KOMMENTAR TILL GRUNDSKOLANS KURSPLAN OCH BETYGSKRITERIER I

matematik

Undervisningen i matematik skall ge eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på olika problem.

Skolverket

KOMMENTAR TILL
GRUNDSKOLANS KURSPLAN OCH BETYGSKRITERIER I

matematik

Skolverket ger ut kommentarer och referensmaterial med syfte att stödja och stimulera skolornas arbete mot de nationella målen. Gemensamt för kommentarer och referensmaterial är att de *inte* är bindande utan är ämnade att vara ett stöd för skolornas arbete.

Kommentarer hänför sig till något eller några av skolans mål och styrdokument och avser att tydliggöra motiv och bakgrund till skrivningar i dessa.

Referensmaterial kan behandla alla delar av skolans verksamhet. De kan vara beskrivande, analyserande, problematiserande och innehålla exempel från skolverksamheten, aktuella forsknings- eller utvärderingsresultat, debattartiklar, m.m.

Beställningsadress:
Liber Distribution
Publikationstjänst
162 89 Stockholm
Telefon: 08-690 95 76
Telefax: 08-690 95 50
E-postadress: skolverket.ldi@liber.postnet.se

Beställningsnummer: 97:310

Ämnesord:
Kommentar, matematik, kursplan, betygskriterier, grundskolan

Form: Eva Edenby AB
Tryck: Tryckeri Balder AB, Stockholm 1997

ISBN: 91-88373-05-3

Innehåll

Förord

Kursplanen i matematik för grundskolan föregicks av ett omfattande utvecklingsarbete. Diskussion om bl.a. matematik som skolämne, ämnets inriktning och relation mellan ämnets olika delar fördes. Bl.a. poängterades de skapande, kreativa och problemlösande dimensionerna i matematikämnet. Diskussionen har fortsatt efter fastställandet av kursplanen och har också påverkat utformningen av betygskriterierna.

I denna kommentar redovisas delar av den diskussion som förts och de överväganden som legat bakom den inriktning matematikämnet fått i kursplan och betygskriterier. Sambandet med läroplanen, väsentliga begrepp och dimensioner kommenteras och exemplifieras. Särskilt lyfts de förändringar som skett jämfört med tidigare kursplaner fram.

Kommentaren har utarbetats av tf. universitetslektorerna vid Göteborgs universitet, Bengt Johansson och Göran Emanuelsson som också var experter i arbetet med kursplaner och kriterier.

Syftet med kommentaren är att bidra till samtal om och utveckling av matematikundervisningen utifrån de nationella måldokumenten.

Ulf P. Lundgren
generaldirektör

Inledning

Från höstterminen 1995 började en ny kursplan i matematik att införas i årskurserna 1 till 7. Från och med läsåret 1997/98 gäller den i hela grundskolan. Kursplanen är ett av flera måldokument som i fortsättningen skall styra verksamheten i skolan. I denna kommentar beskrivs hur kursplanen kommit till och hur den är tänkt att fungera. Syftet är att ge stöd för de tolkningar och preciseringar som skall göras i det lokala arbetet och av den enskilde läraren.

Bakgrund och motiv till kursplanens innehåll, utformning och plats i det nya styrsystemet kommenteras i ett historiskt och internationellt perspektiv. Texten är koncentrerad kring det som kan ses som nyheter och vad som utifrån diskussioner och frågor som kommit fram under arbetets gång, och sedan kursplanen publicerats, varit svårt att tolka. Det innebär att delar av kursplanen inte kommenteras. I några fall ges exempel för att konkretisera kursplanetexten.

Förslaget till kursplan i matematik fick sitt slutgiltiga innehåll efter ett tvåårigt utvecklingsarbete. I detta medverkade lärare från alla stadier, lärarutbildare och forskare i matematikdidaktik och matematik. Kursplaneförslaget utvecklades inom den läroplanskommitté som regeringen tillsatte 1991 och kursplanen fastställdes av regeringen i mars 1994 [1]. Kursplanen anger centrala kunskaper som eleven skall utveckla i matematik. Den är skriven för att styra och ge ramar för lärares arbete med undervisningsmål och val av innehåll.

Kursplanen söker motivera och tydliggöra ämnets perspektiv för att ge underlag för det professionella arbetet och samtidigt skapa utrymme för den utveckling av matematikundervisningen som är möjlig med hänsyn till forskningsresultat, utvecklingsarbete och lokala förutsättningar.

Besluten om läroplan och kursplaner för grundskolan har följts av beslut om ett nytt betygssystem [2]. Föreskrifter och allmänna råd för betygskritierier i matematik har utarbetats och fastställts av Skolverket [3]. Betygskriterierna gäller Väl Godkänd (VG) i slutbetyget och de allmänna råden avser bedömningens inriktning. En övergripande kommentar till läroplan, kursplaner och betygskriterier ges i [4].

Man måste ständigt vara beredd på förändringar i takt med vunna erfarenheter och förändringar i skola och samhälle. Exempel på detta är det utredningsarbete som pågått när det gäller tidigare skolstart och ett samlat måldokument för barn och ungdom i åldrarna 6 - 16 år. Detta kan medföra revideringar av skolans kursplaner. Andra exempel är de lärdomar vi kan dra av Regeringens Utvecklingsplan för förskola, skola och vuxenutbildning, Skolverkets kontinuerliga uppföljnings- och utvärderingsverksamhet [5] och jämförande internationella studier av svensk matematikundervisning [6].

Utgångspunkter för kursplanearbetet

HISTORISKT OCH SAMHÄLLELIGT PERSPEKTIV

Kursplaner i matematik har till stor del bestått av momentförteckningar som angett vad lärare i olika årskurser skall ta upp och behandla. Detta framgår av den beskrivning av tidigare kursplaner i matematik för det obligatoriska skolväsendet som här ges i en bilaga, s 55. I kursplanen för Lpo 94 formuleras uppdrag till skolor och lärare i termer av mål som undervisningen skall sträva mot och uppnå. Detta motiveras av den förändrade formen av styrning – från regelstyrning till decentraliserat ansvar med tillhörande mål- och resultatstyrning. Statligt fastställda ämnen och tillhörande kursplanemål är ett första urval av innehåll för grundskolans undervisning. Kursplanen ger inte direkta anvisningar för hur undervisningen skall gå till utan anger syfte och mål för utbildningen. Vägarna till målet, hur undervisningen skall utformas med val och sekvensering av innehåll, arbetssätt och organisation är en fråga för rektor, lärare och elever i samverkan.

Förändringarna motiveras också av samhälls- och teknikutvecklingen samt av förskjutningar i användning och tillämpning av matematik i vardagsliv och yrkesliv. Bruket av standardalgoritmer för de fyra räknesätten har t ex minskat, samtidigt som behoven av kunnande i att tolka och kritiskt granska matematik i användning och behandling av data och information blivit större. Matematik som hjälpmedel för att beskriva situationer och förlopp, för att kommunicera och lösa problem har förändrats genom tillgången till miniräknare och datorer. Behovet av kvalitativt goda kunskaper i matematik har ökat väsentligt.

Redan i läroplanens övergripande mål ser man denna förskjutning i matematikundervisningens viktigaste uppgift – från att utveckla kunnande i räkning till att utveckla ett bredare och djupare matematiskt kunnande.

> *Tala, läsa, skriva och räkna utgör grunden för det mesta av det arbete som utförs i skolan och i arbetslivet. ... Att elever tränar och systematiskt får utveckla de grundläggande kommunikationsfärdigheterna, tala, läsa, skriva och räkna, måste därför vara centralt i skolarbetet*
>
> (Lgr 80, s 15-16)

> *Skolan skall sträva efter att varje elev ... lär sig att använda sina kunskaper som redskap för att*
> *– formulera och pröva antaganden och lösa problem,*
> *– reflektera över erfarenheter och*
> *– kritiskt granska och värdera påståenden och förhållanden*
>
> (Lpo 94, s 9)

> *Skolan ansvarar för att varje elev efter genomgången grundskola ... behärskar grundläggande matematiskt tänkande och kan tillämpa det i vardagslivet.*
>
> (Lpo 94, s 10)

Att vuxna inte längre använder den matematik som skolan förmedlat i generationer betyder inte automatiskt att alla dessa delar skall rensas ut ur kursplanen. Kunskaper inom ett område kan vara en förutsättning för att utveckla kunnande inom ett annat. Det är viktigt att genomföra förändringar med försiktighet och respekt för ämnets komplexitet och historia – inte minst mot bakgrund av erfarenheter av tidigare kursplanereformer, t ex i samband med "den nya matematiken" [7]. Men risken är säkert minst lika stor att man behåller traditionella moment som borde tagits bort eller tonats ned för länge sedan. Genom att analysera och våga pröva nya vägar, nytt innehåll och nya hjälpmedel kan kunskap och erfarenheter om nödvändiga förbättringar utvecklas.

FORSKNING OCH UTVECKLINGSARBETE

De senaste årens forskning och utvecklingsarbete om kursplaner, inlärning och undervisning i matematik har varit en viktig bakgrund för kursplanearbetet. Speciellt gäller detta studier av hur elever uppfattar grundläggande matematiska begrepp och metoder och hur de tänker när de räknar och löser problem. Forskningen har gett oss en rikare bild av elevernas komplexa matematiska kunnande och hur elever ser på matematik och lärande. Den har också gett oss en bild av matematikinlärning utanför läroböckernas och lektionernas speciella sammanhang och miljöer. Bland resultaten från de senaste årens utvecklingsarbete och forskning kan nämnas: (Se forskningsöversikter, [8].)

- Barns taluppfattning och erfarenheter av att använda tal är ofta rikare än man tidigare trott. Det kunnande barnen har redan när de börjar skolan borde kunna utnyttjas bättre [9].
- Att arbeta laborativt i matematik hjälper många barn att förstå innebörder i viktiga matematiska begrepp och idéer. Men övergången från praktiskt till formaliserat arbete och abstrakt tänkande är mycket mer problematisk än man tidigare trott [10].
- Den matematik eleverna lär sig är nära kopplad till och sammanvävd med de situationer och sammanhang där inlärningen äger rum [11].
- Eleverna lär bättre när läraren har goda kunskaper om deras matematiska kunnande och utgår från dessa kunskaper i sin undervisning [12].
- Elevernas tilltro till den egna förmågan att lära och utöva matematik och deras uppfattningar av vad matematik är och kan användas till har stor betydelse för hur de lyckas i sina matematikstudier [13].
- Skillnader i flickors och pojkars matematikprestationer är små och minskar stadigt [14].

- Arbete i smågrupper har positiv effekt på elevernas kunskapsutveckling i matematik [15].

Som grund för kursplanearbetet har också legat resultat och erfarenheter från utvärdering och granskning av svenska kursplaner, lärarutbildning och fortbildningssatsningar [16]. Kursplanearbetet föregicks även av studier och konferenser kring kursplaneutveckling i övriga Norden och i andra länder som samtidigt med Sverige genomfört översyn och förändringar av nationella styrdokument för matematikundervisningen. De länder som studerats speciellt är Australien, England, Ryssland och USA. Den amerikanska matematiklärarföreningens vision Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics har varit föremål för ett särskilt projekt [17].

KURSPLANENS STRUKTUR

Kursplanen i matematik är uppbyggd på samma sätt som i övriga ämnen. Den årskurs- eller stadieindelning och de alternativkurser som förekom i tidigare matematikkursplaner finns inte kvar. Alternativkursernas historia och de problem kring differentiering och individualisering som diskuterats särskilt intensivt i just matematik belyses i bilaga s 69.

Kursplanen inleds med ett avsnitt som beskriver matematikämnets specifika funktion i förhållande till läroplanens värdegrund och övergripande mål. Detta följs av *mål att sträva mot.* Här anges undervisningens inriktning i termer av elevens utveckling av faktakunskaper, färdigheter, förståelse och förtrogenhet i matematik och de kunskapskvaliteter som grundskolans elever så långt som möjligt skall utveckla i matematik.

Mål att sträva mot följs av *ämnets uppbyggnad och karaktär.* Där anges vad matematikämnet "handlar om", vilka fenomen eller aspekter som ryms inom ämnet.

Kursplanen avslutas med *mål som skall uppnås i slutet av femte respektive nionde skolåret.* Målen för det femte skolåret uttrycker en grundläggande kunskaps- och färdighetsnivå i matematik som alla elever bör ha uppnått för att kunna utvecklas vidare i skolarbetet. De skall ses som en grund för avstämning, en "kontrollstation" och är en utgångspunkt för beslut om eventuella stödåtgärder och tillhörande åtgärdsprogram och därmed ett viktigt underlag för utvecklingssamtalen [18].

Målen för nionde skolåret anger grundläggande kunskaper i matematik för dagens och morgondagens samhälle. Dessa skall också ses i ljuset av skollagens krav om likvärdig utbildning. Målen beskriver en grundläggande kunskapsnivå som kommunerna har ansvar för att eleverna i grundskolan inhämtar och som eleverna minst skall ha uppnått för slutbetyget godkänd i matematik.

Kursplanens innehåll

SYFTE

Historiskt och internationellt har motiven för matematik i skolan huvudsakligen betraktats utgående från samhällets eller individens behov [19]. Till de förra räknas behoven av social, ekonomisk och teknisk utveckling inom i stort sett alla samhällssektorer. Individen har behov av att förstå och ta ställning till fenomen och påståenden om dem i natur och samhälle och att aktivt kunna delta i demokratiska processer. Med stimulans och stöd av matematik skall man också kunna skapa och få estetiska upplevelser i omvärld och privatliv. Dessa motiv har inte varit explicit formulerade i tidigare kursplaner. Matematiken har tagits för given och syften har ej uttryckts. Olika motiv kan dock härledas ur olika kommenterande texter och läroböcker.

