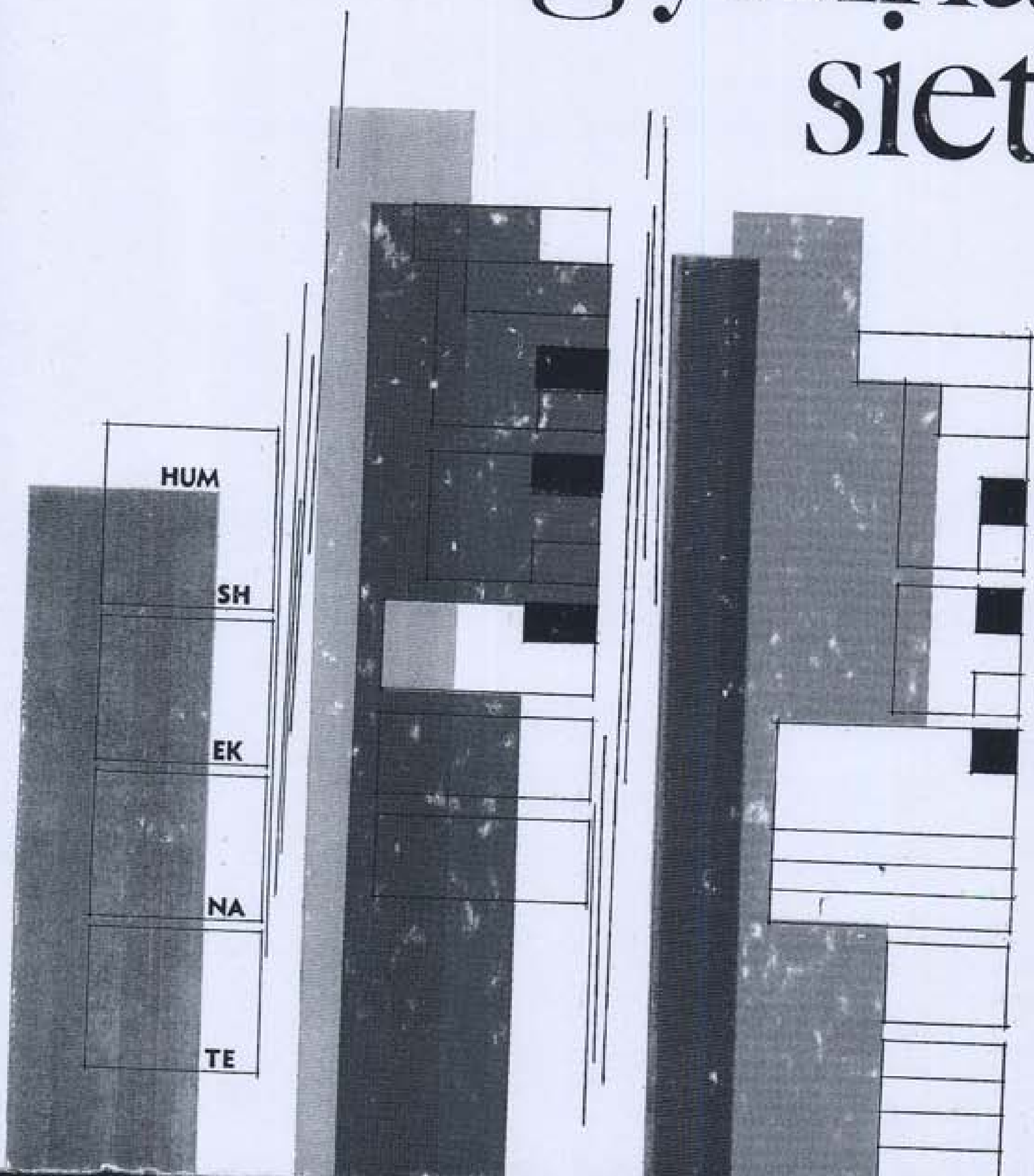
OLOF MAGNE
LÄNSSKOLINSPEKTÖR DOCENT

Kyrkogatan 17 Karlskrona Tel. 17996

Skolöverstyrelsens skriftserie 80

L

gymna-
siet



Skolöverstyrelsens skriftserie 80

Läroplan för gymnasiet

SÖ-förlaget
SKOLÖVERSTYRELSEN

INNEHÅLL

Förord 9

I Mål och riktlinjer 11

1. Grundskolan — Gymnasiet 13
2. Gymnasiets uppgifter 14

II Allmänna anvisningar 17

1. Hem — skola — samhälle 19
   1.1. Inledning 19
   1.2. Skola — hem 19
   1.2.1. Information om skolans verksamhet s. 19. 1.2.2. Organiserade kontakter s. 19
   1.3. Skola — samhälle 20
   1.3.1. Undervisningen s. 20. 1.3.2. Förenings- och fritidsverksamhet s. 20. 1.3.3. Skol-. samhället s. 22
2. Eleven och skolan 22
   2.1. Inledning 22
   2.2. Hälsovård 22
   2.3. Information och rådgivning 22
   2.4. Studie- och yrkesorientering 23
   2.4.1. Allmänna synpunkter s. 23. 2.4.2. Orienteringens utformning s. 23
   2.5. Samarbetsfrågor 24
3. Gymnasiets konstruktion 25
   3.1. Det successiva tillvalet 25
   3.2. Frivilliga ämnen, estetisk och social specialisering 25
   3.3. Mindre studiekurs och förlängd undervisning 26
   3.4. Samarbete mellan skolor 26
4. Undervisningen 26
   4.1. Lärostoffet 26
   4.1.1. Kursplanernas disposition s. 26. 4.1.2. Urval och presentation av stoffet s. 27. 4.1.3. Organisation och planering s. 30
   4.2. Verksamhetsformer 34
   4.2.1. Självverksamhet och samarbete s. 34. 4.2.2. Studiefostran s. 37. 4.2.3. Självständiga arbetsuppgifter s. 40. 4.2.4. Hemuppgifter s. 47
   4.3. Hjälpmedlen i deras funktion 48
   4.3.1. Hjälpmedel för rikare information s. 48. 4.3.2. Hjälpmedel för effektivare studier s. 51. 4.3.3. Prov som hjälpmedel s. 53. 4.3.4. Reproduktionshjälpmedel s. 53
   4.4. Information om eleverna och bedömning av deras arbete 54
   4.4.1. Informationsbehovet s. 54. 4.4.2. Allmänna synpunkter på bedömningen s. 54. 4.4.3. Krav på bedömningen s. 55. 4.4.4. Bedömningsmetoder s. 56. 4.4.5. Mentalhygieniska synpunkter på bedömningen av eleverna och deras arbetsresultat s. 58. 4.4.6. Användningen av data om elevernas studieprestationer och arbetsmetodik s. 59. 4.4.7. Hjälpmedel för bedömningen s. 62
   4.5. Gemensamma aktiviteter 63
   4.5.1. Timmar till förfogande s. 63. 4.5.2. Gemensamma samlingar m. m. s. 64
   4.6. Pedagogisk ledning 65
   4.6.1. Rektor och studierektor s. 65. 4.6.2. Huvudlärare s. 66

III Timplaner 67

1. Gymnasiets differentiering 69
2. Timplan för årskurs 1 70
3. Timplan för humanistisk och samhällsvetenskaplig linje i årskurs 2 och 3 .. 71
4. Timplan för ekonomisk linje i årskurs 2 och 3 72
5. Timplan för naturvetenskaplig och teknisk linje i årskurs 2, 3 och 4 73
6. Timplan för tekniska ämnen i årskurs 3 och 4 74
   6.1. Maskinteknisk gren 74
   6.2. Byggtekniska grenar 74
   6.3. Eltekniska grenar 75
   6.4. Kemiteknisk gren 75
7. Anmärkningar till timplanerna 76
   7.1. Delning av klass eller grupp 76
   7.2. Sammanslagning av klasser 77
   7.3. Utökad studiekurs 77
   7.4. Specialisering 77
   7.5. Frivillig undervisning utanför schematid 77
   7.6. Ämneskoncentration 77
   7.7. Praktik 78

IV Kursplaner 79

1. Svenska 81
2. Moderna språk 112
3. Engelska 126
4. Tyska 130
5. Franska 134
6. Spanska 139
7. Portugisiska 142
8. Italienska 146
9. Ryska 150
10. Allmän språkkunskap 154
11. Latin 159
12. Grekiska 171
13. Historia 177
14. Religionskunskap 197
15. Filosofi 206
16. Psykologi 218
17. Samhällskunskap 226
18. Socialkunskap 249
19. Matematik 255
20. Fysik 282
21. Kemi 307
22. Biologi 326
23. Naturkunskap 341
24. Företagsekonomi Ek 361
25. Redovisning 372

[redacted]

26. Distribution 376
27. Förvaltning 382
28. Rättskunskap 389
29. Maskinskrivning 395
30. Stenografi 399
31. Praktiskt sekreterararbete 404
32. Kontorsteknik 407
33. Ergonomi 409
34. Företagsekonomi Te 416
35. Arbetsstudier 424
36. Teknologi 428
37. Maskintekniska ämnen, gemensamma anvisningar 446
38. Konstruktion M 451
39. Energi 474
40. Produktion M 487
41. Reglerteknik M 508
42. Specialarbete M 517
43. Maskinteknik El 523
44. Byggtekniska ämnen, gemensamma anvisningar 526
45. Byggteknik 531
46. Konstruktion B 535
47. Produktion B 541
48. Hus- och stadsplanering 548
49. Anläggning 553
50. VVS 562
51. Eltekniska ämnen, gemensamma anvisningar 564
52. Ellära 570
53. Elektronik 582
54. Reglerteknik El 602
55. Telekommunikation 612
56. Systemteknik 624
57. Elmaskiner 635
58. Elanläggning 642
59. Elkraft 649
60. Elteknik M 654
61. Elteknik B 661
62. Elteknik K 666
63. Kemitekniska ämnen, gemensamma anvisningar 671
64. Fysikalisk kemi 677
65. Organisk kemi 682
66. Biokemi 689
67. Analytisk och fysikalisk kemi 695
68. Apparatteknik 703
69. Teknisk kemi 710
70. Specialarbete K 717
71. Konst- och musikhistoria 721
72. Musik 733

73. Musik, estetisk specialisering 737
74. Teckning 742
75. Teckning, estetisk specialisering 747
76. Dramatik 753
77. Gymnastik 762

FÖRORD

Föreliggande läroplan för gymnasiet utges av skolöverstyrelsen med stöd av Kungl. Maj:ts kungörelse den 11 februari 1965 (nr 30) om läroplan för gymnasiet samt med iakttagande av de av Kungl. Maj:t och riksdagen antagna grunderna för arbetet i gymnasiet.

Skolöverstyrelsen avser att senare utfärda anvisningar för praktik i första hand för teknisk linje.

För undervisning i finska hänvisas till tidigare fastställd kursplan.

Läroplanen skiljer sig i vissa avseenden från tidigare utfärdade läroplaner för olika skolformer, bl. a. däri att anvisningar och kommentarer för skilda ämnen gjorts förhållandevis utförliga. Denna utformning har valts för att ge lärarna i gymnasiet ett så gott underlag som möjligt för planering av undervisningen. Anvisningar och kommentarer avser naturligtvis endast att ge uppslag för undervisningen, inte att i detalj binda eller reglera denna. Även om särskilt i vissa ämnen anvisningar och kommentarer gjorts relativt rikliga och utförliga, skall givetvis inte samtliga de uppslag som förtecknas i varje enskilt ämne tas med vid undervisningens planering. Det blir tvärtom en viktig uppgift för varje ämneskonferens, varje enskild lärare att själv göra det urval och den komplettering vid planeringen som motiveras av föreliggande förutsättningar, ämnets och ämnesmetodikens utveckling m. m.

