonomiska extremvärdesproblem. Vår avsikt är att denna "katalog" även skall ge exempel på hur man kan lösa i princip samma problem på olika kunskapsnivåer.

(Vi vill påpeka att vi i den här sammanfattningen vänder oss till matematikläraren i första hand. Vid en del skolor kan det därför vara lämpligt att för tillfället hoppa över sammanfattningen och gå direkt till de avslutande planeringsfrågorna.)

Vi väljer som problem att bestämma den maximala vinsten i avsnittet Båtvarvet 2. De funktioner vi kommer att behöva är

$$AC = \frac{100}{q} + 40 + 2q - \frac{0,2q^2}{3} \qquad AR = -2,5q + 150$$

$$MC = 40 - 4q + 0,2q^2 \qquad MR = -5q + 150$$

a) Genom att rita graferna till MR och MC får vi reda på att maximal vinst inträffar för $q \approx 21$.

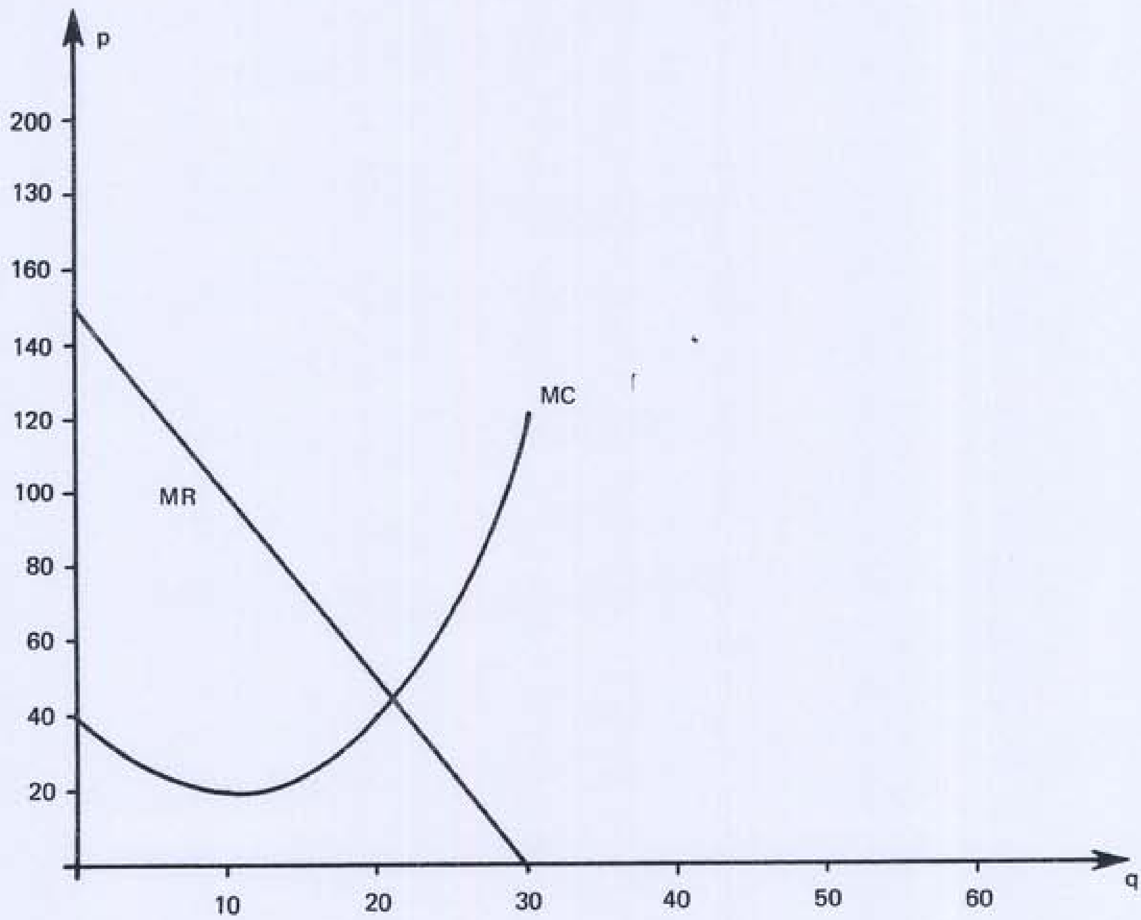


Bild 57

Vinstens storlek erhålls nu som TR(21) - TC(21) eller uttryckt med hjälp av AR och AC som $21 \cdot AR(21) - 21 \cdot AC(21)$. Även vinstens storlek kan bestämmas grafiskt genom följande metod (se bild 58).