Läroplan för grundskolan, Lgr 80, innehåller den första kursplanen, där det motiveras varför man skall studera matematik. I kursplanen till Lpo 94, den tionde i ordningen för det obligatoriska skolväsendet, ges en mer omfattande bakgrund med motiv för matematikstudier. Dessa gäller såväl familjesfären som medborgarsfären. Utvärdering visar att det är svårt att få till stånd den syn på kunnande, lärande och användning av matematik som samhällsutvecklingen kräver [20].

Matematikkunnande skall ge självförtroende och möjligheter till påverkan. Det är en demokratisk rättighet att förstå och delta i beslutsprocesser som gäller t ex landets och kommunens ekonomi eller miljö. Alla elever skall ha möjlighet att skaffa sig matematikkunskaper för att lösa vardagsproblem, för att kunna förstå och granska information och reklam, för att kunna fungera i rollen som medborgare och kunna värdera påståenden från politiker, journalister och marknadsförare. Utbildningen skall ge kunskaper för lärande i grundskolan och gymnasieskolan i matematik och i andra ämnen – och för livslångt lärande. Det räcker inte att lära sig räkna med eller utan hjälpmedel.

Både unga elever och vuxna anser att matematik är ett viktigt skolämne. Men om man frågar varför, så får man ofta svävande svar. Att matematik är vanligt i naturvetenskapliga och tekniska sammanhang är naturligt för många, men få verkar medvetna om matematikens roll i samhällsutvecklingen, om hur den används för beslut och kommunikation i vår vardagskultur, om hur den ger viktiga bidrag till konst och formgivning, om ämnets idéhistoriska utveckling, om hur olika begrepp och metoder utvecklats och vilken betydelse denna utveckling har för lärande, förståelse och skapande av olika former av kunskap. Många tror också att matematik som disciplin är ett statiskt och färdigutvecklat ämne. Ett viktigt syfte med undervisningen i grundskolan är att bryta matematikens isolering och synen på ämnet som enbart kopplat till eller en förutsättning för naturvetenskap. Det är fråga om att se matematikens generella betydelse och roll i vår kultur tydligare. [21]

Ett karakteristiskt motiv för och syfte med all matematikutbildning är att utveckla problemlösningsförmåga. Om man skall få tilltro till och kunna använda matematik så behöver man kunna lösa problem. Att tillägna sig matematik är en ständigt pågående process, där man succesivt får tillgång till mer avancerade hjälpmedel och uttrycksformer. Utbildningen syftar också till att ge insikt och förståelse för inommatematiska problem för att stimulera kreativt tänkande och lust att upptäcka samband och mönster som gäller t ex tal och geometri. Dessutom är problemlösning ett viktigt *medel* för att utveckla begrepp och matematiskt tänkande – problembaserat lärande. Syftet med matematikutbildning är inte bara problemlösningen i sig utan också att analysera resultatens rimlighet och värdera lösningar i förhållande till den ursprungliga problemsituationen.

Den tekniska utvecklingen går snabbt. Nya hjälpmedel som t ex datorer och miniräknare blir allt vanligare i hem och arbetsliv. Elevernas erfarenheter och kunskaper i användning av tekniska hjälpmedel kan utvecklas. Skolan kan ge eleverna möjligheter att skaffa sig kunnande som kan underlätta att de når målen snabbare och med bättre kvalitet inom matematikämnets ram. Detta gäller t ex grafräknare och lättanvända kalkyl- och statistikprogram som finns att tillgå.

MÅL ATT STRÄVA MOT

Målen är utformade för att *inte* sätta gränser för elevers lärande. De är skrivna för att ge inriktning men också utrymme för fördjupning och breddning och anger vad matematiken främst skall bidra med i den helhet som läroplanen för grundskolan, Lpo 94, och övriga kursplaner tecknar.

Målen att sträva mot i matematik är av två slag. Först kommer en grupp *övergripande mål för allt ämnesinnehåll i matematik.* I dessa anges de mål som är bärande och karakteristiska, vilken matematik man än skall lära sig. Därefter följer en grupp *mål som gäller olika kunskapsområden* i matematik.

ÖVERGRIPANDE MÅL I MATEMATIK

OM TILLTRO

Det första målet om tilltro har flyttats allt högre upp under kursplaneprocessens gång. Egentligen finns det redan uttryckt i läroplanens mål som gäller all verksamhet i skolan men referensgrupper och remisser har lyft fram detta som ett särskilt viktigt matematikmål, som en förutsättning för att lära och bruka just matematik. Om ungdomar inte har tilltro till sitt kunnande vågar de inte använda matematik och då finns allvarliga risker för sämre livskvalitet eller att de slås ut i samhället och inte kan tillvarata sina demokratiska rättigheter. Om de inte har tilltro till sin egen förmåga att lära sig matematik, så visar erfarenheten att de känner sig mindre värda, de flyr ämnet och undviker att använda matematik eller att välja utbildningsvägar som förutsätter kunskaper i matematik. Inte minst gäller detta flickor. [22]

HISTORISKA SAMMANHANG

Matematikens utveckling är en del av vår historia. Betydelsefulla landvinningar har fört olika kulturer framåt. Olika sätt att skriva tal, som lett till vårt positionssystem, användningen av bokstavssymboler, utvecklingen av längdmätning och jordmätning (geometri) är några sådana exempel. Historiska sammanhang visar på matematikens betydelse och natur och ger inblickar i hur den skapats av människor och varför. Begrepp och metoder som dagens elever skall återupptäcka och lära sig under några få veckotimmar har det ibland tagit årtusenden av mänsklighetens utveckling att nå fram till. Inblick i och studier av denna historia ger både respekt och förståelse för innebörden av betydelsefulla matematikbegrepp och deras användning [23].

GRUNDLÄGGANDE MATEMATISKA BEGREPP OCH METODER

En stor del av elevernas arbete i grundskolan ägnas åt aktiviter som hjälper eleverna att bli förtrogna med ett antal viktiga matematiska begrepp och metoder. Vilka som är mest angelägna framgår av den andra gruppen mål att sträva mot samt av de mål som eleverna skall uppnå under sin grundskoletid. Begreppen tal och rum intar här en särställning. Bland de metoder som eleverna skall lära sig finns t ex olika mätmetoder samt metoder för huvudräkning och problemlösning.

OLIKA SÄTT ATT UTTRYCKA SIG OCH RESONERA I MATEMATIK

Matematikens språk har i alla tider betraktats som viktigt men svårtillgängligt. Beskrivningar av objekt, begrepp och metoder är precisa för att underlätta distinkt och snabb kommunikation.

Det tog årtusenden innan det under medeltiden utvecklades symbolspråk, att räkna med bokstäver som namn för tal. Det är

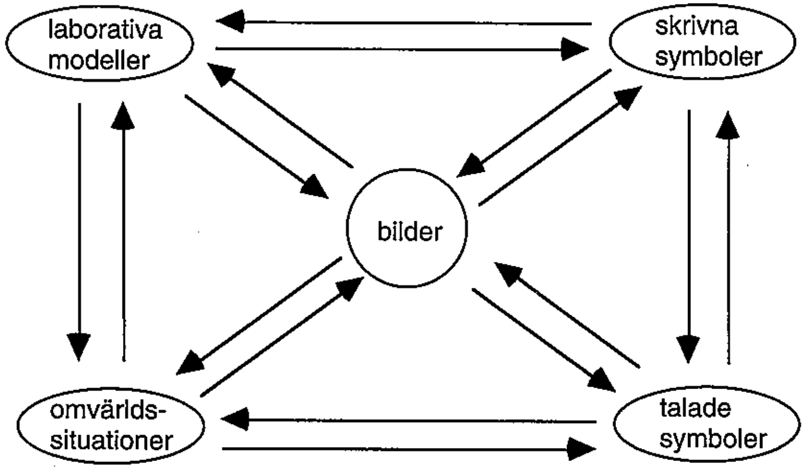
betydelsefullt att man förstår och inser värdet av användningen av symboler och matematiska tecken. Lärandet kan gå via vardagsspråk och varsamt införande av matematisk terminologi, så att t ex formler först uttrycks och beskrivs i ord och bild, att bokstäver, konstanter, parametrar och variabler ges mening som kan förstås och användas. Barn säger fyrkant och tänker kanske på en kvadrat. Men det finns olika fyrkanter. Vilka villkor skall vara uppfyllda för att en fyrkant skall kallas kvadrat, rektangel, parallellogram eller romb?

Att utveckla kunnande om teckensystem och vedertagna symboler är avgörande för att utveckla matematiskt tänkande [24]. Tankar och idéer när det gäller algebra, geometri och statistik kan beskrivas med hjälp av olika uttrycksformer i handlingar, i bilder och i språk. Det läggs stor vikt på symbolsystem i vår vetenskapliga och teknologiska kultur, där man bearbetar, reorganiserar och utvecklar vetande. Symboler används ofta för att presentera och kommunicera idéer.

Som tankeredskap har symboler dels en subjektiv funktion som hänger ihop med personliga upplevelser och uppfattningar, dels en objektiv funktion därför att de utvecklats under en lång kulturhistorisk process till ett gemensamt verktyg. Lusten att forma tecken är djupt rotad. Grafiska symboler har förekommit i alla tider och inom alla ämnesområden [25]. Det matematiska symbolspråket är dessutom internationellt och ofta oberoende av modersmål. En formel för cirkelns omkrets ser ungefär likadan ut i olika länders litteratur eller läroböcker.

Att tillägna sig matematik är en process där målet är att upptäcka och använda abstrakta strukturer och relationer, men för att nå dit kan man inte enbart arbeta med symboler. Vi hör ofta yttranden som "Det gäller att anknyta till verkligheten", "Man måste ge symbolerna mening", "Vi behöver arbeta mer laborativt", "I matematik ska man gå från det konkreta till det abstrakta", "Man måste tala matematik".

Målet är att alla elever skall inse värdet av att kunna översätta samband inom och mellan olika uttrycksformer t ex konkreta modeller, vardagsspråk, schematiska bilder, diagram, skriftspråk, matematiktermer, matematisk notation och symboler, se figur 1. Att tillägna sig förståelse i matematik är en ständigt pågående och kumulativ process, där man stegvis får tillgång till fler och mer stimulerande, avancerade uttrycksformer och representationer. Det handlar om fruktbara sätt att uttrycka idéer, att resonera och att lösa problem.



Figur 1
Transformationer mellan olika uttrycks- och representationsformer i matematik.

Olika uttrycksformer är också viktiga i det sociala samspelet och samarbetet, mellan elever och mellan elever och läraren, för att bygga upp vetande och kunnande. Barns språk, bilder och sätt att uttrycka sig kan stimuleras och utvecklas till bra matematikspråk. Det har visat sig väsentligt att en representation av ett begrepp, en idé eller ett problem görs tydlig och att övergångar och översättning mellan olika representationsformer diskuteras

noggrant. Detta blir allt viktigare nu när symbolhanterande och grafritande räknare blir tillgängliga i våra skolor. [26]

Att lära sig matematik är inte bara att lära sig hantera regler och procedurer, utan att se mening och sammanhang och att resonera sig fram till slutsatser. Detta innebär inte att man klarar sig utan att ha skaffat sig fasta kunskaper om t ex talfakta och hur man gör beräkningar. Det är viktigt att eleverna ges möjlighet att pröva sina hypoteser i ett öppet och positivt klimat där man visar respekt och stöd för varandras idéer.

Att förstå och använda logiska resonemang innebär att man känner igen, granskar och prövar olika sätt att dra slutsatser med hjälp av olika uttrycksformer. Resonemang kan se olika ut beroende på elevernas mognad och tänkande eller på den uttrycksform och stringens man arbetar med [27].

Utifrån en följd av exempel kan man med en induktiv metod finna ett mönster eller ett samband. Sedan söker man kanske ett logiskt resonemang för att bli helt säker eller ett motexempel för att visa motsatsen. Utgående från vissa förutsättningar kan man deduktivt bevisa ett samband eller en hypotes. De olika sätten att resonera illustreras här i ett exempel.

Exempel

Är summan av tre på varandra följande tal alltid delbar med 3?

När man summerar tre på varandra följande naturliga tal så ser man ett upprepat mönster:

$7 + 8 + 9 = 3 \cdot 8, \quad 23 + 24 + 25 = 3 \cdot 24, \quad 37 + 38 + 39 = 3 \cdot 38$

Någon tänker sig att man alltid kan ta 1 från det största talet och lägga till det minsta. Det är ett resonemang som alltid går att tillämpa.

Efter att ha prövat med några exempel så kanske man formulerar och försöker bevisa följande sats:

Summan av tre på varandra följande tal är alltid delbar med 3.

Bevis: Idén från exemplen ovan kan användas generellt. Anta att det mellersta talet är n. Då är de två andra talen $n-1$ och $n+1$. Talens summa är $n-1+n+n+1=3n$, dvs delbar med 3 för varje n.

En uppföljande fråga är om detta kan fortsättas.
Är summan av fyra tal alltid delbar med 4?

Låt oss pröva med fyra tal: $3+4+5+6=18$.
18 är inte delbart med 4. Alltså har vi hittat ett motexempel och det kan inte gälla generellt att summan av fyra tal är delbar med 4.

Hur går det i fortsättningen? Är t ex summan av fem tal alltid delbar med 5? När är summan av k tal delbar med k?

PROBLEMLÖSNING

Att formulera och lösa problem är karakteristiskt för matematikämnet. Läroböckernas uppgifter har sedan de första räkneläror-na kommit att domineras av färdigformulerade problem med precis de sifferuppgifter angivna i texten som skall användas i lösningen. Ibland är det inte ens ett äkta problem eftersom räknesättet anges genom sammanhanget eller kapitelrubriken. Uppgifterna är inte sällan konstruerade för att passa in i ett räknesättsmönster, så att eleverna paradoxalt nog kan lösa dem utan att ta hänsyn till den vardagsanknytning de var tänkta att ge.

I verkligheten får man oftast själv formulera problemet, välja ut eller skaffa uppgifter som behövs, välja lösningsmetod och fundera över om det erhållna svaret är rimligt i förhållande till sammanhanget. Alla dessa delar skall eleven möta i sin matematikutbildning.