Läroplanen skall tillämpas från och med läsåret 1966/67 i den ordning som fastställts i Kungl. Maj:ts kungörelse 1965:30.

Stockholm den 15 mars 1965.

Kungl. Skolöverstyrelsen

I

MÅL OCH RIKTLINJER

MÅL OCH RIKTLINJER

1. Grundskolan - Gymnasiet

1.1. Den genom samhällets försorg bedrivna undervisningen av barn och ungdom har till syfte att meddela eleverna kunskaper och öva deras färdigheter samt i samarbete med hemmen främja elevernas utveckling till harmoniska människor och till dugliga och ansvarskännande samhällsmedlemmar.

Så lyder skollagens första paragraf. Den gäller *all* undervisning av barn och ungdom, som bedrivs genom samhällets försorg, den må vara frivillig eller obligatorisk. Bestämmelsen är alltså tillämplig på gymnasiet i lika mån som på grundskolan.

Vid gymnasiet skall liksom vid grundskolan den enskilde eleven stå i centrum för skolans fostrande verksamhet. Att hjälpa varje elev till en allsidig utveckling är riktpunkten för skolans arbete. Det innebär, att skolan med aktning för elevens människovärde och kännedom om hans individuella egenart och förutsättningar skall söka främja hans personliga mognande till en fri, självständig och harmonisk människa. Skolan skall ge *individuell* fostran.

Den enskilda människan är i sin kontakt med omvärlden också medmänniska och medborgare. Hon är medlem av familj och kamratkrets, och hon är samhällsmedlem. För att hon skall kunna finna sig till rätta i tillvaron, måste hon redan under skoltiden få öva sig att leva och verka i gemenskap med andra och förbereda sig för sitt liv som framtida familjebildare och aktiv medborgare i morgondagens samhälle, som betydligt mer än det nuvarande kommer att kräva samverkan mellan människor av olika läggning och begåvning. Gymnasiet måste därför liksom redan grundskolan också ge *social* fostran. Skolans sociala fostran skall grundlägga och vidareutveckla sådana egenskaper hos eleverna, som i en tid av stark utveckling kan bära upp och förstärka demokratins principer om tolerans, samverkan och likaberättigande mellan kön, nationer och folkgrupper. Att väcka respekt för sanning och rätt, för människans egenvärde, för människolivets okränkbarhet och därmed för rätten till personlig integritet är en huvuduppgift också för den sociala fostran, som skolans verksamhet skall omfatta.

1.2. I läroplanen för grundskolan, avsnittet mål och riktlinjer, har fastslagits, att skolans arbete skall anpassas såväl till den enskilde elevens utveckling och möjligheter som till samhällets utveckling och att det gemensamma ansvaret och intresset för de ungas utveckling och fostran bör förena hem, skola och samhälle i ett fruktbärande samarbete. Vidare har skolans personlighetsfostrande uppgift starkt betonats. Vad i grundskolans läroplan, avsnittet mål och riktlinjer, sägs i här nämnda hänseenden samt angående samspelet mellan skola och samhälle äger tillämpning jämväl på gymnasiet.

För gymnasiet skall i fråga om individuell och social fostran, däri inbegripet personlighetsfostran och omtanke om elevernas mentala och kroppsliga hälsa, gälla samma principer som fastställts i läroplanen för grundskolan, avsnittet mål och riktlinjer.

Vad i läroplanen för grundskolan, avsnittet mål och riktlinjer, sägs om tim- och kursplaner, om undervisningsformer och arbetssätt, om undervisningsmetoder och undervisningsprinciper gäller också för gymnasiet.

2. Gymnasiets uppgifter

I gymnasiets verksamhet skall följande särskilt beaktas.

2.1. Gymnasiets utbildning bygger på grundskolan och skall tjäna som grund dels för fortsatta studier vid universitet och högskolor och annan postgymnasial utbildning, dels för omedelbar yrkesutövning.

Gymnasiet skall *vidga* och *fördjupa* den utbildning som grundskolan gett och även i övrigt *fullfölja* dess fostrande verksamhet såväl i vad avser individuell som social fostran.

En huvudlinje i gymnasiets undervisning är att utveckla ett *självständigt* och *kritiskt* betraktelsesätt. Resultatet kan variera inom vida gränser, men eleverna bör redan från början vänja sig vid en undersökande inställning till de kunskaper och den information som erbjuds dem inom och utom skolan, att granska sakuppgifternas korrekthet, argumentationens uppbyggnad och slutsatsernas tillförlitlighet samt att ställa krav på intellektuell redlighet både när de bedömer andras upplysningar och framför egna synpunkter.

Värdet av en sådan inställning är stort på alla områden såväl inom som utom skolan. Politisk och annan opinionsbildning, nyhetsförmedling och annan information som möter eleven i hans dagliga tillvaro får sina rätta proportioner i ljuset av den kritiskt värderande attityden.

Det bör alltid överlåtas åt eleven att efter självständig prövning acceptera eller förkasta en värdering. Detta innebär att som allmän regel för undervisningen bör gälla att objektivitetskravet skall sättas i centrum. Fakta och värderingar skall presenteras så allsidigt som möjligt. I de gränsfall då tvekan kan råda huruvida ett faktum eller en värdering föreligger bör diskussionen hållas öppen.

Förståelse, intresse och vilja till engagemang för andra människor är i det nutida samhället ett oundgängligt komplement till kunskaper. Insikter i mänskliga och samhälleliga förhållanden är betydelsefulla för alla dem som i sitt yrke har arbetsledande funktioner eller på annat sätt har att samarbeta med andra människor och inverka på andra människors villkor. Arbetet inom skolan liksom på vetenskapens, förvaltningens eller näringslivets fält förutsätter en ständig samverkan mellan människor. Samarbete inom sociala, fackliga, politiska och andra grupper kräver vilja till samförstånd och samverkan även om uppfattningarna kan vara skiljaktiga. Arbetet på ett internationellt plan gör det nödvändigt att bedöma andra folk utifrån deras tradition, historia och samhällsförhållanden.

Genom att i sin verksamhet uppmärksamma elevens personliga utveckling kan gymnasiet också tillgodose kravet på social fostran. Lika litet som främjandet av den individuella utvecklingen kan främjandet av den sociala försiggå skilt från annan verksamhet inom gymnasiet. Den förmedlas i själva verket genom gymnasiets hela verksamhet. Olika arbetssätt som grupparbete eller enskilda studier tillgodoser kravet likaväl som skol- och miljöpraktik eller specialförberedelserna för den framtida uppgiften gör det. Kommunikationsfärdigheter likaväl som arbetsteknisk träning och social, teknisk, kulturell och estetisk orientering skapar förutsättningar för bättre förståelse av andra människor och därmed större möjlighet till friktionsfritt samarbete.

2.2. Det är en viktig uppgift för gymnasiet att bygga vidare på vad grundskolan gett eleven av allmänna *kommunikationsfärdigheter*. En central uppgift är därvid att utveckla hans språkliga uttrycksmedel. Att med saklighet och klarhet uttrycka sig på det egna språket, att tydligt kunna framställa sina tankar såväl muntligt som skriftligt är färdigheter som måste utvecklas. Med tillgång till ett stort antal språkutbildade medborgare kan vårt land upprätt-

[redacted]

hålla och vidga de kontakter som är av betydelse för vår kulturella, tekniska, ekonomiska och sociala utveckling. Goda färdigheter i främmande språk är därför nödvändiga. I en värld med vidgade kommunikationsmöjligheter har bredden i den språkundervisning som erbjuds stor betydelse. Det innebär att gymnasiet bör ge möjlighet att studera även andra språk än dem som tidigare dominerat språkundervisningen. Behovet av ökad bredd kan emellertid inte tillgodoses för varje enskild individ. En individuell variation vad beträffar språkstudiernas omfattning är därför nödvändig, varvid individuella intressen och differentierade samhällsbehov kan tillgodoses.

Matematiken har fått allt större betydelse som kommunikationsfärdighet. Kvantitativa metoder har vunnit insteg i ökad grad också inom studier som hittills inte arbetat med sådana metoder. De har också vunnit ökat insteg inom verksamheten i näringsliv och förvaltning; särskilt gäller det statistiken, som blivit ett viktigt hjälpmedel för t. ex. prognoser, arbets- och kostnadsanalyser.

Gymnasiet måste därför ha till uppgift att, utöver den grund som den obligatoriska skolan gett, vidare utveckla elevernas matematiska färdigheter och därvid bl. a. orientera om sådana kvantitativa metoder, särskilt de statistiska, som har vidsträckt praktisk tillämpning inom skilda vetenskapsgrenar och samhällssektorer.

2.3. För att tillmötesgå kravet på förberedelser för framtida utbildning eller yrkesverksamhet har gymnasiet till uppgift att ge de *specialförberedelser* som individen önskar och behöver. Att helt låta var och en förverkliga sina intressen är dock inte möjligt. De personliga önskemålen i mer begränsad mening måste vägas mot de krav på förberedelser som ställs av arbetsmarknad och samhälle. Gymnasiets uppgift kan dock inte vara att mera slutgiltigt fastställa den avvägningen. Det måste sålunda i läroplanen och skolarbetets organisation finnas möjligheter att möta personliga anlag och intressen och låta dessa ge utslag i form av mer eller mindre individualiserade studieprogram. Men även om avvikelser tillåts inom den gemensamma ramen, får detta inte leda till att den enskilde individens studieprogram alltför starkt avviker från de krav som ställs inom den verksamhet dit han kan komma att söka sig.

Särskilt på de ekonomiska och tekniska linjerna måste de specialförberedelser gymnasiet skall erbjuda uppmärksamt inriktas på de uppgifter eleverna kommer att möta i arbetslivet. Gymnasiet måste genom sin undervisning göra dem väl förberedda för yrkeslivet, då en stor del av eleverna direkt efter skolans slut kommer att ha sin verksamhet inom näringsliv och förvaltning.

2.4. Samhällslivet ställer — utom kraven på vissa specialförberedelser och kommunikationsfärdigheter — *krav på vissa för alla eller de flesta individer gemensamma allmänna kunskaper och färdigheter,* en referensram som viktiga företeelser inom samhälls- och kulturliv kan hänföras till och som underlättar kontakter och förståelse såväl inom den egna kulturen som inom en vidare kontaktsfär.

De internationella kontakterna ställer krav inte bara på språkfärdigheter. För förståelse av andra folk är det angeläget att kunskaper vinns om politiska förhållanden liksom om sociala och ekonomiska funktioner. Det gäller i högsta grad om de s. k. utvecklingsländerna, med vilka förbindelserna successivt stärks, men även om mer närliggande folk inom Europa och inom Norden. Gymnasiets uppgift blir därför att utveckla, stärka och fördjupa den samhällsorientering som getts i grundskolan.

De internationella kontakterna förutsätter även förståelse för andra folks religiösa och kulturella situation. Kännedom om avvikande beteenden och kulturmönster är en förutsättning för att upprätta och vidmakthålla internationella kontakter. Det är betydelsefullt att eleverna görs medvetna om skilda moral- och rättsuppfattningar, om hur de växlar under historiens lopp, från land till land, från befolkningsgrupp till befolkningsgrupp, samtidigt som de orienteras om den stora fonden av gemensamma värderingar. För att göra gymnasiets elever beredda till en insats även i internationellt arbete och till att förstå andra folks reaktioner är det därför nödvändigt att den sociala och kulturella orientering som getts i grundskolan vidgas och fördjupas.