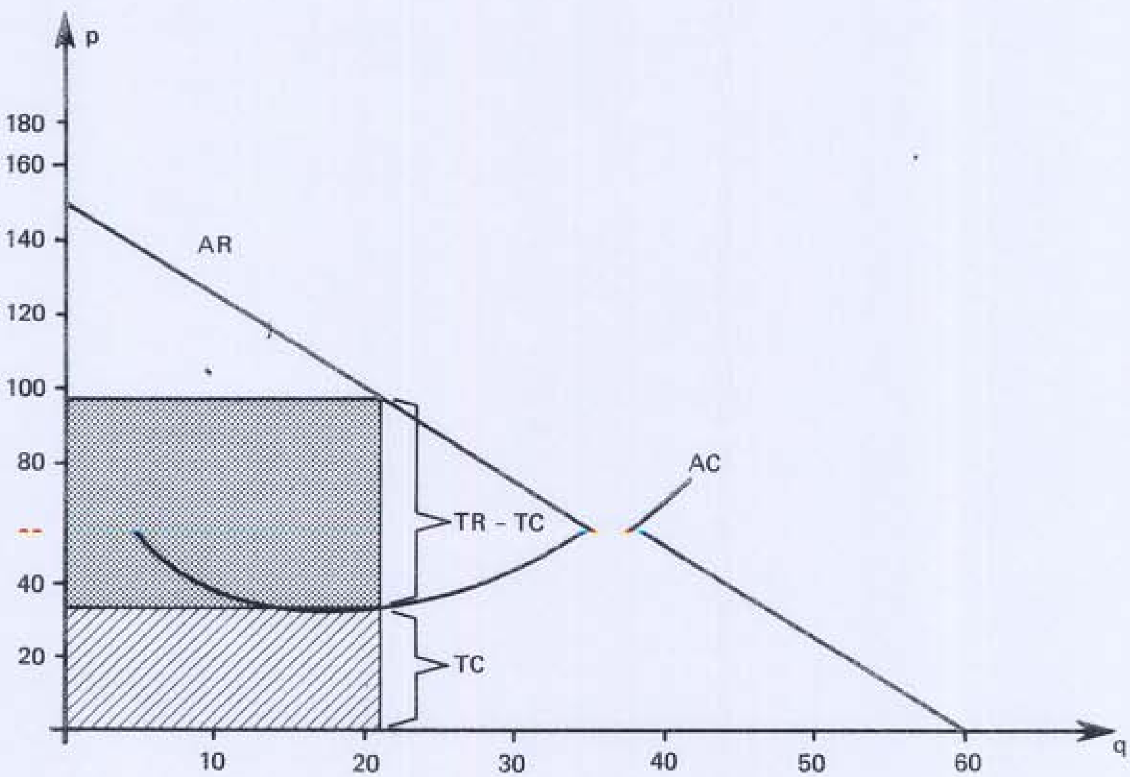


Bild 58

medan den mindre rektangeln ger kostnader på ca 0, 6 milj. Differensen eller den s k vinstrektangeln svarar då mot en vinst på ca 1, 4 milj kr.

b) En något mera avancerad lösningsmetod ser ut så här. Om man deriverar TR - TC erhålls differensen mellan funktionerna MR och MC. I det här fallet vet vi att

$$MR - MC = 110 - q - 0,2q^2$$

Denna senare lösningsvariant kan givetvis göras såväl enklare som svårare genom att man från början ger flera eller andra funktioner än MR och MC.

c) För att ge exempel på en sista och mer originell lösningsmetod, så förutsätter vi att vi i Båtvarvet 2 hade haft en linjär TC-funktion. Med hjälp av graferna till TR och TC hade vi fått bild 59.