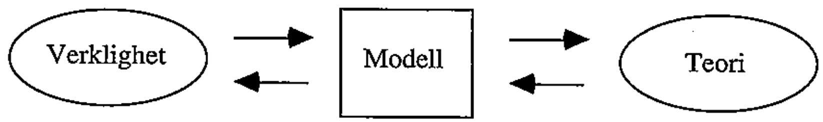
I Lgr 80 var Problemlösning ett särskilt huvudmoment. Svenska elever har ändå svårigheter med problemlösning [28]. Kan det

bero på att området knutits så starkt till beräkningar? Detta kan ha lett till att andra ibland mer informella sätt att stimulera och redovisa tankegångar, med t ex bilder, konkreta objekt och språkliga resonemang (jfr figur 1) kommit i bakgrunden. Kursplanen pekar på att olika uttrycksformer bör komma in tidigt i problemlösning. Att tillägna sig problemlösningsstrategier är en ständigt pågående process, där man undan för undan får tillgång till fler och mer stimulerande och avancerade, ibland abstrakta uttrycksformer [29].

MATEMATISKA MODELLER

Betydelsen av matematiska modeller har ökat i informationssamhället. Allt som görs i en dator är t ex resultat av något slags modell. Det är väsentligt att detta område uppmärksammas i vår matematikutbildning.

Att ställa upp modeller är karakteristiskt för matematiken. Hela tiden behöver man tänka på att man arbetar utifrån antaganden och vissa bestämda förutsättningar och att verkligheten kan avvika från beräkningar och lösningar. Tyvärr blundar man ofta för verkligheten och föredrar modellen.



Figur 2
Övergångar i matematik mellan verklighet, modell och teori.

Matematiska modeller är scheman eller tankegångar som används för att analysera ett stycke verklighet. Ibland kompletteras en modell med abstrakta teoretiska resonemang och då uppstår en teori för modellen. En av de enklaste matematiska modellerna är de naturliga talen 0, 1, 2, 3, … . I modellen bortser man från alla egenskaper hos objekt i mängder utom just antal. Modellen finns hos alla kulturfolk. Man har inte alltid haft namn för alla tal. En intressant fråga för många barn, ofta i tidig ålder, är om det finns antal så stora att de inte kan räknas. [30]

Olika geometriska objekt kan ses som enkla modeller av verkligheten, t ex en känd form på en yta – en kvadratisk eller cirkelformad rabatt, ett rätblock som innehåll i en låda eller ett klot som en modell av vår jord.

Att kunna arbeta med enkla matematiska modeller är att kunna granska förutsättningar och se begränsningar. Man kan beräkna kostnader för en klassfest eller skolresa och jämföra med verkliga utfallet. Man kan beräkna befolkningsökningen utifrån känd tillväxt. Hur många invånare har Sverige år 2010 med tanke på hur många som föds och som avlider och med tanke på den in- och utvandring som kan förutses? Elevernas nya gymnasiebetyg omvandlas fortfarande till ett jämförelsetal med hjälp av en matematisk modell, trots att vi lämnat sifferbetygen och infört bokstavsbetyg.

Många framgångsrika matematiska modeller har skapats inom naturvetenskaperna, t ex modeller för planeternas massor och banor. Efter Newtons arbete på 1600-talet har teorien utvecklats ända in i våra dagar. Banor för satelliter kan räknas ut med hjälp av modellen. Ett enklare exempel är sambandet mellan sträcka s, fart (velocity) v och tid t vid likformig rörelse (konstant fart) $s = v \cdot t$. När elever mäter tiden för en bil som färdas en uppmätt sträcka kan man räkna ut medelfarten och jämföra med hastighetsbegränsningen.

MINIRÄKNARE OCH DATORER

Redan i Lgr 69 rekommenderades användning av räknemaskiner. I Lgr 80 anbefalldes användning av miniräknare och datorer. Syftet var främst att underlätta problemlösning vid realistiska och svårare beräkningar inte minst för elever med räknesvårigheter.

Miniräknare och datorer är idag naturliga och nödvändiga hjälpmedel överallt i vardagsliv och yrkesliv. Skolans matematikutbildning kan inte stå utanför, utan måste ge beredskap för

användning. För en del elever kan det vara omöjligt att lösa autentiska problem eftersom man inte klarar av de beräkningar som krävs. Algoritmräkning får inte vara ett självändamål. Räknaren löser dock inte problemen. Den anger inte räknesätt eller lämplig strategi. Eleverna behöver också kunskaper så att de i en given situation själva kan avgöra vilket hjälpmedel, huvudräkning, skriftliga räknemetoder, miniräknare eller dator som bör användas. Eleverna behöver "insigt och färdighet att uppfatta de grundläggande talförhållandena, mindre av ensidigt mekaniskt räknande och mera av problemlösning som kräver klar uppfattning och eftertanke" som det formulerades redan i 1800-talets Normalplaner. För att kunna lösa problem och utföra beräkningar behöver man kunnande och känslighet för t ex tals mening, relationer, storleksordning och räknesättens innebörd. De senaste årens nationella utvärderingar pekar på behovet av mer tid för och ökad kvalitet i undervisningen när det gäller detta innehåll. [31]

MÅL INOM OLIKA KUNSKAPSOMRÅDEN

Den andra gruppen av strävansmål tar upp de kunskapsområden i matematik som ansetts relevanta i grundskolan. I mitten av 1800-talet bestod skolmatematiken av två olika ämnen *Räkning* och *Geometri* med var sin timplan. Geometri som också omfattade mätningar förekom i slutet av folkskolan och då enbart för pojkar. Med 1919 års undervisningsplan blev räkning och geometri ett sammanhållet ämne för både flickor och pojkar. På 50-talet bytte ämnet namn till matematik. I och med den nioåriga grundskolan kom först algebra och funktionslära och sedan statistik och sannolikhetslära på allvar in i kursplanerna.

I kursplanen betonas vikten av att eleven utvecklar tal- och rumsuppfattning. Många frågor beträffande innebörden av dessa begrepp har kommit under kursplanearbetets gång och de kommenteras här särskilt.

OM TALUPPFATTNING

Med taluppfattning menas en persons övergripande förståelse för tal och operationer parat med förmåga att använda denna förståelse på olika sätt som underlag för beslut och för att utveckla användbara och effektiva strategier för att lösa problem. God taluppfattning visar sig i lust och skicklighet att använda tal och kvantitativa metoder för att tolka och producera information. Det finns en förväntan att hanterandet av tal har betydelse och mening. De som ser på matematik på detta sätt använder varierat och flitigt egna kontroller och jämförelser för att pröva rimligheten i numerisk information och resultat.

Vad är karakteristiskt för en god taluppfattning? Här ges en redogörelse med exempel på sex olika aspekter som vid internationella studier visat sig betydelsefulla och som här återges i sammanfattning. [32]

- **Tals betydelse och storlek**

Denna aspekt gäller förståelse av positionssystemet med basen 10 (naturliga och hela tal, bråk och decimalform) inklusive relationer inom och mellan tal. Här ingår att kunna jämföra tals storlek när de är uttryckta i samma representationsform. 200 är tio gånger större än 20. 5/6 är ett bråk mindre än 1. Relationen mellan nämnaren och täljaren visar att det ligger nära 1. 1000 är ett stort tal om man tänker på antalet elever i en skola men litet om man tänker på ett lands folkmängd.

- ***Ekvivalenta uttryck och representationsformer***

Tal kan uttryckas och representeras på olika sätt för att gynna ett visst syfte. Man kan dela upp och sätta samman tal för att lättare kunna göra beräkningar. 24 kan t ex uttryckas som

$12 + 12, 20 + 4, 30 - 6, 100 - 76$

eller som

$2 \cdot 12, 3 \cdot 8, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, 48 / 2, 96 / 4.$

Ett bråk kan skrivas i decimalform, ett helt tal i utvecklad form.

Ett tal i decimalform kan prickas in på en tallinje. Här ingår att relatera eller jämföra ett tals storlek med objekt eller företeelser i omvärlden t ex en samling förmål, en känd längd, ett känt område eller ett läge på tallinjen. Aspekten innefattar transformationer mellan olika representationsformer.

- **Operationers innebörd och funktion**

Vad är innebörden och funktionen av en operation i allmänhet eller i relation till specifika tal? Division kan t ex uppfattas som en uppdelning av ett tal i ett bestämt antal lika stora delar, delningsdivision, eller som att bestämma antalet delar av en bestämd storlek som "ryms" i ett på förhand givet tal, innehållsdivision. Att multiplicera med ett tal mindre än 1 ger en produkt mindre än den andra faktorn. Aspekten inkluderar bedömning av resultats rimlighet baserad på förståelse av de tal och operationer som används.

- **Användning av ekvivalenta uttryck**

Häri ingår att skriva om uttryck, att kunna bedöma eller effektivisera beräkningar som inkluderar förståelse och användning av räknelagar (kommutativitet, associativitet, distributivitet, transitivitet) för att förenkla uttryck och utveckla lösningsstrategier, t ex:

$36 + 14 = 36 + 4 + 10 = 40 + 10$

$7(50 + 2) = 7 \cdot 50 + 7 \cdot 2$

- **Strategier för beräkning, antalsbestämning**

Häri ingår att tillämpa tidigare beskrivna aspekter av taluppfattning för att planera och genomföra en lösningsprocess i en given situation (uppskattning, huvudräkning, skriftliga räknemetoder, beräkning med räknare).

- **Referenspunkter vid mätning och rimlighetsbedömningar**

Aspekten kräver erfarenhet, förståelse och användning av standardiserade, icke standardiserade eller personliga referenser för att formulera och sätta igång lösningsprocesser:

En lärobok väger ca 1 kg. Det går 4–7 apelsiner på 1 kg. En vinkel lite mindre än en rät vinkel bör vara ca 85°. Hur många personer kan det vara på en idrottsplats om man säger att det är knappt/cirka/drygt 10 000? Aspekten innehåller begrepp som vikt, längd, effekt, areal, volym, tid, vinklars storlek, temperatur, hastighet osv.

Eleverna möter efterhand i vardagsliv och i skolan olika slags tal. Skolans uppgift är att uppmärksamma likheter, skillnader och relationer mellan olika talområden, att se behov av mer komplicerade tal och hur man uppfattar, räknar och löser problem med dessa.

OM RUMSUPPFATTNING

För att beskriva vår omvärld och relationer inom och mellan olika objekt i vår omvärld är det viktigt att utveckla begrepp och språk som har med rumsuppfattning att göra. Det handlar om kunskaper som är grundläggande för att kunna orientera sig i rummet och för att kommunicera med andra. Rumsuppfattning innefattar t ex att kunna förstå, använda och utbyta information om var i rummet ett föremål, inklusive eleven själv, befinner sig i förhållande till omgivningen. Det kan ske med hjälp av begrepp som avstånd och riktning t ex över, till vänster, under, mellan, längre bort, närmare och med beskrivningar av hur man har förflyttat eller kan förflytta ett föremål. I en god rumsuppfattning ingår också att kunna jämföra och uppskatta storleken av avstånd, vinklar, plana områden och föremål som eleven har erfarenhet av och som vanligen förekommer i elevens närmiljö. Där ingår att jämföra storlek hos och förhållande mellan objekt som befinner sig på olika avstånd från observatören – och att tolka bilder och spegelbilder.

Att ha en grundläggande rumsuppfattning innebär att känna igen och beskriva viktiga egenskaper hos våra vanligaste geometriska objekt t ex linje, sträcka, triangel, rektangel och kub. Det omfattar också förmågan att kunna beskriva relationer mellan objekt, att kunna avbilda föremål och omgivande objekt och att

kunna orientera sig i ett tänkt rum – i fantasin – en inre rumsuppfattning. En grundläggande rumsuppfattning är en förutsättning för att tillägna sig geometriska begrepp och metoder. [33]

MÄTNING OCH GEOMETRI

Mätning har ofta setts som en del av geometrin, men det finns också klara beröringspunkter med tal och taluppfattning, inte minst decimalsystemet. Mätning har också sin betydelse som ett laborativt och konkret arbetssätt och som grundläggande för den aspekt av divisionsbegreppet som hjälper eleverna att tänka i termer av "hur många gånger går ... i ..."? Om eleverna får arbeta med längdmätning med 0,5 meter som enhet kan det gå lättare att förstå och direkt "se" eller påminna sig att 3/0,5 = 6 som alternativ till eller grund för "förlängning med tio" eller "flyttning av decimaltecken".

Geometrins ställning diskuteras världen över. Jämfört med Lgr 80 så har kursplanen tydligare inslag av kvalitativa begrepp som t ex att känna igen, beskriva, avbilda, konstruera samt av mönster och estetiska perspektiv. Sedan gammalt är geometri också ett område lämpligt för logiska resonemang och deduktiva studier. Geometri kan beskrivas som vetenskapen om rummet, som ett verktyg för att beskriva och mäta i idealiserade modeller av den fysiska världen och olika fenomen omkring oss. Man kan också se geometri som en metod att åskådliggöra begrepp och processer i andra delar av matematik eller
i andra ämnen. Geometriska metaforer är t ex mycket vanliga i vårt vardagsspråk:

> *Resonemanget följde en bestämd riktning. Hon hade både bredd och djup i sitt kunnande. Det var högt till tak. Det är en betydelsefull position. Diskussionen var mycket ytlig och fyrkantig. Han vinklade sin framställning...*

Geometri är ett sätt att tänka, ett sätt att förstå och även ett vetenskapsområde med en omfattande terminologi och begreppsapparat. [34]

STATISTIK

Att kunna förstå, analysera och kritiskt granska statistisk information blir allt viktigare i vårt moderna samhälle – i både vardag och utbildning. Olika former av tabeller och diagram hör till massmedias sätt att snabbt ge omfattande information. Arbete med statistik och diagram ger möjligheter att upptäcka samband både mellan olika delar av matematiken och mellan matematik och andra ämnen. Samla in, analysera och redovisa data kan man göra i många olika sammanhang t ex i naturorienterande ämnen, geografi och samhällskunskap.