Den tekniska och naturvetenskapliga utvecklingen påverkar alltmer de problem inom olika områden vilka människan som medborgare har att ta ställning till. Det är nödvändigt att väcka elevernas förståelse för denna utveckling och att göra dem medvetna om hur naturvetenskapliga upptäckter förändrar betingelserna för samhällslivet liksom om att forskningen och utvecklingen är i hög grad beroende av sociala förhållanden och sammanhang. För att eleverna skall kunna ta ställning till många av de problem som berör både dem själva och samhället är det betydelsefullt att samtliga elever i gymnasiet oberoende av studieinriktning får en teknisk och naturvetenskaplig orientering.

Gymnasiets uppgift att ge en orientering som underbygger förmågan att bedöma samhälls- och kulturaktiviteter bör kompletteras även med en historisk aspekt. Eleverna bör genom studiet av förhållanden i gången tid och av inträffade förändringar, få perspektiv på samhällets föränderlighet och bättre kunna förstå förhållandena i vår tid, förvalta det de betraktar som värdefullt och förbättra det som de anser ogynnsamt i nuvarande samhällsförhållanden. Det sagda gäller emellertid — det bör understrykas — inte bara det egna landet utan även större kulturkretsar.

Gymnasiets uppgift är att fortsätta grundskolans historiska orientering i första hand genom att ge översikt och påvisa sammanhang i det historiska skeendet vad beträffar sociala, politiska, ekonomiska, tekniska, religiösa, estetiska eller kulturella förhållanden.

En viktig uppgift för den undervisning som förbereder för samhällslivet likaväl som för den undervisning som siktar till att ge specialförberedelser är att hos eleverna skapa intresse för och förmåga att efter avslutad utbildning fortgående orientera sig inom yrket och samhällslivet.

Livet i det moderna samhället ställer även krav på kännedom om hur olika miljöfaktorer påverkar arbetsförmågan. Det är därför betydelsefullt att gymnasiet ger kunskap om detta och samtidigt ger sina elever tillfälle till och lär dem inse värdet av fysisk träning. Därigenom bör skolan kunna medverka till sunda levnadsvanor och göra en viktig insats för elevernas hälsa och välbefinnande.

2.5. Att hos eleverna skapa goda arbetsvanor är ett naturligt krav på varje skolform. Eleverna skall, när de lämnar skolan, på egen hand och på eget ansvar kunna utföra självständiga och mer omfattande arbetsuppgifter, vare sig det sker inom arbetslivet eller i samband med vidare studier. För gymnasiet måste det betyda att dess elever, när de lämnar skolan, skall vara vana att självständigt eller i samarbete med andra ta initiativ till, planera och genomföra större arbetsuppgifter. I detta bör ingå förmågan att på egen hand samla den erforderliga informationen, att tolka och värdera den, att planera det egna arbetet och slutligen att sammanställa och redovisa arbetsresultatet.

Gymnasiet måste fullfölja och utveckla den studiefostran och den arbetsträning som i grundskolan ingår i varje ämne. Kravet på arbets- och studiefostran innebär också att gymnasiets arbetsformer måste vara sådana att elevens förmåga till egna iakttagelser och initiativ liksom till självständigt ställningstagande kommer till sin rätt.

19. Matematik

19.1. *Mål*

Undervisningen i matematik har till uppgift

att ge förtrogenhet med några väsentliga begrepp och metoder inom algebra, geometri, funktionslära, sannolikhetslära och statistik,

att uppöva färdigheten i numerisk räkning även med tekniska hjälpmedel samt

att ge inblick i matematikens användning inom andra ämnesområden.

19.2. *Huvudmoment*

19.2.1. Na-Te[1]

Egenskaper hos och räkning inom olika talmängder (naturliga, hela, rationella, reella och komplexa tal). Potenser och logaritmer. Räknestickan.

Vektorer i planet och rummet. Rätvinkligt koordinatsystem i planet och rummet.

Det allmänna funktionsbegreppet. Gränsvärde, kontinuitet, derivata och integral. Rationella och trigonometriska funktioner. Exponential- och logaritmfunktioner. Area- och volymberäkning.

Sannolikhetslära och statistik.

19.2.2. Sh[2]-Ek

Egenskaper hos och räkning inom olika talmängder (naturliga, hela, rationella och reella tal). Potenser. Räknestickan. Rätvinkligt koordinatsystem.

Det allmänna funktionsbegreppet. Gränsvärde, kontinuitet, derivata och integral. Polynom, exponential- och logaritmfunktioner.

Sannolikhetslära och statistik.

19.3. *Årskursfördelning*

19.3.1. Årskurs 1

1 NTSE. *Mängdlära:* Mängd och delmängd. Något om räkning med mängder (union, snitt och komplement).

2 NTSE. *Det allmänna funktionsbegreppet:* Definition baserad på mängdbegreppet. Definitionsmängd och värdemängd.

3 NTSE. *Rationella tal:* Översikt av egenskaper hos de naturliga, hela och rationella talen. Tallinjen. Absolutbelopp. Algebraiska reduktioner.

4 NTSE. *Linjära ekvationer, olikheter och ekvationssystem.*

5 NTSE. *Reella tal.*

6 NTSE. *Kvadratrötter. Andragradsekvationen.*

7 NT. *Potenser:* Potens med godtycklig reell exponent. Räkning med potenser.

8 NTSE. *Närmevärden:* Begreppet närmevärde. Absolut och relativt fel. Räkning med närmevärden. Linjär interpolation.

9 NT. *Vektorer i planet:* Vektorbegreppet. Längd av vektor. Addition, subtraktion och multiplikation med tal. Uppdelning i komponenter. Koordinatframställning.

---

1. I årskursfördelning och kommentarer används följande förkortningar:
   E = ekonomisk tillvalsgrupp eller linje
   S = samhällsvetenskaplig linje och i årskurs 1 humanistisk-samhällsvetenskaplig tillvalsgrupp
   NT = naturvetenskaplig-teknisk tillvalsgrupp eller linje

2. Elever i samhällsvetenskaplig tillvalsgrupp eller linje kan även följa NT-kursen.

10 SE. *Vektorer i planet:* Vektorbegreppet. Längd av vektor. Räkning med vektorer. Koordinatframställning.

11 NTSE. *Rätvinkligt koordinatsystem i planet:* Koordinater för en punkt. Grafisk framställning av funktioner.

12 NTSE. *Den linjära funktionen:* Riktningskoefficient. Grafisk framställning. Proportionalitet. Procent.

13 NT. *Logaritmer:* Logaritmbegreppet. Tabeller. Principerna för numerisk räkning.

14 NTSE. *Räknestickan.*

15 NTSE. *Datamaskiner:* Orientering om datamaskiner och programmering.

16 NT. *Trigonometriska funktioner:* Definition av trigonometriska funktioner. Grafisk framställning. Trigonometriska tabeller och formler för användning av dessa. Solvering av rätvinkliga trianglar.

17 SE. *Trigonometriska funktioner:* Definition av trigonometriska funktioner. Grafisk framställning.

18 NT. *Derivator, förberedande behandling:* Derivata av polynom. Enkla tillämpningar.

19 NTSE. *Beskrivande statistik:* Grafisk och numerisk behandling av statistiskt material. Summatecknet. Användning av räknemaskiner. Index (endast på SE).

19.3.2. Årskurs 2

20 NT. *Skalärprodukt av vektorer:* Definition av och räkning med skalärprodukt. Skalärprodukten i koordinatframställning. Avstånd mellan två punkter i koordinatsystemet. Vinkeln mellan två vektorer. 8

21 NT. *Triangelteoremen:* Sinus- och cosinusteoremet. Trigonometriska ytformeln. Enkla triangelsolveringar. 6

22 NT. *Rationella funktioner:* Division med polynom. Faktorteoremet för polynom. Lösning av enkla ekvationer och ekvationssystem av högre grad. Rationella funktioners tecken. Olikheter. 1½

23 SE. *Polynom:* Division med binom. Faktorteoremet. Något om högregradsekvationer. Polynoms tecken. Olikheter.

24 NT. *Trigonometriska formler:* Grundläggande trigonometriska formler. Bågmått. 7

25 NT. *Gränsvärde:* Definition av gränsvärde. Räkneregler för gränsvärden. Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$. 10

26 NT. *Kontinuitet:* Definition av kontinuitet. Satser om kontinuerliga funktioner. Kontinuitet hos rationella och trigonometriska funktioner. 8

27 SE. *Gränsvärde och kontinuitet.*

28 NT. *Derivata:* Definition av derivata. Derivata av en summa, produkt och kvot av funktioner. Derivata av rationella och trigonometriska funktioner. Derivatans geometriska betydelse. Differential. 16

29 SE. *Derivata:* Definition av derivata. Derivata av summa och produkt av funktioner. Derivata av sammansatt funktion. Derivata av polynom. Derivatans geometriska betydelse.

30 NT. *Sammansatt funktion:* Definition av sammansatt funktion. Kontinuitet och deriverbarhet hos sammansatta funktioner. Implicit derivering. 5

31 NT. *Samband mellan derivata och monotonitet. Maxima och minima:* Definition av monotonitet. Bestämning av en funktions monotonitet, maxima och minima med hjälp av derivatan. Grafisk framställning av rationella och trigonometriska funktioner. Grafisk lösning av ekvationer. 20

4 32 NT. *Högre derivator:* Definition av högre derivator. Konvexitet.

18 33 NT. *Integraler:* Definition av integral. Räkneregler. Samband mellan integral och primitiv funktion. Integration av enkla rationella och trigonometriska funktioner. Areaberäkning.

8 34 NT. *Logaritmfunktioner:* Definition av den naturliga logaritmfunktionen. Räknelagar. Monotonitet och kontinuitet. Derivata. Definition av talet *e*. Tabeller.

7 35 NT. *Inversa funktioner:* Definition av invers funktion. Kontinuitet. Derivata. Cyklometriska funktioner.

6 36 NT. *Exponentialfunktioner:* Definition av exponentialfunktionen $x \curvearrowright e^{x}$. Räknelagar. Kontinuitet och monotonitet. Derivata. Tabeller. Funktion $x \curvearrowright a^{x}$.

10 37 NT. *Potensfunktioner:* Egenskaper hos funktionen $x \curvearrowright x^{a}$. Derivata.

38 SE. *Samband mellan derivata och monotonitet. Maxima och minima:* Definition av monotonitet. Bestämning av en funktions monotonitet, maxima och minima med hjälp av derivatan. Grafisk framställning av polynom. Grafisk lösning av ekvationer.

39 E. *Exponential- och logaritmfunktioner:* Definition av potens med reell exponent. Definition av logaritmfunktionen. Räknelagar. Naturliga logaritmer och talet *e*. Derivata till exponential- och logaritmfunktioner. Principerna för numerisk räkning med logaritmer.

19.3.3. Årskurs 3

39 S. *Exponential- och logaritmfunktioner:* Definition av potens med reell exponent. Definition av logaritmfunktionen. Räknelagar. Naturliga logaritmer och talet *e*. Derivata till exponential- och logaritmfunktioner. Principerna för numerisk räkning med logaritmer.

40 S. *Integraler:* Definition av integral. Samband mellan integral och primitiv funktion. Integration av polynom. Areaberäkning.

41 NT. *Komplexa tal:* Definition av och räkning med komplexa tal. Geometrisk representation.

42 NT. *Differentialekvationer:* Linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter av första och andra ordningen.

43 NT. *Integrationsmetoder:* Partiell integration och integration med substitution i enkla fall.

44 NT. *Approximation av funktioner med polynom:* Maclaurins formel.

45 NT. *Vektorfunktioner:* Definition av vektorfunktion. Derivata av vektorfunktion. Kurvkonstruktioner. Den räta linjens ekvation i vektorform. Avstånd från punkt till rät linje.

46 NT. *Vektorer i rymden:* Vektorbegreppet. Längd av vektor. Addition, subtraktion och multiplikation med skalär. Uppdelning i komponenter. Framställning i rätvinkligt koordinatsystem. Skalärprodukt.