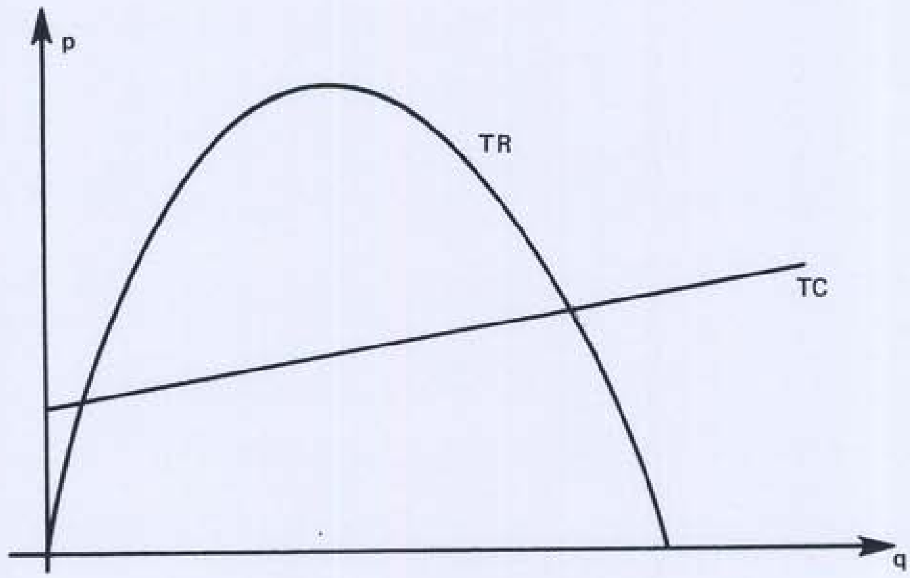


Bild 59

Ur bild 59 gäller det nu att söka maximum för TR - TC. Lösningen sker på följande sätt (se bild 60). Drag en tangent till TR som är parallell med TC. I tangeringspunkten finner vi då det q-värde som ger den maximala vinsten. Lägg märke till att existensen av detta vinstmaximum hänger samman med differentialkalkylens medelvärdessats. Detta är också en av de få tillämpningar på denna sats som man kan finna i gymnasiekursen.

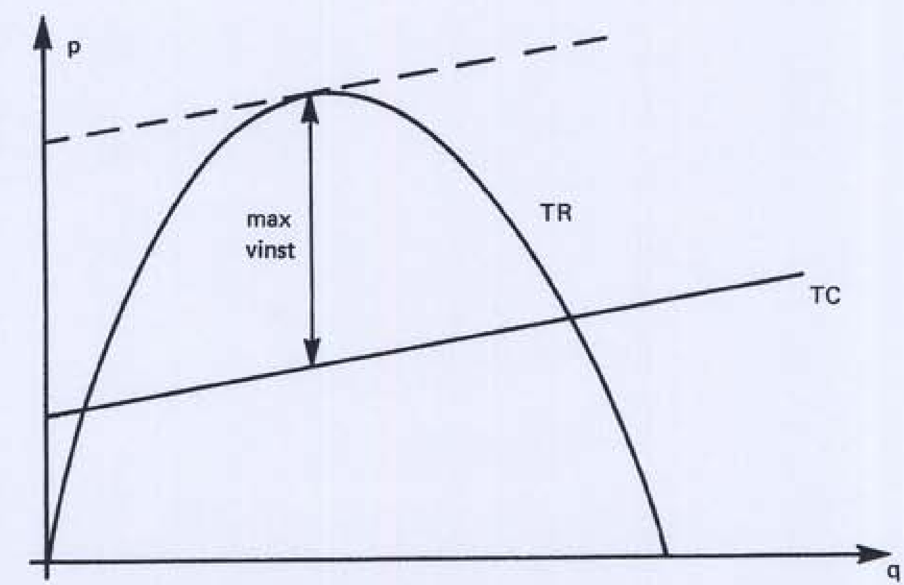


Bild 60

Planeringsfrågor

När behandlas företagets ekonomiska planering i ämnet samhällskunskap (företagsekonomi), och hur grundligt bör detta ske?

När behandlas de ovan beskrivna momenten inom ämnet matematik, och i vilken utsträckning kan samhällsekonomiska problem lösas?

Gör ett förslag till samplanering av det ovan givna stoffet. For-

dennes undervisning.

Kan något av ovanstående stoff ges som specialarbete i åk 3?

Som en avslutning vill vi nämna att det är vår förhoppning att vi sått frön till en ökad och enligt vår mening nödvändig samplanering mellan ämnena. Vi är emellertid helt medvetna om det arbete och de svårigheter en sådan samverkan medför. Den realistiska lös-

att så småningom (ev under kommande studiedagar) byggas ut till en mera fullständig samplanering.