Området kan ge viktiga bidrag till utveckling av kommunikativa färdigheter där man formulerar frågor och problem, läser och tolkar olika typer av diagram, använder grafräknare eller dator samt skriftligt eller muntligt analyserar data. Man får tillfälle att resonera, argumentera och diskutera kring orsak och verkan och kring alternativa förklaringar och värderingar av redovisningar och resultat (se t ex [35]).

ALGEBRA, EKVATIONER OCH FUNKTIONER

I algebra har svenska elever presterat sämre än jämförbara länder. Alltfler behöver kunna tolka t ex formler och algebraiska samband. Algebra är inte längre något som skall studeras enbart av de som går vidare på matematikintensiva gymnasieprogram. Det har visat sig viktigt att söka förenkla övergången och se likheter och skillnader mellan att räkna med tal och med bokstäver. [36]

ÄMNETS UPPBYGGNAD OCH KARAKTÄR

Under denna rubrik behandlas vad matematikämnet egentligen handlar om. Vad får man för kunskap genom att studera matematik? Matematik som skolämne i det obligatoriska skolväsendet har mycket lite påverkats av matematik som vetenskap. En analys visar att ämnesinnehållet i matematik i grundskolan snarare utgår från vardags-, yrkes- och samhällsliv än från vetenskapliga sammanhang och omfattar frågor om värden, moral och kunskapens konsekvenser [37]. Detta har naturligtvis sin

grund i de syften som ställts upp för att utbildning i matematik skall ge *alla* elever möjlighet att hantera och påverka såväl privatliv som samhällsliv, samtidigt som den skall utgöra grund för fortsatta studier.

I arbetet med kursplanen har synen på matematikämnets skapande, kreativa och problemlösande dimensioner betonats från alla referensgrupper. Det är mycket viktigt att bryta den uppfattning av matematik som innebär att man lär sig ämnet genom att räkna ett antal uppgifter, som någon annan ställt upp. Att se på matematik som enbart träning av vissa färdigheter och procedurer är otidsenligt och hämmande. En sådan syn kan leda till att undervisningen får en slagsida mot att fostra och lotsa elever till formellt korrekta lösningar med fixering på facitsvar. Förståelse, begreppsbildning och problemlösning riskerar att hamna i bakgrunden. Matematiklektioner blir ytligt sett lättskötta och en fråga om organisatoriska beslut styrda av lärobokens innehåll. Elevernas erfarenheter, förutsättningar och uppfattningar får liten betydelse för undervisningens uppläggning. En sådan ämnesuppfattning står i vägen för att integrera matematik med andra ämnen med därtill hörande utveckling av och förståelse för matematikens användning. [38]

Matematikämnet har fått ökad betydelse i skola och samhälle. Genom uppskjutandet av den organisatoriska differentieringen samt breddningen av rekryteringen till gymnasiet har allt flera kommit att studera matematik djupare och längre, se även bilaga s 74. Det finns omfattande erfarenheter av att ämnet är ett av de starkast differentierande i skolan.

> *Den enskilde elevens upplevelser av framgång och misslyckanden i skolan, av personligt egenvärde och personlig tillfredsställelse avgörs i icke ringa grad av vad som händer i ämnet matematik. I få ämnen och prestationssammanhang ses rangordningen av individerna och uppdelningen av resultaten i bättre och sämre, högre och lägre, som mer självklara än i matematik. Den enskilde individen påverkas starkt av hans eller hennes upplevelser av matematikundervisning och matematikstudier i dagens skola.*
>
> (Marklund, 1977, s 6, [39]

Ovanstående citat kan säkerligen vara värt att fundera över – även idag. Vikten av att uppmärksamma elever med särskilda behov i matematik kan inte nog understrykas. [39]

MÅL SOM ELEVERNA SKALL HA UPPNÅTT

Dessa mål skall tolkas med skolmatematikens syften, uppbyggnad och karaktär som bakgrund. Man kan inte se *Mål som eleverna skall ha uppnått* och *Mål att sträva mot* som oberoende. Man kan inte heller se dem isolerade från kursplanerna i andra ämnen eller från läroplanen. Utbildningen skall hela tiden sträva efter att eleverna t ex "får tilltro till den egna förmågan", "förstår och kan använda logiska resonemang", "förstår och kan formulera och lösa problem", "kan med förtrogenhet och omdöme utnyttja miniräknarens och datorns möjligheter".

> *Utgångspunkten skall ... vara mål att sträva mot, det är de som skall styra undervisningen och prägla allt arbete i skolan. Att alla elever minst skall nå mål att uppnå skall vara ett resultat av det man gör i skolan – inte en utgångspunkt för undervisningen*
> (Skolverket, 1996, s 23, [4])

Angivna mål efter femte respektive nionde skolåret kan ses som kontrollstationer – ett slags "golv". Dessa mål skall vara möjliga att nå för alla elever som arbetar utifrån sina förutsättningar i skolan och hemma och som får undervisning, som motsvarar den garanterade undervisningstiden, av utbildade lärare. De flesta eleverna kan och skall naturligtvis nå åtskilligt längre.

Det första målet efter femte respektive nionde skolåret ger en beskrivning av de sammanhang där alla elever säkert skall kunna hantera sina matematikkunskaper och lösa problem. Detta ger en precisering i relation till den första gruppen mål att sträva mot med en utvidgning från närmiljön, efter femte skolåret – till hem och samhälle, efter nionde skolåret.

De ovan beskrivna målen anger också sammanhang – platser och händelser – som eleverna kan skaffa sig konkreta erfarenheter av tillsammans med familjen, med lärare eller kamrater i och utanför skolan. Om sammanhangen är kända och realistiska så ger de även motiv för att lära sig den matematik, som behövs för att formulera och lösa problem. Egna erfarenheter och kunskaper om aktiviteter och situationer som innehåller matematik, gör det lättare för eleverna att koncentrera sig på de matematiska tankegångarna, t ex att välja strategier och räknesätt samt utföra beräkningar och kontrollera om svaret är rimligt. Här får man inte heller glömma bort den mängd autentiska problem med matematikanknytning som olika ämnen och varje skoldag innehåller.

MÅL SOM ELEVERNA SKALL HA UPPNÅTT I SLUTET AV DET FEMTE SKOLÅRET

De kunskaper eleverna skall ha, är de som behövs "för att kunna hantera situationer och problem i elevens närmiljö" som uttrycks i det första målet. I följande mål tas t ex upp "enkla tal i bråk- och decimalform", "enkla formler", "geometriska figurer och mönster", "längder, areor, volymer, vinklar och massor", "skala", "tid", "tabeller och diagram", "lägesmått". Dessa senare mål kan se som en nivåbestämning inom den andra gruppen av mål att sträva mot.

Svenska grundskoleelevers kunskaper i algebra har visat sig bristfälliga vid internationella jämförelser. Många elever på gymnasielinjer har problem med förståelse av och färdigheter i transformationer, förenklingar och tillämpningar av formler och uttryck. Det har också visat sig att matematikundervisningen i Sverige förbereder övergången från att arbeta med tal till att arbeta med bokstäver senare än i andra länder. Det är viktigt att försöka få en mjukare, mer meningsfull övergång till symbolspråk. Intresse och förståelse för matematik med symboler kan stimuleras i arbete med mönster.

Mönster av olika slag möter man varje dag – geometriska mönster i golvplattor, murar och dekorationer – talmönster i almanacka, reklammaterial och multiplikationstabell. Avsikten är att studier av mönster och relationer skall fördjupa elevers omvärldsuppfattning, utveckla tal- och rumsuppfattning och ge stimulerande och konkret förberedelse för algebra och funktioner. Genom att diskutera regelbundenheter i händelser, former och talföljder kan man också få upplevelser om hur man kan generalisera och symbolisera. Detta kan ge en god grund inför arbetet med algebra [36].

MÅL SOM ELEVERNA SKALL HA UPPNÅTT I SLUTET AV DET NIONDE SKOLÅRET

Det första målet är en nivåbestämning inom den första gruppen mål att sträva mot. De kunskaper eleverna skall ha, är de som behövs "för att kunna hantera situationer och problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund i fortsatt utbildning", jfr mål som eleverna skall ha i slutet av det femte skolåret.

I de följande målen tas t ex upp "hela tal och rationella tal i bråk- och decimalform", "överslagsräkning, procent och proportionalitet", "mätning och geometri", "tabeller och diagram", "sannolikhet i slumpsituationer", "enkla formler och ekvationer", "grafer till funktioner". Dessa mål kan ses som en nivåbestämning inom den andra gruppen av mål att sträva mot.

KURSPLANENS MÅL ÄR INTE FRISTÅENDE

De olika målgrupperna och måltyperna är på ett mycket komplext sätt relaterade till och sammanflätade med varandra. De skall tolkas utifrån läroplanens allmänna värdegrund samt det syfte, den uppbyggnad och karaktär som kursplanen uttrycker för matematikämnet.

Exempel: I-målen för åk 9 står det att eleven skall "ha goda färdigheter i överslagsräkning ...". I åk 5 nämns inget om överslag. Ska man inte ha överslagsräkning som mål att uppnå i åk 5?

När man funderar över hur det hänger ihop med uppskattning, rimlighet och överslagsräkning, så kan man se att målen att sträva mot tar upp att man skall "tolka och värdera lösningarna i förhållande till den ursprungliga problemsituationen" och vikten av att utveckla en god taluppfattning. I den ingår att kunna se relationer mellan tal och omvärld, att ha kunskap om storheter och kunna hantera situationer i närmiljön (mål att uppnå i slutet av år 5). Där anges också att eleven skall "ha grundläggande färdigheter i att räkna med naturliga tal – i huvudet...". Uppskattning och rimlighetsbedömning ingår alltså i målen för år 5 men inte formell överslagsräkning. Som "golv" kommer det först i år 9-målen. Inte heller då är det, som flera lärare påpekat, någon större poäng att se överslagsräkning som en fristående företeelse utan meningsfullt sammanhang.

Tid för lärande i matematik

I den nya timplanen för grundskolan har planeringsramen för undervisningstiden ändrats från en vecka till nio år. Beslut om fördelning av antalet timmar fattas av styrelsen för utbildningen på förslag av rektorn, som fastställer schema. Den nationella timplanen är inte längre stadieindelad. 40-minuters lektionen är avskaffad som enhet för styrning av undervisningstid.

Den minsta tid som en elev skall erbjudas i matematik under sin grundskoletid är 900 klocktimmar av totalt 6 665 timmar. Detta motsvarar i stort den volym som fanns i Lgr 80:s timplan. Men det är svårt att jämföra timplanerna, eftersom Lgr 80:s stadietimplan ger "bruttotid" medan den nya timplanen anger "nettotid" som garanteras varje elev. Den nya timplanen reglerar elevernas arbetstid:

> *undervisningstid: arbete som planerats av lärare och elever tillsammans och som eleverna genomför under lärares ledning*
> (SFS 1994:1194, 1 kap. 2 §)

Lärares arbetstid är en fråga för avtal mellan arbetstagare och arbetsgivare. Utöver den garanterade undervisningstiden kan kommunen besluta om ytterligare undervisningstid. Det betyder att den kommun som anser att matematikämnet behöver mer tid (än den garanterade) för alla eller för vissa elever i kommunen kan utöka tiden – förutsatt att man håller sig inom de yttre tidsramar som ges av skollagen och grundskoleförordningen.

En annan möjlighet för mera tid för matematik ger elevens val.

Det finns f n totalt 470 timmar för eleverna för att fördjupa och bredda sina kunskaper i t ex matematik under grundskolans nio år. I skolans val finns också möjlighet för utökad timplan i matematik. Här finns totalt ett jämkningsutrymme på 410 timmar för rektor att använda.

En elev som löper risk att inte nå upp till matematikkursplanens minikrav för det femte respektive nionde skolåret kan erbjudas mera tid för lärande – om det är mera tid som behövs.

> *Elever som har svårigheter i skolarbetet skall ges stödundervisning om det kan befaras att eleven inte kommer att nå de mål som minst skall ha uppnåtts vid slutet av det femte och det nionde skolåret eller om eleven av andra skäl behöver särskilt stöd. Stödundervisningen kan anordnas antingen i stället för utbildning enligt timplanen eller som ett komplement till sådan utbildning.*
> (SFS 1994:1194, 5 kap. 14 §)

Ett sätt att få ökat lärande i matematik är att använda en del av matematiktimmarna för ämnesövergripande samordning och samverkan. Tio timmar matematik tillsammans med exempelvis tio timmar hemkunskap kan göra mer nytta än tjugo "traditionella" ämnestimmar om tiden används för integrerade och gemensamma aktiviteter.

Betygssättning och utvecklingssamtal i matematik

Uppföljning och utvärdering av undervisningen spelar en nyckelroll i det nya styrsystemet för den svenska skolan. Kraven på den enskilde läraren finns uttryckta i grundskoleförordningen och läroplanen. T ex skall läraren

utifrån kursplanernas krav allsidigt utvärdera varje elevs kunskapsutveckling, muntligt och skriftligt redovisa detta för eleven och hemmen samt informera rektorn

(Lpo 94 (SKOLFS 1994:1) s 16)

Tanken är att kontinuerliga jämförelser mellan mål i läroplaner, kursplaner och lokala arbetsplaner och resultat från uppföljnings- och utvärderingsarbetet skall driva utvecklingen av undervisningen och elevernas lärande framåt. Det är viktigt med en ständig diskussion om utvärderingsarbetes innehåll, funktion och organisation.