47 NT. *Rätvinkligt koordinatsystem i rymden:* Koordinater för en punkt. Räta linjens, planets och sfärens ekvationer.

48 NT. *Area- och volymberäkning:* Volymberäkning med integraler. Volym och area av kon, cylinder och klot.

49 NTSE. *Talföljder och serier:* Geometriska talföljder och serier. Definition av konvergens och divergens av oändliga serier. Den oändliga geometriska serien.

50 NTSE. *Kombinatorik:* Multiplikationsprincipen. Permutationer. Antal delmängder till ändlig mängd. Binomialteoremet. Induktionsbevis (endast på NT).

51 NTSE. *Sannolikhetslära och statistik:* Relativa frekvenser. De relativa frekvensernas stabilitet. Sannolikheter vid ändliga utfallsrum. Binomialfördelningen. Något om sannolikheter i oändliga utfallsrum. Normalfördelningen. Tillämpningar av sannolikhetsläran bl. a. på statistisk inferens.

52 E. *Tidsserier:* Grafisk representation av tidsserier med diskussion av långtidsvariationer eller trend, säsongvariationer, konjunkturvariationer och tillfälliga variationer.

53 E. *Urvalsförfaranden:* Olika slags urvalsförfaranden. Enkelt slumpmässigt urval. Stratifiering. Stegvis urvalsförfarande.

19.4. Anvisningar och kommentarer

19.4.1. Lärostoffet

19.4.1.1. Allmänna synpunkter på ämnesstoffet

Grundstommen i matematikkursen kan inrymmas under rubrikerna algebra, geometri, funktionslära, sannolikhetslära och statistik. Någon strikt gränsdragning mellan dessa områden bör emellertid inte förekomma, utan i möjligaste mån bör allmänna principer läggas till grund för en integrerad matematikkurs.

I ämnet skall begrepp och symboler från mängdläran användas. Rätt utnyttjat innebär detta stora fördelar. För införande av det allmänna funktionsbegreppet är mängdbegreppet nödvändigt liksom inom vissa avsnitt av sannolikhetsläran. Någon formell kurs i mängdlära med tillhörande symbolik skall inte ges, utan eleverna skall successivt vänjas vid mängdlärans betraktelsesätt. Det bör för övrigt framhållas att dess symbolik inte är det väsentliga utan dess metodik. Framställningen måste här liksom på alla punkter i matematiken utgå från det konkreta. Därigenom kan man motivera införandet av ett allmännare betraktelsesätt.

Endast ett fåtal av eleverna kommer senare att ägna sig åt matematik som vetenskap. För de flesta kommer matematiken att vara ett instrument som är nödvändigt för fortsatta studier eller fortsatt yrkesverksamhet. Matematikundervisningen bör utformas med detta som utgångspunkt. Det gäller samtliga linjer.

Det är av synnerligen stor vikt att matematikens tillämpning inom andra ämnesområden beaktas i undervisningen. Kursen bör på alla punkter belysas med meningsfyllda tillämpningar. Det är naturligt att dessa hämtas från t. ex. ekonomi och samhällsvetenskap i SE-kursen och från naturvetenskap och teknik i NT-kursen.

Som tidigare framhållits bör matematiken i möjligaste mån framställas som en enhet, där algebra, geometri och funktionslära ingår som integrerade delar. Detta innebär bland annat att mängdlärans metoder utnyttjas på ett enhetligt sätt, att det allmänna funktionsbegreppet, som införs redan i första årskursen, kommer till riklig användning, att funktionsaspekterna av trigonometrin framhålls osv. Kursplanen innebär ett förslag till en sådan integrerad kurs, där de olika momenten i stort sett uppräknas i en tänkbar kronologisk ordning. Helt konsekvent är denna uppräkning inte, då detta skulle medföra en alltför stor splittring av kursen i små delmoment. Det bör framhållas att många andra anordningar är logiskt och pedagogiskt möjliga.

I detta sammanhang kan nämnas att undervisningen bör ge historiska aspekter och utblickar på matematiken. Detta har stort principiellt värde och underlättar ofta elevernas förståelse för matematiken. Eleverna bör t. ex. få höra något om differential- och integralräkningens historia, t. ex. Arkimedes och Newtons insatser. Vidare kan sannolikhetslärans historia framhållas. Kunskap om den historiska utvecklingen av uppfattningen om sannolikhetsbegreppet underlättar förståelsen av detsamma.

Genom den snabba utvecklingen och den

ökade tillämpningen av datamaskiner har numeriska metoder stor betydelse. Detta bör beaktas inom olika avsnitt av kursen. Sålunda bör numeriska metoder att lösa ekvationer, numerisk beräkning av integraler och anpassning av polynom till givna koordinator genomgås. Möjligheten att illustrera beräkningar med flödesschema bör uppmärksammas.

Räknestickan och räknemaskinen skall användas vid numeriska räkningar. Förmåga till överslagsräkning i olika situationer är väsentlig och bör tränas. I målsättningen ingår att uppöva den numeriska räknefärdigheten. Detta bör beaktas inom kursens samtliga avsnitt.

Matematikundervisningen bör vänja eleverna vid ett klart och exakt uttryckssätt vid genomförande av bevis och logiska resonemang. Detta är naturligtvis en målsättning som inte tillkommer matematiken enbart. Matematiken erbjuder emellertid kanske mer än flertalet ämnen tillfällen till analys och genomförande av resonemang, till diskussion av betydelsen av väldefinierade begrepp osv.

För undervisningen inom de olika kurserna gäller följande:

NT-kursen:

I 19.3, s. 255, och i kommentarerna i 19.4.1.2, s. 260, har ingen skillnad gjorts på den naturvetenskapliga och den tekniska kursen. Man bör dock för tekniskt inriktade elever välja tillämpningsexempel från tekniken i större utsträckning än för naturvetenskapligt inriktade.

SE-kursen:

Undervisningen bör ske mot bakgrunden av att eleverna studerar matematik från andra utgångspunkter än elever som läser NT-kursen. Detta gäller framför allt i årskurs 1.

De som läser denna kurs i årskurs 1 består dels av sådana som slutar sin matematik med detta år, dels av sådana som fortsätter sina studier i ytterligare två år. Undervisningen bör därför inriktas på att ge de förstnämnda en i möjligaste mån avrundad kurs men även att ge de senare de förkunskaper de behöver för studiet av funktionslära, sannolikhetslära och statistik i de två högsta årskurserna.

Många avsnitt har i den detaljerade årskursfördelningen och i kommentarerna samma lydelse som i NT-kursen. Detta innebär naturligtvis inte att undervisningen skall vara densamma. Ytterst viktigt är att man inom SE-kursen beaktar matematikens tillämpning inom ämnesområden som intresserar eleverna. I årskurs 1 kan man om tiden tillåter det även behandla stoff från moment 7 (potenser), 13 (logaritmer) eller 18 (derivator, förberedande behandling).

E-kursen:

Inom det ekonomiska livet används matematiska och statistiska hjälpmedel i stor utsträckning. Oavsett vilken studieväg eleverna väljer i de senare årskurserna kan åtskilliga av dem i förvärvslivet förmodas möta enkla uppgifter av direkt beräkningskaraktär.

På E-kursen bör inom varje avsnitt ges tillämpningar av främst ekonomisk natur. Merkantila förlopp och därtill hörande terminologi hör till andra ämnen, t. ex. redovisning, vilket förutsätter ett nära samarbete mellan ämnena. Till illustration av det allmänna funktionsbegreppet erbjuder ekonomin några exempel, såsom utbudsfunktion, efterfrågefunktion, totalkostnad, medelkostnad och intäkt. Som motivering för derivatans införande kan förutom dess geometriska betydelse användas exempel från ekonomin, såsom gränskostnad och elasticitet. Bland maximi- och minimiproblem kan behandlas bestämmande av maximal vinst, maximal intäkt, minimal kostnad, minimal medelkostnad osv.

19.4.1.2. *Kommentarer till speciella kursmoment*

Nedan ges anvisningar för behandlingen av de olika avsnitten av kursplanen. I många fall ges en precisering av kursens omfattning. Kommentarerna är endast att anse som rekommendationer angående vad som bör behandlas.

Numreringen är här identisk med årskursfördelningens.

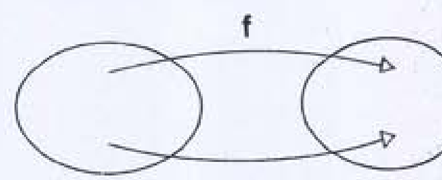
1 NTSE. *Mängdlära:* I hela kursen skall då så är lämpligt användas symboler och begrepp från mängdläran. Följande begrepp och symboler bör användas: mängd, delmängd (symbolerna $\subseteq$ och $\subset$), symbolerna $\in$ och $\notin$, symbolerna $=$ och $\neq$, union (symbolen $\cup$), snitt (symbolen $\cap$), komplement (symbolen $\complement$), symbolen $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ som beteckning för en mängd med elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, samt den tomma mängden (symbolen $\varnothing$).

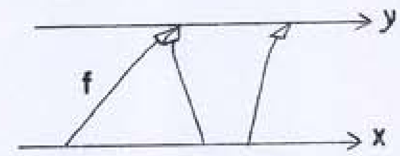
Avsikten är inte att ge en självständig kurs i mängdlära utan att underlätta förståelsen och beskrivningen av begrepp och satser såsom vid diskussioner av olika talområden, lösning av ekvationer och olikheter, induktionsbevis, definition av funktion och gränsvärde, definition av integral och vid räkning med sannolikheter.

Det är lämpligt att inte ge alla begrepp och beteckningar från mängdläran i ett sammanhang utan att successivt införa dem allteftersom de kommer till användning.

De logiska symbolerna $\Rightarrow$ "medför" och $\Leftrightarrow$ "är ekvivalent med" bör användas. I samband härmed diskuteras några begrepp inom logiken såsom implikation, ekvivalens och negation.

2 NTSE. *Det allmänna funktionsbegreppet:* Begreppet kan definieras som en avbildning av en mängd (definitionsmängd) på en annan mängd (värdemängd) så att till varje element i definitionsmängden hör exakt ett element i värdemängden eller som en mängd av par. Funktionsbegreppet exemplifieras med funktioner av olika slag som åskådliggörs med mängdfigurer såsom i nedanstående figurer.





Om funktionen f avbildar x på $f(x)$ används i denna kursplan beteckningen

$$x \curvearrowright f(x).$$

Med anknytning till behandlingen i grundskolan av enkla funktioner såsom $x \curvearrowright x^2$ tas den grafiska framställningen i koordinatsystemet upp. Funktioner av flera variabler berörs.

3 NTSE. *Rationella tal:* Från grundskolan är eleverna bekanta med de naturliga talen (N) $(=$ de positiva hela talen), de hela talen (Z) (positiva, negativa och 0), de rationella talen (Q) och i någon mån de reella talen samt räkning inom dessa talmängder. Samtidigt som dessa kunskaper befästs och utvidgas bör en mera systematisk genomgång göras av de olika talmängderna för att underlätta för eleverna att förstå och lära känna de olika talmängdernas egenskaper. Genomgången bör leda fram till en förtrogenhet med lagarna för räkning i mängden av rationella tal såsom kommutativa, associativa och distributiva lagarna, egenskaper hos talen 0 och 1, annulleringslagar samt lagar för räkning med olikheter.

Man behöver inte ge en uppsättning lagar som fullständigt karaktäriserar de rationella talen. Problemställningen bör dock beröras.

Framställningen bör börja med de naturliga talen och de lagar som gäller för räkning i denna mängd. Den utvidgas sedan att omfatta de hela talen, så att alla subtraktioner blir utförbara. Denna mängd utvidgas sedan till de rationella talen, så att divisioner med tal $\neq 0$ blir utförbara.

I detta sammanhang kan gruppbegreppet beröras.

Vid arbetet med de olika talmängderna utgör tallinjen ett utmärkt hjälpmedel.

Elevernas kunskaper i räkning med rationella och negativa tal befästs. Vid räkning med absolutbelopp behandlas bl. a. triangelolikheten.

Målsättningen med momentet är att ge grunden för det fortsatta arbetet i matematik på gymnasiet. Det bör behandlas grundligare på NT-kursen än på de övriga.

Potens med hel exponent behandlas. Överslagsberäkning övas. Räknestickan används från terminens början.

4 NTSE. *Linjära ekvationer, ekvationssystem och olikheter:* Behandlingen av detta moment kan tas upp parallellt med föregående.

Det bör på detta stadium ingående klarläggas vad en ekvation innebär. Här är mängdläran till stor nytta. Begreppet lösningsmängd införs såsom den mängd vars element är de värden på variabeln för vilka ekvationen är satisfierad. Ekvationer vars lösningsmängd är hela Q, olika delmängder av Q eller den tomma mängden $\emptyset$ behandlas. Ekvationer med parametrar eller där absolutbelopp ingår ger ett rikt diskussionsmaterial. Vid lösningen av ekvationer tillses att räkningarna kan ske i båda riktningar eller att prövning genomförs. Motsvarande gäller ekvationssystem och olikheter.

Linjära ekvationssystem med fler än två obekanta löses. Diskussionen av lösbarheten av ett ekvationssystem med två obekanta bör illustreras i koordinatsystemet.

Lösning av olikheter kräver inte ringa övning.

Som tillämpningsuppgifter bör behandlas problemställningar, som är typiska för studiegången.

5 NTSE. *Reella tal:* Inledningsvis kan man visa att ekvationen $x^2 = 2$ saknar lösning i Q. Man utvidgar mängden Q till att omfatta alla reella tal, så att alla punkter på tallinjen kan tilldelas en koordinat. De reella talen införs exempelvis som decimalutvecklingar. Någon fullständig teori för reella tal kan inte ges. Man får nöja sig med en diskussion av de reella talens "kontinuitetsegenskap" samt omtala att de vanliga räkne- och ordningslagarna gäller. Mängden av reella tal kallas här i fortsättningen R.

6 NTSE. *Kvadratrötter. Andragradsekvationen:* Elevernas kunskaper från grundskolan repeteras och räknelagar för kvadratrötter härleds. Vid andragradsekvationen genomförs inte någon ingående diskussion av samband mellan rötter och koefficienter och diskriminantens roll. Avsnittet kan behandlas kortfattat.

7 NT. *Potenser:* Exponentialfunktionen tas upp till behandling senare i funktionsläran. Det är därför lämpligt att i årskurs 1 postulera denna funktions existens. Ett sätt att införa potenser med godtycklig reell exponent är följande:

a^x är redan definierad för $x \in Z$. Man vill nu för ett godtyckligt men fixt tal $a > 0$, definiera en funktion $x \curvearrowright a^x$ med definitionsmängden R på sådant sätt att

1) a^x har kvar sin tidigare innebörd då $x \in Z$
2) $a^x\, a^z = a^{x+z}$ för x och $z \in R$
3) $(a^x)^z = a^{x \cdot z}$ för x och $z \in R$
4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ för $x \in R$ och $b > 0$.
5) $x > z \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^z \text{ för } a < 1 \\ a^x = a^z \text{ för } a = 1 \\ a^x > a^z \text{ för } a > 1 \end{cases}$

Man meddelar sedan att dessa egenskaper räcker för att definiera a^x entydigt och visar att $a^{p/q}$ enligt 3) måste vara lösningen till $x^q = a^p$. Övriga potenslagar härleds.

Skrivsättet $\sqrt[n]{a}$ för $a^{1/n}$ omnämns, men någon räkning med högre rötter skall inte förekomma.

8 NTSE. *Närmevärden:* I samband med exempel diskuteras de fyra räknesättens användning på närmevärden. Det visas att vid addition och subtraktion av närmevärden de absoluta felen adderas och att vid multiplikation och division de relativa felen approximativt adderas. Härigenom erhålls också en förberedelse för gränsvärdesbehandlingen senare. Räkning med närmevärden är ett viktigt avsnitt inte minst för många tillämpningar av matematiken. Hithörande problem får inte försummas t. ex. när det gäller numeriska data i uppgifter.

Linjär interpolation behandlas.

9 NT. *Vektorer i planet:* Elevernas geometrikunskaper från grundskolan bör repeteras. Denna repetition görs lämpligen successivt i samband med att de olika begreppen och satserna används i gymnasiets geometriundervisning.

Vid införandet av vektorbegreppet kan flera vägar väljas. Man inför t. ex. begreppet riktad sträcka och kallar två riktade sträckor ekvivalenta, om de är parallella och lika långa. På detta sätt blir de riktade sträckorna i planet indelade i klasser. Varje sådan klass kallas en vektor. Nollvektor definieras. Här kan begreppet ekvivalensrelation behandlas.

De kommutativa och associativa lagarna för addition av vektorer bevisas. Om man definierar vektorer som en klass av riktade sträckor, ingår i ett fullständigt bevis att man visar att ett resultat gäller oförändrat, vilken representant i klassen av riktade sträckor man än väljer. Att göra detta konsekvent tynger emellertid framställningen. Man kan nöja sig med att påpeka behovet. Redan här är det lämpligt att ta upp olika användningar av vektorbegreppet såsom hastighet och kraft.

Produkten $c \cdot \boldsymbol{v}$ där c är ett godtyckligt reellt tal definieras. De kommutativa, associativa och distributiva lagarna diskuteras. En fullständig genomgång av alla fall beroende på talets c tecken behöver inte göras.

Det visas att en vektor kan uppdelas i en summa av två vektorer parallella med två givna icke-parallella vektorer. Entydighetsbevis behöver inte genomgås.

Innan man behandlar koordinatframställning av vektorer i planet, kan man visa att alla vektorer som är parallella med en given vektor $\boldsymbol{v}$ kan skrivas $t \cdot \boldsymbol{v}$ och på detta sätt erhålla koordinatframställning av endimensionella vektorer.

Begreppet basvektor införs. Räkneregler för koordinater till en vektor behandlas t. ex.

$$(x_1,y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$c\ (x_1, y_1) = (cx_1, cx_2)$$

osv.

10 SE. *Vektorer i planet:* Jämfört med NT-kursen måste genomgången göras mycket kortfattad. Vektorer åskådliggörs geometriskt, adderas och multipliceras med tal och koordinatframställning av vektorer behandlas. Samtidigt repeteras den geometri som behövs.

11 NTSE. *Det rätvinkliga koordinatsystemet:* Den grafiska framställningen av funktioner innefattar åskådliggörande av linjära och andra enkla funktioner genom prickning av punkter, diskussioner av villkoret för att en kurva är bilden av en funktion, anpassning av en kurva till numeriskt givna värdepar och en förberedande diskussion av kontinuitetsbegreppet. Även funktioner med diskreta definitionsmängder och värdemängder åskådliggörs.

I NT-kursen beräknas koordinaterna för en sträckas mittpunkt och en triangels tyngdpunkt.

12 NTSE. *Den linjära funktionen:* Det visas med hjälp av vektorer att den grafiska bilden av den linjära funktionen $x \curvearrowright kx + 1$ är en rät linje som inte är pa-

rallell med y-axeln samt omvändningen till denna sats. Formeln

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (x_1 \neq x_2)$$

för riktningskoefficienten genomgås.

Övning i att bestämma linjära funktioner ur givna villkor ges.

Begreppet proportionalitet behandlas med praktiska tillämpningar.

Elevernas kunskaper i procenträkning befästs och utvidgas; särskilt betonas därvid användning av decimaltal.

Den allmänna formen $ax + by + c = 0$ för den räta linjen behandlas. Linjära olikheter i två variabler och linjär interpolation belyses grafiskt.

13 NT. *Logaritmer:* Avsikten med denna förberedande behandling av logaritmer är att införa logaritmbegreppet, vilket fordras för vissa tillämpningar. Behandlingen inskränks till 10-logaritmer.

På grund av definitionen av potens (villkor 5 i punkt 7) inser man att ekvationen $10^x = a$ $(a > 0)$ har högst en lösning. Man accepterar att den har precis en och betecknar denna log a. Man kan här beröra begreppet invers funktion. Om man så önskar behöver inte några logaritmlagar härledas utan numerisk räkning kan helt återföras på räkning med potenser. Principerna för numerisk räkning med fyrställig logaritmtabell av enkla uttryck av grundtyperna $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ och a^b genomgås.

Vid numerisk räkning bör normalt räknestickan användas. Principerna för interpolation i tabeller genomgås. I de flesta fall bör man dock använda tabellerna utan att interpolera. I praktiken har man i regel tillgång till bättre hjälpmedel än interpolation i en tabell, om större noggrannhet krävs.

Eleverna bör av givna data i en uppgift kunna avgöra vilken noggrannhet som krävs och om räknesticka, tabell eller ännu noggrannare metoder måste tillgripas. Framgår detta inte ur de givna värdena bör efter uppgiften meddelas vilken noggrannhet som fordras.

Ekvationer av typerna $x^a = b$ och $a^x = b$ löses.

14 NTSE. *Räknesticka:* Eleverna övas i att multiplicera, dividera, beräkna kvadratrötter och använda reciprokskalan. På NT-kursen bör man dessutom behandla bestämning av logaritmer och trigonometriska funktioner samt användning av exponentialskalor.

På NT-kursen genomgås räknestickans teori, vilket på övriga kurser får uppskjutas tills logaritmer behandlats.

Avsnittet bör påbörjas tidigt på höstterminen med de enklaste momenten.

15 NTSE. *Datamaskiner:* Binärt talsystem behandlas kortfattat. Representation av information i binär eller annan form på hålremsa, hålkort och magnetband omnämns. Ett flödeschema (blockdiagram) över något enkelt program analyseras. Uppbyggnaden av en datamaskin med centralenhet, styrenhet, minnen samt in- och utorgan presenteras. Vidare ges exempel på maskinspråksorienterade och problemorienterade programmeringsspråk samt användning av kompilator. I anslutning härtill kan man diskutera några logiska kopplingskretsar och i korthet beröra Boolsk algebra. Där så är möjligt anordnas ett studiebesök vid en datamaskinanläggning. Momentet behandlas på 3—4 lektioner.

16 NT. *Trigonometriska fuktioner:* Vinkelbegreppet generaliseras. Man kan redan här införa bågmått för vinklar och i fortsättningen arbeta parallellt med grader och radianer.

De trigonometriska funktionerna definieras för godtyckliga vinklar. Cotangenten behandlas sparsamt. Period definieras. Formeln $\boldsymbol{v} = r\,(\cos\theta, \sin\theta)$, där $r = |\boldsymbol{v}|$ och θ är riktningsvinkeln för v, behandlas. Vid användning av de trigonometriska tabellerna behöver man formler för $90°-v$, $180°-v$, $v-180°$, $360°-v$ och $-v$. Vid utnyttjandet av de trigonometriska funktionerna arbetas normalt med en decimals noggrannhet på vinkeln, vilket i allmänhet är tillräckligt för tillämpningarna.

Triangelsolveringar inskränks till enkla fall.

17 SE. *Trigonometriska funktioner:* Behandlingen inskränks till definition av de trigonometriska funktionerna med hjälp av enhetscirkeln och grafisk framställning av funktionerna $x \curvearrowright \sin x$ och $x \curvearrowright \cos x$. Avsnittet omfattar högst två lektioner.