- Varför skall man utvärdera elevernas kunnande i matematik?
- För vem görs detta? Vad skall resultatet användas till?
- Vad skall utvärderingen omfatta?
- När, var och hur skall den ske?
- Till vem och hur kommunicerar man resultatet av utvärderingen? [40]

I Lpo 94 betonas vikten av att kunna informera om elevernas kunskaper på andra sätt än att ge eleverna betyg. Samtalet vidareutvecklat till ett utvecklingssamtal anses vara skolans viktigaste sätt att informera och informeras om elevernas utveckling och skolgång. De föräldrar som så önskar skall kunna få skriftlig information som ett komplement till utvecklingssamtalet eller i de fall elever inte blivit godkända. Här gäller det för läraren att beskriva det kunnande som eleven bedömts ha relativt uppställda mål och på ett sådant sätt att det stimulerar elevens arbete och kan ligga till grund för gemensamma åtaganden, speciellt i de fall eleven är i behov av särskilt stöd och ett åtgärdsprogram skall tas fram. [41]. Till stöd för arbetet med uppföljning och utvärdering i matematik finns diagnostiska material utarbetade för år 2 och 7 och ämnesprov för år 5 och 9 [42].

Utvärdering i matematik har traditionellt varit mycket starkt kopplat till prov och test av olika slag [43]. Med det nya betygssystemet kan proven inriktas mot att ta reda på om och hur eleverna nått uppställda mål. Det är också angeläget att utveckla nya former för utvärdering av matematikundervisningen som bättre än traditonella prov ger eleverna möjligheter att visa vad de kan.

Betygsättning i matematik regleras i det nya styrsystemet i följande texter:

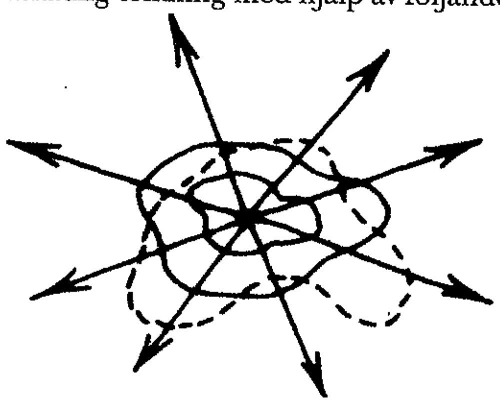
- Lpo 94, i avsnittet om bedömning och betyg (SKOLFS 1994:1)
- Grundskoleförordningen, 7 kap. Betyg m. m. (SFS 1995:207)
- Kursplanen i matematik, de mål som betygen skall relateras till (SKOLFS 1994:3)
- Föreskrifter och allmännna råd om betygskriterier i matematik (SKOLFS 1995:65)
- Nationellt ämnesprov i matematik för år 9 (ges första gången läsåret 1997/98)

Mål i läroplaner och kursplaner uttrycker de kvaliteter i elevernas kunnande som undervisningen skall sträva mot. Betygskriterierna och de allmänna råden för bedömningens inriktning skall hjälpa lärare att identifiera dessa kvaliteter som de framträder på de olika betygsnivåerna [42]. Det finns bara nationella betygskriterier för slutbetyget *Väl godkänd*. För betyget Godkänd finns stöd i *Mål att uppnå* i åk 9. För terminsbetygen och för nivån *Godkänd* och *Mycket väl godkänd* i slutbetyget skall kriterierna formuleras lokalt.

Betygskriterierna skall uttrycka i vilken grad, med vilken bredd och i vilken mån eleverna skall ha nått de uppsatta målen i respektive ämne för att få ett visst betyg. Mål är något man ställer upp för att styra utbildning och undervisning. Betygskriterier används för att bedöma elevers kunnande *relativt* dessa mål, dvs resultatet av denna undervisning. Det är kursplanernas mål att uppnå och mål att sträva mot som läraren ska relatera elevernas kunnande till, alltså sätta betyg mot. Till stöd har man också Skolverkets allmänna råd om bedömningens inriktning och det nationella ämnesprovet i matematik för år 9 [3].

Liksom kursplanernas strävansmål angår betygskriterierna och tillhörande allmänna råd för bedömningens inriktning alla lärare i grundskolan. Betygen skall visa vilka kunskaper som skolan värdesätter. Betygsdiskussionen är därför inte bara en ren "högstadieangelägenhet".

Relationen mellan mål, betygskriterier och betyg i matematik kan ges en åskådlig tolkning med hjälp av följande modell:



- Strålarna ut från centrum representerar kursplanens mål att sträva mot t ex problemlösningsförmåga och allsidiga räknefärdigheter som eleverna skall ges möjlighet att utveckla så långt som möjligt.

- Det inre områdets rand representerar de mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret och som man skall utgå ifrån när man bedömer om en elev är Godkänd (G) eller ej. På denna nivå skall eleverna t ex kunna tolka, sammanställa, analysera och värdara data i tabeller och diagram.

- Det yttre områdets rand representerar den kunskapsnivå som skall motsvara Väl Godkänd (VG) i matematik, Eleven skall för detta betyg bl a visa säkerhet i sitt problemlösningsarbete och kunna använda och jämföra olika metoder och tillvägagångssätt

- En elevs komplexa kunskaper representeras i denna modell av en streckad sluten kurva.

Vid betygssättning skall läraren göra en sammanvägning av sina bedömningar och värderingar av elevens olika kunskapskvaliteter. I princip skall alla kriterier vara uppfyllda för ett visst betyg, men

> *Om särskilda skäl föreligger med hänsyn till personliga förhållanden hos enskild elev kan dock bortses från enstaka kriterier. Väl utvecklad förmåga avseende något eller några kriterier kan väga upp brister avseende ett eller ett par andra kriterier*
>
> (SKOLFS 1995:65, 2 §)

För en beskrivning av de svenska matematikbetygens historia, se t ex [45].

Matematik och andra ämnen

Matematiken ingår i en helhetspräglad utbildning. Eleverna interagerar med omvärlden för att utvidga och använda sitt vetande i sociala sammanhang. Begrepp och metoder från matematik behövs för att nå mål i andra ämnen. Skolans undervisning kan och skall ge sammanhang där man använder matematik i och utanför skolan. Elevernas allsidiga utveckling uppmärksammas med stark uppmärksamhet på att elever kan behöva särskilt stöd och längre tid för att upptäcka och lära viktiga samband.

Användningen av matematik i andra ämnen har ökat främst beroende på möjligheterna att beskriva och informera om idéer på ett koncist och kortfattat sätt. Matematiken är ett kommunikationsämne. Gemensamma mål med svenska är t ex att kunna lyssna, analysera, uttrycka sig i tal och skrift även med symbolspråk liksom att kunna resonera, dra slutsatser, argumentera och kommunicera med olika språkliga uttrycksformer. Gemensamma mål med bild är t ex att tolka och avbilda objekt, att uppleva, kommunicera med bilder och resonera kring bilder. I slöjd finns t ex konkreta modeller, ritningar i skala och mätnoggrannhet. För att få insikt i andra länders och tidsåldrars kultur och levnadsförhållanden behandlas t ex talsystem, måttsystem, tideräkning och valutor gemensamt med språk, historia och religionskunskap.

Tabeller, diagram, användning av enkla matematiska och statistiska modeller med problemlösning i t ex ekonomi och resurshushållning finns i hemkunskap och samhällskunskap. Att kritiskt kunna granska olika parters analyser eller information och ta ställning i både inhemska och internationella frågor grundade på sakliga argument är en viktig grund för vår demokrati. Geografi samt Idrott och hälsa har många användningar av grundläggande begrepp och metoder från matematiken t ex i samband med mätningar, skala, beräkningsmetoder och statistik.

Naturvetenskaperna, teknik och miljö har historiskt sett många av sina rötter i matematiken. Grundläggande kunskaper om tal, storheter och geometriska objekt är en förutsättning för att utveckla naturvetenskapliga och tekniska begrepp. Centrala samband och förändringar studeras med hjälp av tabeller, grafer, formler och funktioner. Målen för matematiska modeller är till stor del gemensamma vad gäller matematiken och naturvetenskaperna. Detta får naturligtvis inte innebära att matematiska modeller enbart kopplas till naturvetenskapliga sammanhang.

Sammanfattning av förändringar

I den föregående beskrivningen av kursplanens Syfte, Mål att sträva mot och Ämnets uppbyggnad framgår att matematikämnet i Lpo 94 är ett delvis nytt skolämne. De förändringar som skett i kursplanerna i matematik i det obligatoriska skolväsendet fram till Lpo 94 kan sammanfattas i följande punkter (Se vidare Bilaga, s 55)

- Från kursplaner och timplaner årskurs för årskurs, via stadievisa kurs- och timplaner till planer för hela grundskolan utan nationellt fastställd etappindelning.

- Från central regelstyrning till decentraliserad, deltagande målstyrning. Från momentförteckning över innehåll och aktiviteter till mål att sträva mot och mål att uppnå, som innebär att

  få tilltro till, använda, utnyttja, hantera, inse, förstå, förklara, argumentera, dra slutsatser, tolka, granska, sammanställa, analysera, värdera, generalisera, känna igen, ange, avbilda, beskriva, bestämma, ställa upp, räkna, formulera och lösa, jämföra, uppskatta, mäta.

- Från räkning och geometri till aritmetik, geometri, algebra och funktioner samt statistik och sannolikhet. Symbolspråk och generalisering är matematikens styrka.

- Från algoritmräkning till taluppfattning och allsidiga räknefärdigheter med och utan hjälpmedel.

- Från regelstyrda räknefärdigheter och regelstyrd problemlösning till utveckling av elevers tänkande och resonerande i matematik, för att upptäcka, utforska och befästa i meningsfulla sammanhang.

- Från matematik som formellt, kontrollerande verktyg till matematik för reflektion, kommunikation och problemlösning i ett demokratiskt samhälle.

Referenser

1] Regeringens proposition 1992/93:220. *En ny läroplan och ett nytt betygssystem för grundskolan, sameskolan, specialskolan och den obligatoriska särskolan.*
SKOLFS 1994:1. *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, Lpo 94.*
SKOLFS 1994:3. *Kursplaner för grundskolan.*
SOU 1992:94. *Skola för bildning.*
SOU 1993:02. *Kursplaner för grundskolan.*
Utbildningsutskottets betänkande 1993/94: UbU 1.
Ny läroplan för grundskolan m.m.

2] Regeringens proposition 1992/93:220. *En ny läroplan och ett nytt betygssystem för grundskolan, sameskolan, specialskolan och den obligatoriska särskolan.*
Regeringens proposition 1994/95:85. *Betyg i det obligatoriska skolväsendet.*
Regeringens proposition 1995/96:206. *Vissa skolfrågor m.m.*
SFS 1995:207. Ändring i grundskoleförordningen (SFS 1994:1194).
SFS 1996:1073. Ändring i grundskoleförordningen (SFS 1994:1194).
SFS 1997:189. Ändring i gymnasieförordningen (SFS 1992:394).
SOU 1992:86. *Ett nytt betygssystem.*
Utbildningsutskottets betänkande 1993/94: UbU 1. *Ny läroplan för grundskolan m.m.*
Utbildningsutskottets betänkande 1994/95: UbU 6. *Betyg i det obligatoriska skolväsendet.*
Utbildningsutskottets betänkande 1996/97:UbU 5, *Vissa skolfrågor m.m.*

3] SKOLFS 1995:65. *Skolverkets föreskrifter och allmänna råd om betygskriterier för* grundskolans ämnen.
Skolverket (1996). *Grundskolan – Kursplaner, betygskriterier.*
Stockholm: Liber distribution.

4] Skolverket (1996). *Grundskola för bildning – Kommentarer till läroplan, kursplaner och betygskriterier.*
Stockholm: Liber distribution.

[5] Kjellström, K. & Pettersson, A. (1995). Den nationella provverksamheten. *Nämnaren 22*(2), 4-7.
Ljung, B-O. & Pettersson, A. (1990). *Matematiken i nationell utvärdering.* Kunskaper och färdigheter i åk 2 och 5. Stockholm: HLS.
Regeringens skrivelse 1996/97:112. Utvecklingsplan för förskola, skola och vuxenutbildning - kvalitet och likvärdighet.
Skolverket (1996). *Bilden av skolan.* Stockholm: Liber distribution.

[6] Johansson, B. & Emanuelsson, G. (1996). Svenska 13-åringars matematikkunskaper. *Nämnaren 23(4),* 2-7.
Skolverket (1996). *TIMSS. En undersökning av svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt pespektiv.* Skolverkets rapport nr 114. Stockholm: Liber distribution.

[7] Howson, G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics.* Camebridge, England: Camebridge University Press.
Håstad, M. (1978) *Matematikutbildning från grundskola till teknisk högskola. I går – i dag – i morgon.* Stockholm: KTH.
Johansson, B. (1992a). National Curricula in Change. An International Perspective from a Swedish Point of View. I O. Björkqvist (Red.), *Forskning och utvecklingsarbete i de matematiska ämnenas didaktik.* Rapporter från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, nr 2.
Kilborn, W. m fl (1977). *Hej Läroplan! Hur man bestämmer vad våra barn skall lära sig i matematik.* PUMP-projektet rapport nr 15. Mölndal: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet.
Unenge, J. (1997). *Med mina ögon sett. Några nedslag i skolmatematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

[8] Askew, M. & William, D. (1995). *Recent Research in Mathematics Education 5 – 16.* London: HMSO.
Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R. & Winkelmann, B. (Eds.) (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer.
Bishop, A. (Ed.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education.. Part one & Part two.* Dordrecht: Kluwer.
Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science and Programming. In C. B. Cazden (Ed.), *Review of Research in Education 16,* 3–56.
Grouws D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Johansson, B. (1991). Forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik i Sverige. *Nämnaren 18*(3/4), 47-53.
Johansson, B. (1993). Nordisk matematikdidaktisk forskning i dag. En kartläggning mot en historisk bakgrund. I O. Björkqvist & L. Finne (Red.), *Matematikdidaktik i Norden*. Rapporter från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Adademi, nr 8.
NOMAD. Nordisk matematikkdidaktikk. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs universitet.
Nämnaren, tidskrift för matematikundervisning. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs universitet. http://didserv.did.gu.se/matemati/senaste.htm

[9] Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik.* Lund: Studentlitteratur.
Ekeblad, E. (1996). *Children. Learning. Numbers. A Phenomenographic excursion into first-grade children's arithmetic.* Göteborg Studies in Educational Sciences 105. Acta Universitatis Gothoburgensis.
Høines, Johnsen, M. (Red.) (1996). *De små teller også. Matematik i førskolepedagogiken.* Landås, Norge: Caspar.
Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1-3.* Stockholm: Utbildningsförlaget.
Marton, F. & Neuman, D. (1996). Phenomenography and Children's Experience of Division. In L. P. Steffe et. al. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning.* Mahwah, NJ.: Lawrence Erbaum.