18 NT. *Derivator, förberedande behandling:* Med utgångspunkt i praktiska situationer, såsom behandling av tangent och hastighet, diskuteras uttrycket

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

för små värden på $|h|$. Utan att man ger uttömmande definitioner behandlas gränsvärde och derivata. Genom en intuitiv behandling av gränsvärdebegreppet diskuteras derivator till polynom. Begränsningen i en dylik framställning påpekas, och därigenom förbereds den grundligare behandling som följer i årskurs 2. Tillämpningar på tangenter, hastighet, acceleration m. m. ges.

19 NTSE. *Beskrivande statistik:* Eleverna skall lära sig att behärska de vanligaste grafiska metoderna att presentera statistiska material och att beräkna tal som karaktäriserar väsentliga egenskaper hos ett statistiskt material. Man bör emellertid gärna i anslutning till något praktiskt exempel inledningsvis även diskutera statistikens övriga uppgifter, såsom olika problemställningar kring insamlandet och tolkandet av statistiska material. Redan på detta stadium kan man också motivera varför man behöver sannolikhetsbegreppet i statistiken.

Sammanställning av ett statistiskt material i en frekvenstabell behandlas. Härvid diskuteras olika möjligheter att välja klassbredden liksom hur man bör förfara med eventuella observationer som sammanfaller med klassgränser. I huvudsak behandlas följande grafiska bilder av ett statistiskt material: stolpdiagram, histogram och summapolygon. Även cirkeldiagram och andra typer av diagram kan beröras. Man kan i detta sammanhang även visa med några exempel hur man populärt brukar illustrera statistiska material t. ex. vid jämförelser genom att teckna bilder av de aktuella storheterna. Exempel på missbruk av sådan metodik bör demonstreras.

Som exempel på lägesmått behandlas framför allt medelvärde, median och kvartiler. Även typvärdet kan omnämnas. Medianen definieras som mittobservationen vid ett udda antal observationer och som medelvärdet av de båda mittobservationerna vid ett jämnt antal. Vid klassindelat material beräknas median och kvartiler med utgångspunkt i summapolygonen. Några formler ges inte utan beräkningen genomförs med linjär interpolation. Av spridningsmått införs varians och standardavvikelse. Även variationsbredden kan omnämnas. Vid definition av variansen i ett material med n observationer skall divisionen utföras med $n-1$.

I samband med beräkning av medelvärden och varianser är det lämpligt att införa summatecknet och visa några räknelagar för detsamma. Numerisk beräkning av medelvärde, varians och standardavvikelse genomgås även för klassindelat material. Man bör undvika en omfattande formelapparat och kan nöja sig med att härleda hithörande formler för tre eller fyra observationer. Vid beräkning av medelvärden och varianser för större material övas eleverna i användning av räknemaskiner.

De statistiska material som demonstreras för eleverna och som används vid problem-lösning skall anknyta till olika tillämpningar av statistik inom t. ex. fysik, biologi, teknik, ekonomi, sociologi. Det är lämpligt att låta eleverna med hjälp av någon statistisk publikation eller annat källmaterial själva insamla något statistiskt material, som de sedan behandlar. Man kan även utföra något enkelt försök såsom att låta eleverna gissa längden av en sträcka, observera trafik eller utföra något slumpförsök som t. ex. kast med tärningar och sedan behandla det erhållna statistiska materialet.

På SE-kursen behandlas även index. Detta bör ske så att elevernas kunskaper i procenträkning befästs och utvidgas. Inledningsvis genomgås sådan indexberäkning som endast innebär en omproportionering av givna tal så att ett av dem eller deras medelvärde är lika med 100. Som exempel kan nämnas jämförelse av produktions- och försäljningsvolymer under olika tidsperioder. Olika typer av index behandlas. Metoden med kedjeindex omnämns. Man kan även beröra några officiella index.

På SE-kursen är det lämpligt att avsluta detta moment med en kort inledning till sannolikhetsläran. Man kan t. ex. behandla de relativa frekvensernas stabilitet och nämna något om sannolikheter i samband med ändliga utfallsrum. Förutom detta tillägg på SE-kursen bör detta avsnitt behandlas fylligare inom denna kurs än inom NT-kursen.

20 NT. *Skalärprodukt av vektorer:* Skalärprodukten $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ definieras t. ex. som $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos v$, där v är vinkeln mellan vektorerna, varvid det urartade fallet där $\boldsymbol{a}$ eller $\boldsymbol{b}$ är nollvektorn behandlas separat. Vidare behandlas räkneregler för skalärprodukt, skalärprodukten i koordinatframställning (denna kan alternativt tas som definition på skalärprodukt), sambandet $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2$, beräkning av vinklar mellan vektorer (även givna med koordinater), projektion av en vektor på en annan vektor, normalvektor till en given vektor och formeln för triangelns area i koordinatsystemet. Eventuellt kan också vektorprodukt behandlas med anknytning till tillämpningen.

Användningen av skalärprodukt i fysik belyses.

21 NT. *Triangelteoremen:* Sinus- och cosinusteoremet härleds. Cosinusteoremet erhålls direkt ur räknelagar för skalärprodukt. Den trigonometriska formeln för triangelns area (ytteoremet) behandlas. Endast omedelbara tillämpningar på dessa teorems användning vid triangelsolveringar ges.

22 NT. *Rationella funktioner:* En systematisk genomgång av de fyra räknesätten med polynom görs. Faktorteoremet bevisas liksom att ett n:te grads polynom inte kan ha mer än n faktorer av formen $x - a$.

Lösning av ekvationer av högre grad än två inskränks till enkla typer, där rötterna kan erhållas genom faktoruppdelning eller kan återföras på andra enkla ekvationer samt ekvationer där man känner någon rot. Metoder för uppsökande av heltals- och rationella rötter behöver inte genomgås.

Av ekvationssystem av högre grad behandlas endast enkla fall där ena ekvationen är linjär eller man omedelbart kan erhålla en linjär ekvation.

De flesta ekvationer och ekvationssystem av högre grad kan inte lösas med algebraiska metoder. Därför bör även i gymnasiet det principiellt viktigaste sättet att lösa dem vara grafiska och numeriska metoder. Detta behandlas mer ingående under avsnitt 31.

Teckendiskussioner för rationella funktioner med hjälp av faktoruppdelningar genomförs. Som tillämpning löses icke-linjära olikheter genom teckendiskussioner.

23 SE. *Polynom:* En genomgång av de

fyra räknesätten med polynom görs och faktorteoremet bevisas. Högregradsekvationer behandlas mycket kort. Som en inledning till funktionsläran diskuteras polynoms tecken genom faktoruppdelningar. Som tillämpning löses någon icke-linjär olikhet genom teckendiskussion.

24 NT. *Trigonometriska formler. Bågmått:* Vid härledning av additionsformler bör vektorer användas. Formler för dubbla och halva vinkeln härleds. Eventuellt kan införandet av bågmått göras i samband med gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

då man är i stånd att ge en bättre motivering för detta mått.

25 NT. *Gränsvärden:* Gränsvärden då $x \to \infty$, $x \to -\infty$ *och* $x \to a$ ges en korrekt definition. Såsom illustration ritas funktioner i koordinatsystemet eller används mängdfigurer, varvid begreppet omgivning kan användas. Vidare ges exempel på funktioner som saknar gränsvärde och funktioner med oegentligt gränsvärde. I något fall görs en bestämning till ett givet ε av ett ω sådant att

$$x > \omega \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

respektive

$$|x-a| < \omega \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Räknelagar för gränsvärden genomgås omfattande summa, produkt och kvot av gränsvärden samt eventuellt regeln

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim f(x) \leq \lim g(x).$$

Man kan göra dem troliga utan bevis eller bevisa någon av dem.

26 NT. *Kontinuitet:* En funktion f sägs vara kontinuerlig för $x = a$, om den är definierad för $x = a$, har ett gränsvärde då $x \to a$ och det gäller

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Exempel på kontinuerliga och diskontinuerlig funktion ges.

Följande satser ges:

En summa, skillnad, produkt och kvot (nämnaren $\neq 0$) av kontinuerliga funktioner är kontinuerlig.

En kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall är begränsad.

En kontinuerlig funktion på ett slutet, begränsat intervall har ett största och ett minsta värde.

En i ett intervall kontinuerlig funktion antar alla värden mellan två antagna.

Vissa av satserna är konsekvenser av räkneregler för gränsvärden. Inga bevis behöver genomgås.

Det bevisas att rationella och trigonometriska funktioner är kontinuerliga i sin definitionsmängd.

27 SE. *Gränsvärde och kontinuitet:* Begreppen genomgås mycket översiktligt. Man får i huvudsak inskränka sig till att åskådliggöra begreppen geometriskt. Bestämningar av de gränsvärden som behövs för härledning av derivator kan genomföras intuitivt.

28 NT. *Derivata:* Eleverna övas i att beräkna derivatan till enkla funktioner ur definitionen. Termen deriverbar funktion införs och det visas att deriverbarhet medför kontinuitet men inte omvänt. Tangentens ekvation härleds.

Differentialbegreppet används ofta vid tillämpningar inom exempelvis teknik och naturvetenskap och bör därför diskuteras i matematikundervisningen. Differentialen tolkas geometriskt och beteckningen $\frac{dy}{dx}$ förklaras.

29 SE. *Derivata:* Eleverna övas i att beräkna derivatan till enkla funktioner såsom bl. a. $x \curvearrowright \frac{1}{x}$ direkt ur definitionen. Deriveringsregler härleds och polynom deriveras. Tangentens ekvation skrivs upp i några exempel.

30 NT. *Sammansatt funktion:* Härledning av derivatan till den sammansatta funktionen behöver inte ges för det generella fallet.

Vid beräkning av derivator med implicit derivering betonas metodens beroende av kännedom om att ekvationen definierar en funktion och att denna får deriveras. Avsnittet görs kort.

31 NT. *Samband mellan derivata och monotonitet. Maxima och minima:* En funktion f sägs vara växande i ett intervall I om

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in I$.

Även strängt växande, avtagande och strängt avtagande definieras. Satsen

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strängt växande i I,

som behövs vid kurvkonstruktioner och extremvärdebestämningar, bevisas lätt med medelvärdessatsen. Denna säger att om f är deriverbar i det slutna intervallet I, gäller $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)\, f'(\xi)$ för x_1 och $x_2 \in I$ och för något ξ mellan x_1 och x_2. Medelvärdessatsen görs plausibel geometriskt och beviset utelämnas. Att enbart definiera begreppet växande i en punkt och sedan utan vidare dra slutsatsen att en funktion som är växande i varje punkt i ett intervall I har egenskapen

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$ för alla $x_1, x_2 \in I$

får anses otillfredsställande. Det är här som i övrigt i matematikundervisningen att föredra att öppet erkänna svårigheterna och i stället noggrant ange någon sats som behövs för en korrekt framställning men lämna den obevisad.

Motsvarande sats för $f'(x) < 0$ ges, och någon form av omvändningssats anges.

Lokala maxima och minima definieras. Det visas att om funktionen är deriverbar så är derivatan $= 0$ då funktionen har maximum eller minimum. Vidare visas att om derivatan är positiv (negativ) i en punkterad vänsteromgivning och negativ (positiv) i en punkterad högeromgivning till $x = a$ har funktionen maximum (minimum) för $x = a$.

Ovanstående tillämpas på konstruktion av kurvor till rationella och trigonometriska funktioner samt på maximi- och minimiuppgifter. Asymptotbestämningar görs. Stoff till de senare uppgifterna kan fås bl. a. från geometrin, naturvetenskaperna, tekniken och ekonomin.

Vid kurvkonstruktioner och extremvärdesbestämningar hos trigonometriska funktioner uppstår behov av att lösa trigonometriska ekvationer. Man bör inte välja mer komplicerade funktioner än att de uppkomna trigonometriska ekvationerna inskränker sig till ett fåtal enkla typer. Särskild uppmärksamhet ägnas funktionen

$$a \sin x + b \cos x,$$

som är av stor betydelse inom fysik och teknik. Genom att skriva den

$$a \sin x + b \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

kan den tolkas som y-koordinaten hos en vektor $\boldsymbol{v}$, som är summan av de vinkelräta vektorerna

$$a\ (\cos x, \sin x)$$

och

$$b\ \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right), \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Vektorn $\boldsymbol{v}$ skrivs

$$c\ [\cos (x + \varphi), \sin (x + \varphi)],$$

där c och φ bestäms med hjälp av en rätvinklig triangel i koordinatsystemet. Detta förfaringssätt används inom elläran vid representation av växelströmmar. Man erhåller på detta sätt en metod att lösa ekvationen

$$a \sin x + b \cos x + d = 0.$$

Numerisk lösning av ekvationer behandlas. Grafisk lösning med förstoring genomgås samt även metoden att göra en approximation med en linjär funktion genom två punkter eller med en linjär funktion med samma derivata i en given punkt. Även numerisk lösning med iteration kan omnämnas.

32 NT. *Högre derivator:* Derivator av andra och högre ordning definieras. Orien-

tering lämnas om inflexionspunkter och konvexitet. En kurva till en deriverbar funktion sägs vara konvex om den ligger över sin tangent. Avsnittet görs kort.

33 NT. *Integraler:* Som inledning till integraler kan man diskutera areaberäkning och därvid använda en liknande metod som vid definition av integralbegreppet. Man kan också behandla något exempel från fysiken, exempelvis arbetsberäkning vid variabel kraft.

Integralen till en funktion f på ett intervall $a \leqq x \leqq b$ kan definieras på t. ex. följande sätt. Man inför en sträckvis konstant funktion g given genom

$g(x) = c_i$ för $x_{i-1} \leqq x < x_i$
$i = 1,2,3,\ldots n$

där c_i $(i = 1,2,3,\ldots n)$ är tal och x_0 $(=a)$, $x_1, x_2, \ldots x_n$ $(= b)$ är en indelning av intervallet $a \leqq x \leqq b$. Man definierar integralen till g såsom summan

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})$$

Därefter bildar man mängden av integraler till alla sträckvis konstanta funktioner vilka är mindre än eller lika med f och mängden av integraler till alla sträckvis konstanta funktioner vilka är större än eller lika med f.

Om det finns exakt ett tal som är större än eller lika med alla tal ur den första mängden och mindre än eller lika med alla tal i den andra mängden, är funktionen f integrerbar och detta tal är funktionens integral, som skrivs

$$\int_a^b f(x)dx.$$

I numeriska exempel beräknas approximativt integraler med hjälp av sträckvis konstanta funktioner. Simpsons formel omnämns.

Det meddelas utan bevis att kontinuerliga funktioner är integrerbara.

Följande räknelagar bör genomgås, varvid huvuddragen av bevisen kan antydas:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

sedan man definierat $\int_a^b f(x)dx$ för $b < a$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Följande sats visas:

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

och f är kontinuerlig medför $F'(t) = f(t)$. Denna sats utnyttjas för att med hjälp av en primitiv funktion till f beräkna integraler. Med hjälp av medelvärdessatsen visas att två primitiva funktioner till en funktion skiljer sig åt med en konstant. Det är lämpligt att dröja med att införa symbolen $\int f(x)dx$ för primitiv funktion. När man senare kommer till partiell integration och integration med substitution, är dock denna beteckning mycket praktisk.

Med hjälp av integraler utförs beräkning av arean av olika områden. Tillämpningar på integraler från fysik m. m. ges, t. ex. beräkning av arbete, tyngdpunkt, tröghetsmoment och hastighet ur given acceleration.

34 NT. *Logaritmfunktioner:* När behandling av logaritm- och exponentialfunktionerna här återupptas är målet bl. a. att studera deras derivator. Talet e och naturliga logaritmer måste därför införas. Detta kan göras på flera sätt.

Den naturliga logaritmen $\ln x$ kan införas med hjälp av integraler. Man definierar då för $x > 0$

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Med hjälp av egenskaper hos integraler och kontinuerliga funktioner kan visas: $\ln x$ är deriverbar (och kontinuerlig) med derivatan $\frac{1}{x}$, den är monoton och värdemängden är hela R och den uppfyller logaritmlagarna. Talet e definieras sedan som lösningen till $\ln x = 1$. Ett närmevärde för e beräknas. Att genomföra alla detaljer är tidskrävande. För en annan metod se avsnittet 36 nedan.

35 NT. *Inversa funktioner:* Villkor för existens av invers funktion anges och åskådliggörs grafiskt. Strängt monotona funktioner visas ha invers, varvid det meddelas utan fullständigt bevis att denna blir kontinuerlig om den ursprungliga funktionen är det. Vid exemplifieringen kan man förutom de rationella funktionerna använda de cyklometriska funktionerna $x \curvearrowright \arcsin x$, $x \curvearrowright \arccos x$ och $x \curvearrowright \operatorname{arctg} x$. Denna funktionsklass behandlas dock kortfattat.

36 NT. *Exponentialfunktioner:* Om logaritmfunktionen införs som i asvsnittet 34 kan funktionen $x \curvearrowright e^x$ introduceras med hjälp av invers funktion. Man kan också införa e på annat sätt, t. ex. starta med att definiera e^x såsom gränsvärdet

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

och via invers funktion införa logaritmfunktionen. En del bevis måste därvid förbigås.

Användandet av tabeller övas. Tillämpningar ges med t. ex. kontinuerlig ränta, organisk tillväxt och radioaktivt sönderfall.

Logaritmisk funktionsskala samt användning av enkel- och dubbellogaritmiskt papper behandlas.

37 NT. *Potensfunktionen:* Egenskaperna hos potensfunktioner kan härledas med hjälp av omskrivningen $x^a = e^{a \ln x}$ för $x > 0$.

Särskild uppmärksamhet ägnas funktionen $x \curvearrowright \sqrt{x}$ och sammansatta funktioner med kvadratrötter såsom $x \curvearrowright (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ och $x \curvearrowright (1 - x)^{\frac{1}{2}}$.

Här behandlas den geometriska betydelsen av ekvationerna

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ och } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

(cirkel, ellips och hyperbel). Hyperbelns asymptoter härleds. Benämningen kägelsnitt och dessas brännpunktsegenskaper förklaras eventuellt med någon historisk kommentar.

38 SE. *Exponential- och logaritmfunktioner:* För införandet av potens se avsnitt 7. Derivatan till a^x kan inte härledas inom denna kurs. Man kan dock göra följande. Derivatan till a^x definieras som

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

I det sista uttrycket är sista faktorn oberoende av x. Genom numeriska exempel eller grafisk metod görs troligt att detta gränsvärde existerar och beror på a. Talet e definieras som den bas för vilket detta gränsvärde är 1.

Med hjälp av invers funktion definieras logaritmfunktionen. Funktionens egenskaper (logaritmlagarna) diskuteras. Principerna för tiologaritmernas användning vid numeriska beräkningar genomgås. Vid utförandet av numeriska räkningar skall i allmänhet räknestickan användas. Ekvationer av typerna $a^x = b$ och $x^a = b$ löses. Den naturliga logaritmfunktionens derivata bestäms. Praktiska tillämpningar ges.

Principen för räknestickan genomgås.

39 SE. *Samband mellan derivata och monotonitet. Maxima och minima:* Monotonitet definieras som i avsnitt 31. De satser som behövs vid bestämmande av en funktions monotonitet, maxima och minima anges i allmänhet utan bevis. Vid

diskussioner av derivatans tecken hos polynom behöver man inga satser om faktoruppdelning av polynom, om man, sedan derivatans nollställen beräknats, bestämmer derivatans tecken genom att beräkna ett värde för derivatan mellan nollställena. Man kan också avgöra om nollställen till derivatan motsvarar maximum eller minimum genom att beräkna funktionsvärden mellan derivatans nollställen.

Tillämpningar av olika slag ges från såväl ekonomi och samhällsvetenskap som naturvetenskap och teknik. Grafisk lösning av ekvationer är ett viktigt avsnitt som erbjuder ett utmärkt fält för övning i numeriska räkningar och räkning med närmevärden. Eleverna skall lära sig att göra förstoringar och kombinera dem med metoder med systematisk prövning för att få bättre närmevärden. Fullgörande av dylika uppgifter kräver ofta lång tid, varför räkningarna inte får göras omfattande.

40 S. *Integraler:* Som en introduktion kan man såsom föreslogs i avsnitt 33 syssla med areaberäkning. Arean under en kurva beräknas genom rektangelapproximation. Integralen definieras genom ett liknande resonemang. Sambandet mellan integralen och den primitiva funktionen visas, varvid huvuddragen av beviset anges. Enkla polynom och exponentialfunktioner integreras och även andra tillämpningar än areaberäkning ges.

41 NT. *Komplexa tal:* Vid utvidgning av de reella talen till de komplexa kan man, på grundval av elevernas erfarenheter från tidigare utvidgningar t. ex. från naturliga tal till hela tal, göra en mer fullständig diskussion. Med hjälp av principen om räknelagarnas permanens kan man analysera hur man skall räkna i en talmängd där ekvationen $x^2 = -1$ har en lösning och som omfattar de reella talen samt där de räknelagar som gäller för reella tal också gäller. Man kan också diskutera frågan hur man med utgångspunkt i de reella talen kan konstruera de komplexa talen t. ex. genom talpar.

Argument och absolutbelopp för komplexa tal definieras. Det visas att vid multiplikation adderas argumenten och multipliceras absoluta beloppen.

De komplexa talen åskådliggörs grafiskt och man utreder sambandet mellan vektorer och komplexa tal. Ett komplext tal skrivs på polär form och de Moivres formel behandlas. Man definierar

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$
$$(i^2 = -1 \quad x,y \in R)$$

och meddelar vilka lagar som gäller för räkning med komplex exponent. Det räcker att bevisa t. ex.

$$e^z e^w = e^{z+w}$$
$$(z,\ w \text{ komplexa tal}).$$

Funktioner med de reella talen som definitionsmängd och de komplexa som värdemängd omnämns, liksom derivation och integration av sådana funktioner.

42 NT. *Differentialekvationer:* Av differentialekvationerna av andra ordningen behandlas huvudsakligen de homogena där den karaktäristiska ekvationen har reella rötter.

Som tillämpning på räkning med komplexa tal kan även fall där den karaktäristiska ekvationen har icke-reella rötter genomgås. Till inhomogena ekvationer med enkla högerled kan man verifiera lösningen. Exempel från fysik och teknik ges.

43 NT. *Integrationsmetoder:* Avsnittet görs kort. Generaliserade integraler berörs.

44 NT. *Approximation av funktioner med polynom:* Felet i approximation av polynom med andra polynom, då termer av högre gradtal utelämnas, undersöks liksom approximation av andra funktioner med polynom. Maclaurins formel med restterm omnämns. Faran av approximation utan uppskattning av resttermen eller felet betonas.

45 NT. *Vektorfunktion:* Med vektor-

hur eleverna fullgör sina hemuppgifter, så att han kan lämna särskild hjälp åt elever som behöver stöd. En stickprovskontroll någon gång är att rekommendera.

19.4.3. Hjälpmedel

Det är betydelsefullt att demonstrera mönsterlösningar till olika uppgifter i undervisningen. Det bör därför finnas möjlighet att anslå sådana i lärosalen. Om sådana behöver visas för hela avdelningen samtidigt kan det t. ex. ske med hjälp av skriftprojektor. Denna kan även utnyttjas för demonstration av diagram, tabeller m. m.

Möjligheterna att använda programmerade hjälpmedel av olika slag bör beaktas.