[10] Hunting, R. P. & Lamon, S. J. (1995). A re-examination of the role of instructional materials in mathematics education. *Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD 3*(3), 45 - 64.
Malmer, G. (1991). Språkets roll i matematikinlärning. I G. Emanuelsson, B. Johansson, R. Ryding (Red.), *Tal och räkning 1.* Lund: Studentlitteratur.

[11] Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik. Om grundskolans matematikundervisning.* Lund: Studentlitteratur.
Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk Matematikkdidaktikk, NOMAD 1*(1), 40-54.
Wyndhamn, J. (1991). Problemmiljö och miljöproblem. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.
Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited. In school mathematics as a situated practise.* Linköping Studies in Arts and Science No 98.

[12] Fennema, E., et al. (1996). A Longitudinal Study of Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Eduacation, 27*(4), 403-434.
Kilborn, W. (1979), *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter.* FoU-rapport 37. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

[13] Schoenfeld, A. (Ed.) (1994). *Mathematical Thinking and Problem Solving.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
Sjöström, B. (1997). Lära lära. Att utveckla elevers lärande. I R. Ryding. (Red.). *Årsbok 1996.* Mölndal: Sveriges Matematiklärarförening.

[14] Forgasz, H. (1995). Gender issues and the promotion of effective learning. *Nämnaren 22*(4), 42-44.
Grevholm, B. & Hanna, G. (Ed.) (1995). *Gender and Mathematics Education.* Lund: Lund University Press.

[15] Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.
Dunkels, A. (1996). *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition.* Academic dissertation D 1996:202. Luleå: Luleå University.

[16] Bickham, N., Halldén, O. & Wistedt, I. (1991). *Utvärdering av Matematiksatsningen.* Stockholm: Allmänna förlaget.
Ds U 1986:5. *Matematik i skolan.* Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet. Stockholm: Liber.
Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1989). Vad ska en matematiklärare kunna? *Nämnaren 16*(1), 2-5.
Kilborn, W. (1990). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1-3.* Stockholm: Utbildningsförlaget.
Skolverket (1993). *Matematik åk 5. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 14. Stockholm: Liber distribution.
Skolverket (1993). *Matematik åk 9. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.

[17] NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: Author.
NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching School Mathematics.* Reston, Va.: Author.
NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: Author.
Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T. (Red.) (1992). *Matematikämnet i skolan i internationell belysning.* Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

[18] SFS 1994:1194. Grundskoleförordningen.
Skolverket (1995). *Åtgärdsprogram – ett viktigt verktyg i planeringen av stödinsatser.* Rapport nr 95:144. Stockholm: Liber distribution.
Skolverket (1996). *Utvecklingssamtal – en mötesplats för elev – föräldrar – lärare.* Rapport 95:178. Stockholm: Liber distribution.

[19] Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1994). Begrundelseproblemet i den elementära matematikundervisningen i Sverige. I *Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen. Göteborg 26-28 januari 1994.* Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Niss, M. (1981). Goals as a Reflection of the Needs of Society. In R. Morris (Ed.). (1981), *Studies in Mathematics Education, Volume 2.* UNESCO.
Niss, M. (1995). *Goals of Mathematics Teaching. In A. J. Bishop (Ed.) International Handbook of Mathematics Education.. Part one.* Dordrecht: Kluwer.
Årsböcker i svensk undervisningshistoria, nr 178. *Aurelius räknelära från 1614.* Uppsala: Föreningen för svensk undervisningshistoria.

[20] Bergendal, G. (1983). Metodik, didaktik, retorik. *Nämnaren 10*(2), 49-52.
Ds U 1986:5. *Matematik i skolan.* Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet. Stockholm: Liber.
Mathematical Sciences Educational Board (MSEB) (1991). *Reshaping School Mathematics. A Philosophy and Framework for Curriculum.* Washington, DC: National Academy Press.
Reys, B., Reys, R. m fl (1995). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnaren 22*(3), 34-40.
Skolverket (1993). *Matematik åk 5. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 14. Stockholm: Liber distribution.

Skolverket (1993). *Matematik åk 9. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.

[21] Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1997). Har Sverige inte råd att satsa mer på matematikutbildning? *Pedagogiska magasinet.* Lärarförbundets tidskrift för pedagogisk forskning och debatt.
Niss, M. (1981). Goals as a Reflection of the Needs of Society. In R. Morris (Ed.). (1981), *Studies in Mathematics Education, Volume 2.* UNESCO.
Nissen, G. (1994). Matematikundervisning i en demokratisk kultur. *Nordisk matematikkdidaktikk, NOMAD 2*(2). 58-69.
Nissen, G. & Blomhøj, M. (Red.) (1995). *Hul i kulturen.* Sæt matematik og matematikundervisning på plads i kultur- og samfundsbilledet. København: Spektrum/Forum.
Restivo, S., Van Bendegem, J. P., & Fischer, R. (Eds.) (1994). *Math World. Philosophical and Social Studies of Mathematics and Mathematics Education.* Ithaca, NY: SUNY Press.

[22] Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Nämnaren 22*(2), 15-22.
Grevholm, B. (1993). *Naturvetenskap och teknik i Sverige.* Stockholm: Verket för Högskoleservice.
Rosén, I. (1994). Problem med pengar. *Nämnaren, 21*(1), 14-18.
Silvén, S. (1995). Hur blev den intelligente en dum elev. *Nämnaren 22*(3), 16-19.
Svensson, A. (1995). Högstadiets matematik skrämmer. *Nämnaren 22*(2), 8-11.
Svensson, A. (1996). NT–resan. Så får högskolan fler studenter till naturvetenskap och teknik. *Nothäfte Nr 6, 1996.* Stockholm: Skolverket och Högskoleverket.
Wistedt, I., Brattström, G., & Martinsson, M. (1996). *Vägar till matematisk förståelse i universitetsutbildning som syftar till att utjämna könsskillnader.* Stockholm: Pedagogiska institutionen, Stockholms universitet.

[23] Dahl, K. & Nordquist, S. (1994). *Matte med mening.* Stockholm: ALFABETA.
Swetz, F. J., Fauvel J., Bekken, G., Johansson, B., & Katz, V. (Eds.) (1995). *Learn from the masters.* Washington D.C.: The Mathematical Association of America.
Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur.
Unenge, J. (1997). *Människorna bakom matematiken.* Lund Studentlitteratur.

[24] Bruner, J. S. (1973). The growth of representational processes in childhood. In J. S. Bruner (Ed.), *Beyond the information given.* London: George Allen & Unwin.
Vygotskij, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology.* New York: M. E. Sharpe.

[25] Bergsten, C. (1990). Matematisk operativitet. En analys av relationen mellan form och innehåll i skolmatematik. *Linköping Studies Dissertations. No 29.* Linköping University.
Mellin-Olsen, S. (1989). *Kunskapsformiddling. Virksomhetsteoretiske perspektiver.* Rådal: Caspar Forlag.
Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med.* Malmö: Carlssons förlag.

[26] Bergsten, C. (1994). Begreppsbildning. Om figurer, metaforer och matematikförståelse. I *Dokumentation från den 8:e Matematikbiennalen.* Göteborg: Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
Dahland, G. & Lingefjärd, T. (1996), Graphing calculators and students' interpretations of results. *Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD 4*(2/3), 31 - 50.
Emanuelsson, G. (1995). Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren 22*(2), 2-3.
Eriksen, D. B. (1993). *Personlige og sociale sider ved tilegnelse af faglig viden og kunnen i folkeskolens matematikundervisning.* Ph.D-avhandling. København: Danmarks Lærerhøjskole.
Grønmo, L. S. & Rosén, B. (1997). Elevers uppfattningar av funktioner. *Nämnaren 23*(1), 43-47.
Malmer, G. (1991). Språkets roll i matematikinlärning. I G. Emanuelsson, B. Johansson, R. Ryding (Red.), *Tal och räkning 1.* Lund: Studentlitteratur.
Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 235-264.

[27] Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Ulin, B. (1991). Att upptäcka samband i matematik. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.

[28] Johansson, B. (1983). Problem med problemlösning. *Nämnaren 9*(3), 10 - 13.
Skolverket (1993). *Matematik åk 5. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 14. Stockholm: Liber distribution.
Skolverket (1993). *Matematik åk 9. Den nationella utvärderingen av grundskolan 1992.* Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.
Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *Nordisk Matematikkdidaktikk, NOMAD 1*(1), 40-54.
Wyndhamn, J. (1991). Problemmiljö och miljöproblem. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.

[29] Ahlberg, A. (1996). Undervisningsprocessens betydelse för flickors och pojkars lärande. *Nordisk Matematikkdidaktikk, NOMAD 4*(2/3), 7 - 30.
Emanuelsson, G., Johansson, B., Nilsson, M., Olsson, G., Rosén, B. & Ryding, R. (Red.) (1995). *Matematik ett kärnämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1991). *Problemlösning.* Lund: Studentlitteratur.
Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik.* Solna: Ekelunds förlag.

[30] Gårding, L. (1985). Modeller och verklighet. *Nämnaren 11*(4), 7-10.
Sjögren, P. (1992). En matematikers syn på svensk skolmatematik. *Nämnaren, 19*(3), 12-19.

[31] Anderberg, B. (1991). Praktiskt och metodiskt arbete med miniräknare. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Tal och räkning 2.* Lund: Studentlitteratur.
Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Hedrén, R. (1996). Alternatives to traditional algorithms in elementary mathematics instruction. *Nordic Studies in Mathematics Education, NOMAD 4*(2/3), 51-83.

Johansson, H. & Skoogh, L. (1994). *Miniräknarmetodik - en enkel handledning.* Stockholm: Almqvist & Wiksell.
Persson, I. O. (1995). Vad tänker lärare om miniräknare? *Nämnaren 22*(4), 13-16.
Sandahl, A. & Unenge, J. (1991). Barn lär med miniräknare. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Tal och räkning 2.* Lund: Studentlitteratur.
Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik. Om grundskolans matematikundervisning.* Lund: Studentlitteratur.

[32] Emanuelsson, G. & Emanuelsson, L. (1997). Taluppfattning i tidiga skolår. *Nämnaren 24*(2), 26-27.
Reys B., Reys, R. m fl (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnaren 22*(2), 23-26.
Reys, B., & Reys, R., m fl (1995). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnaren 22*(3), s 34-40.
Reys, B., Reys, R., & Emanuelsson, G. (1995). Meningsfulla tal. *Nämnaren 22*(4), s 8-12.
Reys, B., Reys, R., & Emanuelsson, G. (1996). Uppskattning av överslag. *Nämnaren 23*(1), s 21-25.

[33] Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

[34] Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1992). *Geometri och statistik.* Lund: Studentlitteratur.
Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Hedrén, R. (Red.) (1989). *Geometri och vår omvärld.* I Täljaren-serien. Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

[35] Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1992). *Geometri och statistik.* Lund: Studentlitteratur.
Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

[36] Adolfsson, L. (1997). Är svenska elever dåliga i algebra och geometri? *Nämnaren 23*(1), 21-25.
Anderberg, B. & Söderström, U. (1988). *Bokstäver att räkna med.* I Täljarenserien. Stockholm: Utbildningsförlaget.
Bergsten, C. m fl (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Ds U 1986:5. *Matematik i skolan.* Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet. Stockholm: Liber.
Emanuelsson, G., Wallby, K., Johansson, B. & Ryding, R. (Red.) (1996). *Matematik ett kommunikationsämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Skolverket (1996). *TIMSS. En undersökning av svenska 13-åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt pespektiv.* Skolverkets rapport nr 114. Stockholm: Liber distribution.

[37] SOU 1993:02, *Kursplaner för grundskolan.*

[38] Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren, 21*(4), 36-43.
Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Nämnaren 22*(2), 15-22.
Dossey, J. A. (1992). The Nature of Mathematics: Its Role and Its Influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39 – 48). New York: Macmillan.
Emanuelsson, G. (1986). Hur mycket styr läroböckerna? *Nämnaren 13*(2/3), 85-87.
Ernest, P. (1996). The nature of mathematics and teaching. *Philosophy of Mathematics Education Journal 9.* (http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome/pome9.htm) (http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome/pome9.htm)
Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning om liv och arbete i svenska klassrum – en översikt.* Stockholm: Skolverket.
Johansson, B. & Emanuelsson, J. (under tryckning). *Utvärdering i naturkunskap och matematik. Lärare i grundskolan berättar.* Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Kilborn, W. (1979), *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter.* FoU-rapport 37. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
Laksov, D. (1993). Problemlösning eller matematiska idéer i undervisningen? *Nämnaren 20*(4), 43-47.
Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik.* Solna: Ekelunds förlag.
Ulin, B. (1996). *Engagerande matematik.* Solna: Ekelunds förlag.
Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik. Om grundskolans matematikundervisning.* Lund: Studentlitteratur.

[39] Emanuelsson, G., Johansson, B., Nilsson, M., Olsson, G., Rosén, B. & Ryding, R. (Red.) (1995). *Matematik ett kärnämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Grundskoleförordningen (SFS 1994:1194 med ändringar 1995:207, 880 samt 1996:699, 1073), 5 kap. Särskilda stödinsatser.
Magne, O. (1996). *Bibliography of literature on dysmathematics.* Didakometry no 76. Lund university, School of Education. Department of Educational and Psychological Research.
Malmer, G. & Adler, B. (1996). *Matematiksvårigheter och dyslexi.* Lund: Studentlitteratur.
Marklund, S. (1977). Samhället och matematikundervisningen. *Nämnaren 3(1),* 6-7.

[40] Gibbs, C., Brown, M., McCallum, B., & McAllister, S. (1995). *Intuition or Evidence? Assessing Assessment.* Buckingham: Open University Press.
Johansson, B. & Emanuelsson, J. (1997). *Utvärdering i naturkunskap och matematik. Lärare i grundskolan berättar.* Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.
Lambdin, D. V., & Kehle, P. E., & Preston, R. V. (1996). *Emphasis on Assessment. Readings from NCTM's School-Based Journals.* Reston, Va: NCTM.
Stenmark, J. (1993). *Mathematics Assessment: Models, Myths, Good Questions, and Practical Suggestions.* Reston, Va: NCTM.

[41] SFS 1995:207. Ändring i grundskoleförordningen.
Skolverket (1995). *Åtgärdsprogram – ett viktigt verktyg i planeringen av stödinsatser.* Rapport nr 95:144. Stockholm: Liber distribution.
Skolverket (1996). *Utvecklingssamtal – en mötesplats för elev – föräldrar – lärare.* Rapport 95:178. Stockholm: Liber distribution.

[42] Kjellström, K. & Pettersson, A. (1995). Den nationella provverksamheten. *Nämnaren 22*(2), 4-7.
Skolverket (1996). *Nyhetsbrev 23 september 1996. Tema: Nationella prov.* Stockholm: Liber distribution.

[43] Johansson, B. (1993). Diagnostic Assessment in Arithmetic. In M. Niss (Ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer, 169 – 184.

[44] Johansson, B. (1995). Nya betyg och betygskriterier i grundskolan. *Nämnaren 22*(1), 3-7.
Johansson, B. (1996). Betyg på kvaliteter i kunnandet. *Nämnaren 23*(1), 4-9.
Skolverket (1996). *Grundskola för bildning – Kommentarer till läroplan, kursplaner och betygskriterier.* Stockholm: Liber distribution.

[45] Kilpatrick, J. & Johansson, B. (1994). Standardized mathematics testing in Sweden: The legacy of Frits Wigforss. *Nordic Studies in Mathematics 2*(1), 6-30.

BILAGA

Kursplaner i matematik i ett historiskt perspektiv

Och må iag tilstå at iag har förstått huruledes det är giörligt at en ung Swensk dräng/ som allenast kan tala och skrifwa sitt modersmål/ dessa wetskaper (mate-matiska) til hela Rijkets märckeliga tienst skulle kunna grundeligen lära ... der han allenast wore upmuntrad af förmodan at sådant för honom lönte mödan.

(Duhre, 1721, [1])

Den nya kursplanen i matematik för grundskolan är den tionde i ordningen för det obligatoriska skolväsendet, om vi inkluderar kursplanen för försöksverksamheten med nioårig enhetsskola. Det är bl a med anledning av detta "jubileum" som avsnittet har skrivits. En annan anledning är att det historiska perspektivet lyfts fram i Lpo 94 som ett av fyra centrala perspektiv som skall genomsyra undervisningen [2]. Avsnittet ger en översiktlig beskrivning av hur matematikämnet utvecklats i dessa kursplaner genom åren.

FÖRE FOLKSKOLANS TID

Matematik som skolämne växte långsamt fram i vårt land under slutet av 1500- och början av 1600-talet. Aritmetik utövades först i det romerska talsystemet med tillhörande räknebord och räknepenningar, och i form av tid- och kalenderräkning. Genom det snabbt växande behovet av effektiva metoder för handelsräkning slog det hindu-arabiska siffersystemet successivt ut det romerska. Den första tryckta räkneläran på vårt eget modersmål kom 1614 [3]. Euklides Elementa var redan från början ett standardverk i den svenska geometriundervisningen, men vi fick vänta ända till 1744 innan det kom en fullständig svensk översättning [4]. Den första läroverksstadga som nämner matematik är från 1611. Det blev då tillåtet att undervisa i aritmetik i läroverken – om det inte inkräktade på övriga ämnen!

FOLKSKOLESTADGAN 1842

I vårt lands första folkskolestadga från 1842 bestod skolämnet matematik av räkning och geometri [5]. Det övergripande målet med undervisningen var "det uppwexande slägtets danande till christelige och gagnelige samhällsmedlemmar". Matematikämnets innehåll beskrevs indirekt genom krav på vad en folkskollärare skulle ha "fullgiltig insigt och ådagalagd färdighet att underwisa i":

> *Räknekonsten, så väl theoretiskt som praktiskt, till och med sammansatt Regula de tri uti hela och brutne tal, allmänna begreppen af Geometri och Lineartekning* (s 9).

> *De kunskapsämnen hwilka ... fordras af den, som till lärare i folkskola skall intagas, utgöre ock föremål för undervisningen i sådan skola (s 10).*

Minimikrav angavs för barn som på grund av fattigdom "hindradas att undervisningen längre tid begagna" och för barn som "sakna erforderlig fattningsgåfwa":

> *åtminstone inhemtat nödig kunskap ... i de fyra Räknesätten i hela tal (s 10).*

Man förutsatte skillnader i kunskapskrav mellan flickor och pojkar. Beslut om sådana skillnader var decentraliserat till den lokala skolstyrelsen:

> *Skolstyrelsen äge att bestämma den skillnad som i hänseende till kunskapsfordringarna lämpligen må göras mellan gossar och flickor* (s 11).

NORMALPLANERNA 1878, 1889 OCH 1900

Den första egentliga kursplanen i matematik för folkskolan kom i *Normalplanen* för folkskolor och småskolor från 1878 [6]. Matematiken var uppdelad på två separata skolämnen med var sin timplan, Räkning och Geometri. Lärokursen angavs i form av en lista av begrepp, metoder och aktiviteter – en för de första två åren i småskolan, en för folkskolans följande fyra år och en för ett eller två år fortsättningsskola. Planen föregicks av Allmänna förutsättningar och följdes av beskrivningar av Lärogång, Metodiska anvisningar, Åskådningsövningar och Motiv – ett slags kommentarmaterial till Normalplanen.

De två första årens småskola omfattade främst huvudräkning och skriftlig räkning i addition och subtraktion i begränsade talområden. Folkskolans undervisning i räkning och geometri omfattade:

De fyra räknesätten i hela tal och decimalbråk samt någon övning i allmänna bråk, med tillämpning på praktiska uppgifter af lättfattligt innehåll (s 21).

Uppritning och beskrivning af linier, vinklar och ytfigurer samt mätning af parallelogrammer och trianglar; beskrivning af de enklaste solida figurer samt mätning af parallelepipeder (s 23).

I fortsättningsskolan omfattade kursen tillämpad räkning och geometri:

Öfningar att på blandade praktiska uppgifter tillämpa de fyra räknesätten i hela tal och bråk; beskrifning och mätningar af plana och solida figurer; enkel bokföring (s 33).

I avsnittet Motiv för ämnet räkning i småskolan betonades bl a värdet av "insigt och färdighet att uppfatta de grundläggande talförhållandena". För folkskolans del ville man se mindre av ensidigt mekaniskt räknande och mera av problemlösning som krävde klar uppfattning och eftertanke.

I de nya Normalplaner för folkskolan som följde 1889 och 1900 genomfördes ett antal mindre förändringar [7]. I småskolan skulle man t ex arbeta med "mångfaldigande och delning" och fortsättningsskolan fick en förstärkt geometrikurs. Man upprepade värdet av förståelseinriktad problemlösning och faran med mekaniska räkneövningar:

... att öfva barnens förmåga att behandla praktiska uppgifter, hvilkas lösning kräfver klar uppfattning och eftertanke; och öfningarna att bibringa dem nödig räknefärdighet få icke ned sjunka till ett blott mekaniskt sysslande med uträkning av vissa tal efter en gifven regel och uppställning (s 57).

I normalplanen från 1900 infördes kursplaner i *Matematik med bokföring* i folkskolans "högre afdelning" (en eller flera årsklasser). Här ingick också förstagradsekvationer, geometriska satser och bevis. Denna utvidgning av innehållet var sannolikt ett av motiven för att byta ut ämnesbeteckningen Räkning och geometri mot Matematik. Det dröjde dock till 1955 innan man genomförde detta namnbyte i den obligatoriska folkskolans kursplaner.

I den första Normalplanen för folkskolan fanns en skillnad mellan pojkar och flickor. Geometri omfattade en lektionstimma i åk 5 och en i åk 6 alternativt två timmar i årskurs 6 – men bara för pojkar. Flickor fick ingen geometriundervisning enligt timplanen utan istället en extra timma räkning och en extra timma skrivning! I Normalplanerna 1889 och 1900 fick man avgöra lokalt om flickor skulle ha geometri eller ej:

Om flickorna icke deltaga i undervisningen i geometri, sysselsättas de med räkneöfningar på den för geometri angivna tiden (s 29).

UNDERVISNINGSPLANERNA 1919 OCH 1955 FÖR FOLKSKOLAN

Den fjärde nationella kursplanen i matematik för det obligatoriska skolväsendet ingick i 1919 års Undervisningsplan för folkskolan [8]. Räkning och geometri slogs ihop till ett ämne – *Räkning och geometri* – med gemensam timplan. Kursplanen fick för första gången ett övergripande *Mål* för undervisningen i ämnet. Målet var gemensamt för folkskolans båda stadier, det tvååriga småskolestadiet och det fyra eller femåriga folkskolestadiet.

Undervisningen i räkning och geometri har till uppgift att bibringa barnen en efter deras ålder och utveckling avpassad insikt och färdighet i räkning med särskild hänsyn till vad som erfordras i det dagliga livet ävensom någon förtrogenhet med geometriska storheters uppritning, beskrivning, mätning och beräkning (s 58).

Målbeskrivningen följdes av en momentförteckning för både sex- och sjuårig folkskola. Denna s k Kursfördelning beskrev innehållet i de olika årskurserna – från den första årskursen med tal i området 1-20 eller 1-30 och enkla mått till den sjunde årskursens omfattande innehållsbeskrivning:

> *Procent- och ränteuppgifter med användning, där så finnes ändamålsenligt, jämväl av enkla ekvationer; användning av tabeller med tillämpning exempelvis på försäkringar och sammansatt ränta: utrikes mynt; växlar; andra räkneuppgifter, valda med särskild hänsyn till det praktiska livets fordringar, i främsta rummet sådana, som ansluta sig till näringslivet i hembygden. Särskilda huvudräkningsövningar. Övning i enklare bokföring och i samband därmed ifyllande av vanliga post-, järnvägs- och ångbåtsblanketter samt uppgörande av enkel självdeklaration. Geometrisk kurs, omfattande utom förut behandlade storheter något om ellipser, pyramider, koner och klot och huvudsakligen avseende storheternas uppritning, beskrivning och mätning i förening med enkla praktiska beräkningar. Enkla övningar i grafisk framställning. Enkla fältmätningar (s 60).*

Jämfört med Normalplanerna omfattade Undervisningsplanen mer geometri och många fler tillämpningar från "det praktiska livet" – ett stoff som delvis hämtats från de tidigare kursplanerna för fortsättningsskolan och folkskolans "högre afdelning". Samma sak gällde ekvationer som nu, tillsammans med tabeller och grafisk framställning, blev kursmoment i folkskolans kursplan. Den efterföljande kommentaren kallades Anvisningar. Bland de rekommendationer som gavs kan nämnas:

- *Eftersträva åskådlighet*
- *Gå framåt långsamt*
- *Vänta med siffrorna tills dess att talområdet 1-9 blivit genomgånget*
- *Granska elevernas skriftliga arbete noga*
- *Färdighet i huvudräkning är ett huvudsyfte vid räkneundervisningen*

- *Allt för stora tal bör undvikas*
- *Räkneuppgifternas sakinnehåll bör hämtas från förhållandena i hemmet och i skolan, från arbets- och affärslivet samt från övriga skolämnen*
- *Det är viktigt att låta eleverna pröva riktigheten av gjorda uträkningar*
- *Lär eleverna uppskatta avstånd ute i det fria*

Folkskolans femte och sista kursplan i matematik ingick i 1955 års Undervisningsplan för rikets folkskolor [9]. Denna läroplan var mera omfattande än tidigare planer. Skolämnet Räkning och geometri bytte namn till *Matematik*. Som i tidigare läroplaner inleddes listan av kursplaner med Kristendomskunskap följt av Modersmålet. Matematik som tidigare alltid kommit direkt efter modersmålet kom nu först på tionde plats, efter språk och orienteringsämnen. Det övergripande målet för matematikundervisningen uttrycktes på följande sätt:

> *Undervisningen i matematik har till uppgift att giva kunskap och färdighet i räkning samt någon förtrogenhet med geometrins enklaste begrepp och metoder. Säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning skall eftersträvas. Undervisningen skall så bedrivas att eleverna vänjes vid den tankereda, noggrannhet och målmedvetenhet som ämnet kräver (s 123).*

Målbeskrivningen följdes av en lista med Kursinnehåll fördelat på de olika årskurserna. Kursplanen gällde sjuårig folkskola med förslag till lokala kursplaner för åk 8 och 9. Inga större förändringar var gjorda för de första sju åren jämfört med 1919. I kursplanen för nionde skolåret ingick algebra, formler, grafisk framställning och några enkla geometriska bevis. Kursplanen liknade den plan som några år tidigare kommit ut för försöksverksamheten med den nioåriga enhetsskolan. Liksom i 1919 års plan följdes kursplanen av kommenterande Anvisningar.