För undervisningen i rymdgeometri kan det vara lämpligt med några rymdgeometriska modeller. Vid undervisning i sannolikhetslära och statistik är det lämpligt att utföra praktiska försök för empiriskt studium av relativa frekvenser. Som exempel kan nämnas kast med ett eller flera mynt, kast med en eller flera tärningar, kast med ett eller flera häftstift, användning av tombola, apparat för demonstration av binomialfördelning osv.

Elektronisk utrustning för demonstration av funktioner och lösning av differentialekvationer kan utnyttjas.

Läroböckerna bör inte enbart användas som exempelsamlingar.

Tryckt material är det ojämförligt viktigaste medlet för kunskapsinhämtning i matematik. I viss utsträckning kan annat åskådningsmaterial användas såsom film, bildband, planscher och geometriska modeller. Statistiska material kan demonstreras för eleverna i form av färdigställda diagram på planscher.

De vid de skriftliga proven givna uppgifternas karaktär och svårighetsgrad skall varieras. Sålunda bör varje prov innehålla uppgifter både av huvudsakligen räknemässig karaktär och av teoretisk natur. En uppgift av det senare slaget kan vara att bevisa en sats som ansluter sig till någon genomgången. En sådan uppgift kan gärna innehålla flera moment av olika svårighetsgrad. Uppgifterna av detta slag bör inte vara ett förhör på t. ex. lärobokens bevis utan ge utrymme åt elevernas egen kombinationsförmåga. Varje skriftligt prov bör i regel gälla både områden som nyligen behandlats i undervisningen och områden som behandlats tidigare. De teoretiska uppgifterna bör dock avse moment som inte ligger alltför långt tillbaka. Vidare bör man undvika alltför speciella problem på tidigare avsnitt.

I vardera av årskurserna 2 och 3 är ett av de schemalagda proven centralt utfärdat. Se närmare II:4.4.7, s. 62. De centrala proven är av samma karaktär som övriga prov och bör därför inte förberedas på annat sätt än dessa. Utöver de skriftliga proven är det lämpligt att ge kortare prov under matematiklektioner, bl. a. i diagnostiskt syfte.

Vid val av uppgifter är det viktigt att läraren beaktar målet och anvisningarna för ämnet. Övervägande delen av uppgifterna bör vara sådana att de kan lösas av flertalet elever. Skrivningarna bör också ge de bättre eleverna möjlighet att visa sin förmåga. Vilka uppgifter som är av större svårighetsgrad bör dock framgå för eleverna t. ex. genom deras placering eller genom att maximipoäng för rätt lösning anges.

Proven bör utformas så att eleverna inte uppmuntras att förbereda sig genom att lösa ett stort antal problem inom ett litet område av kursen.

Eleverna bör alltid veta ungefär vad som kan anses såsom en medelprestation och vad som erfordras för de olika betygsstegen. Om resultaten blir avsevärt sämre än vad man väntat sig, bör detta medföra en korrigering av betygskalan.

Vid rättningen av de skriftliga proven används poängmetod, varvid varje uppgift tilldelas en för eleverna känd maximipoäng, som ges vid fullständigt korrekt behandling. Väsentliga formella brister, räknefel m. m. medför poängavdrag. I undantagsfall kan mycket förtjänstfulla lösningar ges extrapoäng utöver maximipoängen. Svårighetsgraden bör vara sådan att ca 50 % av totalpoängen skall motsvara medelgod prestation. Läraren skall vid rättningen kommentera felaktigheter så att eleverna utan svårighet inser vari felen ligger. Skrivningarna bör återlämnas snarast och helst inte senare än efter en vecka. Vid genomgången av skrivningen kan läraren kommentera vanliga fel och diskutera olika lösningsalternativ. Mönsterlösningen kan anslås i klassrummet eller demonstreras i skriftprojektor.

Vid de skriftliga proven bör eleverna få använda formelsamling. Det bör klargöras för eleverna att ett aktivt behärskande av formler och definitioner är en förutsättning för att de skall lyckas.

Den ovan föreslagna typen av skrivningar med uppgifter av varierande teoretisk och mer räknemässig karaktär torde ganska väl kontrollera och diagnostisera elevernas sätt att arbeta med en lagom avvägning mellan övningsräkning och teoristudium. För att hjälpa eleverna att få översikt över olika områden av kursen är det lämpligt att några gånger per termin ha ett muntligt förhör över ett större område av kursen, t. ex. omfattande flera beting.

Bedömningen av elevernas kunskaper i matematik får inte grundas enbart på skriftliga prov utan skall också ske genom direkt observation av deras aktivitet vid matematikundervisningen och med hjälp av muntliga förhör.

Läraren bör skaffa sig kännedom om

intresse för matematik finns många olika tänkbara uppgifter för *specialarbete* i ämnet. Eleven kan få i uppgift att i lärobok, gärna på ett främmande språk, eller speciellt skriven handledning studera nytt matematiskt stoff, lösa uppgifter inom detta och redovisa sitt kunnande med någon form av tentamen. Uppgiften kan också bestå i att genomföra ett praktiskt statistiskt arbete med insamlande, bearbetande och presentation av ett statistiskt material och lämpar sig då särskilt bra för grupparbete. Uppgiften kan väljas så att den innebär tillämpning av sådan statistisk metodik som behandlats i den ordinarie skolkursen. Den kan emellertid också innebära att eleven får lära känna någon ny statistisk metod. Man kan vidare tänka sig en uppgift inom numerisk analys, där eleven får sätta sig in i någon numerisk metod, t. ex. interpolation eller olika metoder för numerisk beräkning av integraler. Uppgiften kan då innebära att eleven får lära sig metodens teori och sedan tillämpar denna för att lösa förelagda numeriska uppgifter. Med tanke på den utveckling som äger rum inom datamaskinernas område mot allt enklare programmeringsmetoder kan man även tänka sig i något specialfall att uppgiften gäller programmering och beräkning på en datamaskin. Det normala torde dock vara att eleverna fullgör det numeriska arbetet på vanliga bordsräknemaskiner, som skolan bör ha tillgång till t. ex. på fysiklaboratoriet.

Uppgifter för specialarbete kan vidare väljas inom t. ex. följande områden: differentialekvationer, funktioner av flera variabler, matriser, modern algebra, icke-euklidisk geometri, talteori, olikheter, topologi, sannolikhetslära, statistik inferens, linjär programmering m. m.

Lärarens handledning är ofta väsentlig för att specialarbetet skall lyckas väl. Även en liten uppgift kan erbjuda oöverstigliga hinder, om eleven inte vet hur den skall angripas. Arbetet kan läggas upp på följande sätt: Eleven och läraren kommer överens om en bok eller avsnitt ur en bok som skall behandlas. Eleven studerar texten på egen hand. Lärare och elev träffas några gånger för diskussion av texten, och arbetet avslutas med ett skriftligt eller muntligt förhör.

Som en praktisk statistisk uppgift kan en grupp av elever t. ex. få genomföra en undersökning bland klass- eller skolkamraterna. Eleverna och läraren planlägger härvid undersökningen och beslutar vad man skall belysa och vilka statistiska metoder som skall användas. Ett frågeformulär utarbetas och detta besvaras av kamraterna. Materialet insamlas och redovisas i tabeller och diagram. Eventuellt kan någon uppställd hypotes prövas med statistiska metoder. Slutligen sammanställs en skriftlig rapport över undersökningen och en redovisning ges inför klassen vid någon lektion. I en praktisk statistisk uppgift av enklare karaktär kan vissa delar av ovanstående utelämnas, t. ex. på detta studium svårbemästrade hypotesövningar.

19.4.2.4. Studiebesök, exkursioner

Om möjlighet härtill föreligger, bör eleverna få göra studiebesök vid någon numerisk beräkningscentral, datamaskins- eller hålkortsanläggning.

19.4.2.5. Bedömning

För generella synpunkter på bedömning se II:4,4, s. 54.

Utformningen och bedömningen av de skriftliga proven måste anpassas till de förutsättningar som tidsramen ger. Sålunda bör man i regel inte kräva att eleverna skall göra en särskild renskrivning av sina lösningar. Givetvis måste ändå lösningarna vara snyggt och ordentligt uppställda. Det är därför av vikt att de vid skol- och hemarbete tillägnat sig goda arbetsvanor. De bör vänjas vid att omedelbart åstadkomma en konsekvent framställning.

spåra och registrera information. Detta kan framför allt ske, när man i årskurs 1 behandlar statistiskt källmaterial i form av statistiska publikationer, årsböcker o. d. Samtidigt bör förmågan att tolka och värdera informationen beaktas.

Det bör till sist understrykas att inlärning av matematik ofta kräver avsevärd tid. Det inhämtade stoffet behöver mogna. Av denna anledning kan det vara lämpligt att ibland lämna ett visst område en tid för att senare återkomma till detsamma. Vid valet av problemlösningsuppgifter har läraren också möjlighet att då och då återvända till redan behandlade områden.

19.4.2.3. Självständiga arbetsformer

Som förut framhållits kan *betingsläsning* förekomma inom samtliga avsnitt av matematikkursen.

Betingsperioderna bör omfatta förslagsvis en tid av två till fyra veckor. När ett nytt beting börjar, skall läraren ange betingets innehåll i detalj genom att meddela eleverna vilka kursmoment och arbetsuppgifter som betinget omfattar. Problem bör först och främst bestå av ett rikhaltigt och representativt urval av relativt enkla uppgifter inom kursmomentet. Dessutom bör betinget innehålla ett visst antal repetitionsuppgifter för att befästa och repetera tidigare inlärt stoff samt problem av något mer avancerad karaktär. Eventuellt kan man överväga att göra samtliga uppgifter frivilliga för eleverna.

Lektionstiden under betinget bör till största delen användas till genomgång av nytt stoff och genomgång av belysande tillämpningsuppgifter. Individuellt arbete under lektionerna med möjlighet för eleverna att få råd av läraren skall också förekomma. Närvaro vid den lektion som anslås till individuellt arbete behöver inte vara obligatorisk.

Läraren bör under betingets förlopp i största möjliga utsträckning kontrollera och handleda elever som har svårigheter. Rätt utnyttjad ger betingsläsningen läraren ökade möjligheter att individuellt ägna sig åt dessa elever. I förekommande fall kan även elever som ligger väl framme i kursen tjänstgöra som biträdande handledare.

Sista tidpunkt då betinget skall vara avklarat skall alltid anges vid betingets utdelande. Vid betingstidens slut kan en genomgång av vissa moment visa sig nödvändig. När det gäller problem kan härvid eleverna muntligt få redogöra för sina lösningar. Mönsterlösningar kan utarbetas av enskilda elever eller elevgrupper och anslås.

Eleverna kan då de arbetar individuellt fastna i mindre lämpliga metoder vid problemlösningen. Läraren bör ha uppmärksamheten riktad på detta under betingets förlopp och i förekommande fall leda in eleverna på bättre lösningsmetoder. I möjligaste mån skall läraren undvika att avbryta elevernas individuella arbete under lektionstid med meddelanden till hela klassen.

Läraren får en god överblick över betingsarbetets förlopp i stort genom att upprätta en betingstablå, som under betingstiden får cirkulera i klassen och där eleverna successivt kan markera hur långt de hunnit och ange lösta uppgifter.

Hur lång tid som skall ägnas åt de olika momenten i betinget beror på det behandlade områdets karaktär. På ett lättare område (t. ex. betinget "Skalärprodukt. Triangelteoremen", se 19.4.1.3, s. 275) behöver för genomgång hela klassen vara samlad ungefär hälften av tiden. När det gäller mer komplicerade kursavsnitt kan annan fördelning av tiden tänkas. Om förslagsvis 14 lektioner anslås åt betinget "Trigonometriska formler. Gränsvärden. Kontinuitet", kan cirka tio användas med hela klassen samlad, de övriga till individuellt arbete med frivillig närvaro och redovisning.

För elever med särskild fallenhet och