DEN NIOÅRIGA ENHETSSKOLAN

1949 påbörjades försöksverksamhet med nioårig enhetsskola i vårt land. Läroplanerna kallade *Timplaner och Huvudmoment (ToH)*, gavs ut och förnyades i flera omgångar under försöksverksamheten [10]. ToH 55 gällde från 1955 och inleddes liksom Undervisningsplanerna med ett övergripande Mål:

> *Undervisningen i matematik har till uppgift att ge kunskap och färdighet i räkning samt någon förtrogenhet med algebrans och geometrins elementära begrepp och metoder. Eleverna bör förvärva säkerhet och snabbhet i såväl huvudräkning som skriftlig räkning. De bör göras förtrogna med allmänt brukliga matematiska uttryck, och deras natur- och samhällsorientering bör vidgas genom räkneproblemens sakinnehåll. Genom undervisningen i geometri bör förmågan av rumsföreställning uppövas och den geometriska fantasin utvecklas. Elevernas personlighetsfostran bör befrämjas därigenom, att de få erfara vikten av samvetsgrant och mycket noggrant arbete samt nödvändigheten av tanke. och viljeansträngning för att förelagda uppgifter skall kunna lösas (s 77).*

Tidigare kursplaner innehöll årskursvisa momentförteckningar. Huvudmomenten var nu fördelade på tre nivåer efter den nya stadieindelningen, Lågstadiet, Mellanstadiet och Högstadiet. De följdes av detaljerade och omfattande förslag till innehåll för de olika årskurserna inom respektive stadium. På högstadiet var innehållet dessutom uppdelat på alternativkurs 1 och 2. I slutet av denna historik ger vi en översiktlig beskrivning av alternativkursfrågan i det nationella läroplansarbetet.

En annan skillnad mellan folkskolans sista kursplan och ToH var att huvudmomenten grupperades i större kunskapsområden. På högstadiet var områdena Aritmetik, Algebra, Geometri och Tillämpningar. Som i folkskolans Undervisningsplan avslutades kursplanen med Anvisningar.

I enhetsskolan delades nionde årskursen upp i tre program 9y (yrkesförberedande), 9a (allmän) och 9g (gymnasieförberedande). Eleverna i 9y studerade inte efter kursplanen i matematik. På de olika grenarna av 9y infördes istället kursplaner i tillämpad matematik som yrkesräkning, handelsräkning, räkenskapsräkning och yrkesritning. Så här såg huvudmomenten ut för området Handelsräkning:

> *I anslutning till undervisningen i övrigt: Repetition av hela tal och decimalbråk samt kort repetition av enkla bråk allmänna bråk. Sorträkning med svenska längd-, vikt-, yt- och rymdmått, enkla exempel med utländska mynt, reguladetri, blandningstal, procent- och ränteräkning samt något om sammansatt ränta. Enkla inköpskalkyler. Något om stapeldiagram och kurvor. Enkla praktiska planimetriska uppgifter. Övningar i användningen av räknemaskiner (s 119).*

LGR 62

Grundskolans första kursplan var uppbyggd på samma sätt som enhetsskolans med ett övergripande mål [11].

> *Genom undervisningen i matematik skall elevernas förmåga att handskas med kvantitativa begrepp utvecklas. Undervisningen har till uppgift att ge kunskap och färdighet i elementär aritmetik och algebra samt förtrogenhet med geometrins elementära begrepp och metoder. På grundval av en klar insikt bör eleverna förvärva säkerhet i att genom såväl huvudräkning som ändamålsenliga skriftliga tillvägagångssätt lösa olika slag av matematiska uppgifter, i första hand av praktisk natur. Undervisningen i geometri bör med utgångspunkt i elevernas iakttagelser av figurers och kroppars form öva deras förmåga av rumsföreställningar och utveckla deras geometriska fantasi. Eleverna bör efter hand göras förtrogna med allmänt brukliga matematiska termer och uttryckssätt. Genom sitt innehåll bör undervisningen ge dem en vidgad natur- och samhällsorientering (s 164).*

Därefter följde Huvudmoment fördelade på tre stadier och på allmän och särskild kurs samt ett detaljerat förslag till disposition av en studieplan för de nio årskurserna. Som i ToH fanns tillämpad matematik i 9y. Alternativkurserna var inte längre förslag utan en fastställd differentiering av huvudmomenten på högstadiet.

En av de största skillnaderna mellan enhetsskolans försöksplaner och kursplanen i Lgr 62 var omfattningen av Anvisningar och kommentarer. Denna del hade nu byggts ut från 4 sidor till en 20 sidor lång metodisk handledning. Grundskolans första kursplan var annars ganska "traditionell" och innehåller få nyheter jämfört med Timplaner och Huvudmoment för enhetsskolan.

LGR 69

Matematiken i Lgr 69 skilde sig starkt från tidigare kursplaner [12]. Den modernisering av skolmatematikens innehåll som genomfördes på flera håll i världen fick fullt genomslag i vårt land. Starkare än tidigare betonades betydelsen av förståelse och att utgå från elevens uppfattningar och tänkande. Kursplanen fick nya moment som Negativa tal, Beskrivande statistik, Sannolikheter och Funktioner, Räkning med tekniska hjälpmedel och Matematiska modeller. Det övergripande målet för matematik omfattade hela grundskolan.

Undervisningen i matematik skall utgå från elevernas erfarenheter och föreställningar och grundas på förståelse. Den skall efter hand ge förtrogenhet med några väsentliga begrepp och tillvägagångssätt inom aritmetik, geometri, algebra och beskrivande statistik samt kännedom om funktions- och sannolikhetsbegreppen. Undervisningen skall vidare uppöva färdighet i numerisk räkning, även med tekniska hjälpmedel, och ge inblick i hur matematik används i olika sammanhang (s 137).

Texterna med Anvisningar var korta och huvudmomenten gemensamma för allmän och särskild kurs. Kursplanen innehöll inte någon Mängdlära och mycket lite av den matematikterminologi som kom att känneteckna "den nya matematiken". Detta dominerade däremot handledningen "Matematikterminologi i skolan" som Skolöverstyrelsen gav ut redan 1966 [13]. Handledningen påverkade snabbt läromedlen i matematik genom anvisningarna till den nationella läroboksgranskning som var obligatiskt under dessa år och genom de anvisningar som gällde för utformningen av de styrande standardproven. Terminologin ledde till starka protester från både matematiker och lärare. Ett särskilt Supplement till kursplanen i Lgr 69 med kompletterande anvisningar och kommentarer hade också en stark prägel av "den nya matematiken" [14]. Supplementet var ett förslag till disposition av studieplan, men detta blev av olika anledningar den verkliga kursplanen i matematik. Jämfört med tidigare kursplaner var förändringarna många i supplementets momentförslag.

1. *Naturliga tal,*
2. *Mätningar,*
3. *Geometri,*
4. *Decimaltal,*
5. *Rationella tal,*
6. *Negativa tal,*
7. *Räknemaskiner. Räknesticka. Tabeller,*
8. *Statistik och sannolikhetslära,*
9. *Funktionslära,*
10. *Reella tal,*
11. *Ekvationer, olikheter och ekvationssystem,*
12. *Matematiska modeller.*

Exempel på den förståelseinriktade ambitionen kan man se i nya förslag till inledande undervisning om algoritmräkning och geometri. Flera av de begrepp som föreslogs i studieplanen, t ex vektorer, hade tidigare förekommit endast på matematikintensiva gymnasielinjer. Skolöverstyrelsen gav också ut en handledning till Lgr 69, *Basfärdigheter i matematik* 1973, som skulle tjäna som vägledning till arbetet vid planering av undervisningen för lågpresterande elever [15]. Handledningen kom till för att möta reaktionerna på "överteoretiseringen" i kursplanen – eller rättare sagt i dess Supplement [16]. I slutet av 70-talet gavs det ut en ny "Matematikterminologi i skolan" där det mesta av den "nya matematikens" terminologi hade lyfts ut [17].

LGR 80

Redan i läroplanens övergripande mål anges matematikundervisningens viktigaste uppgift [18]. I Lgr 80 handlar det i första hand om räkning. Detta kan uppfattas som en reaktion mot "den nya matematiken" i Lgr 69: "Back to basics".

> *Tala, läsa, skriva och räkna utgör grunden för det mesta av det arbete som utförs i skolan och i arbetslivet. ... Att elever tränar och systematiskt får utveckla de grundläggande kommunikationsfärdigheterna, tala, läsa, skriva och räkna, måste därför vara centralt i skolarbetet* (Lgr 80, s 15).

Lgr 80:s matematikkursplan är liksom övriga kursplaner i Lgr 80 uppbyggd kring tre avsnitt, *Syfte, Mål* och *Huvudmoment.* Målavsnittet består av tre delar. Den första betonar behoven av matematik för individ och medborgare. I båda fallen är det övergripande målet att förvärva god förmåga att lösa vardagsproblem. Detta skall ske genom att eleverna förvärvar allsidiga räknefärdigheter och kunskaper i fyra av de nio huvudmomenten. I denna del finns också riktlinjer för arbetet.

Den andra delen omfattar *sådana kunskaper och färdigheter i matematik som de har användning för vid fortsatta studier i andra ämnen, fortsatta studier efter grundskolan, på fritid och i arbetsliv.* Dessa mål skall eleverna nå genom att dessutom tillägna sig kunskaper om innehållet i övriga huvudmoment och i övriga delar av tidigare nämnda huvudmoment.

Målavsnittet i kursplanen avslutas med att riktlinjer och principer för arbetet blandas med övergripande utbildningsmål som att kunna förstå, använda och tillämpa matematiken och att utveckla logiskt tänkande.

Sammanfattningsvis kan man säga att målavsnittet, under syftet och de övergripande utbildningsmålen, delar upp ämnet matematik i två målområden. Huvudmomenten sorterar sedan under dessa. Uppdelningen följer i huvudsak skollagens uppdelning av de övergripande målen för grundskolan. Skrivningen kan ses som en första innehållsdifferentiering där målen i det första målområdet anses viktigast och prioriteras högst i grundskolans matematikundervisning.

Det tredje och sista avsnittet i kursplanen innehåller det ämnesinnehåll och de aktiviteter som läggs fast för grundskolans matematikundervisning. Detta omfattar nio av kursplanens tio sidor och beskrivs i form av nio huvudmoment:

> *Problemlösning, Grundläggande aritmetik, Reella tal, Procent, Mätningar och enheter, Geometri, Algebra och funktionslära, Beskrivande statistik och sannolikhetslära och Datalära.*

Innehållet i respektive huvudmoment fördelas på fyra nivåer i ett hierarkiskt system. Grunden för differentieringen framgår av texten före nivåbeskrivningen:

> *En elev får inte börja med ett nytt moment utan tillräcklig grund från tidigare moment* (s 99).

På varje stadium finns två nivåer:

I. Moment som alla elever skall bearbeta och förvärva grundläggande kunskaper och färdigheter *i*

II. Moment som de flesta elever bör orientera sig *om*

Dessa är kopplade till varandra så att momenten på den andra nivån, önskvärda kunskaper, inom ett stadium är identiska med momenten på den första nivån, nödvändiga kunskaper, på nästa stadium. I texten till varje huvudmoment ges kommentarer samt motiv, principer och riktlinjer för val av innehåll och aktiviteter. Det första huvudmomentet har en övergripande roll i förhållande till övriga. *Problemlösning skall förekomma inom alla huvudmoment.*

Betoningen av vardagsproblem och aritmetik får alltså ses som en reaktion mot "den nya matematiken" i Lgr 69, framförallt i dess matematiksupplement. Ett kommentarmaterial utarbetas till kursplanen: "Att räkna. En grundläggande färdighet" [19]. Det utkom 1982 och får betraktas som en metodisk handledning med förslag och kommentarer.

Kursplanen i Lgr 80 handlar främst om vad undervisningen ska innehålla och hur den ska gå till. Syften, mål och riktlinjer blandas:

> *Genom skolarbetet ska eleverna skaffa sig sådana kunskaper och färdigheter i matematik som de har användning för vid studier av andra skolämnen, vid fortsatta studier efter grundskolan på fritiden och i arbetslivet (s 98).*
>
> *Undervisningen ska vara så konkret, att varje elev kan förankra begreppen och förstå användningen i praktiska situationer (s 99).*

Ett övergripande mål i Lgr 80 blev alltså att förvärva god förmåga att lösa vardagsproblem, bl a genom att utveckla allsidiga räknefärdigheter. Problemlösning blev ett nytt huvudmoment - det första. Allmänt skulle eleverna också utveckla sådana kunskaper och färdigheter i matematik som de har användning för vid fortsatta studier i andra ämnen, fortsatta studier efter grundskolan, på fritid och i arbetsliv.

ALTERNATIVKURSFRÅGAN

Den 26 maj 1950 fattade riksdagen det viktiga principbeslutet om en nioårig enhetsskola [20]. Sverige hade bestämt sig för att ersätta parallellskolesystemet med en sammanhållen nioårig obligatorisk utbildning. En omfattande försöksverksamhet drogs i gång. En av de största frågorna var, hur man skall klara av undervisningen i sammanhållna klasser i nio år. Matematikämnet ansågs vara ett av de mest kritiska. I försöksverksamheten enligt Timplaner och Huvudmoment 1955, infördes grundkurs och överkurs i en del ämnen [10]. Men den största nyheten var nog *Alternativkurser.*

> *Den nödvändiga differentieringen med hänsyn till elevernas olika förutsättningar kan ske genom den uppdelning i grundkurs och överkurs som nämns i anvisningarna till varje ämne ... För att ytterligare underlätta anpassningen av undervisningen efter förutsättningarna hos de olika elevgrupperna i en klass, har för vissa ämnen (moderna språk, matematik, fysik och kemi) utarbetats förslag till sk alternativkurser. Dessa är exempel på hur man kan differentiera kurserna, och de har till omfattning och innehåll varierats efter olika elevers studiemål och förutsättningar* (s 20).

Beslutet föregicks av en livlig debatt och många ansåg att alternativkurserna var ett officiellt avsteg från försöksverksamhetens ideologiska värdegrund. 1957 års skolberedning hade en svår avvägning att göra inför Lgr 62. Den stannade vid sammanhållna klasser i åtta år och en organisatorisk differentiering i årskurs 9 med tre program 9y, 9a och 9g samt alternativkurser i bl a matematik på högstadiet. Men beslutet visade sig vila på lösa grunder:

> *Här vill beredningen dock erinra om den av forskningssekreterare Nils-Erik Svensson företagna undersökningen om prestationsutvecklingen i olika differentieringsmiljöer ... tyder på att en homogenisering av klasserna för de ur skolans synpunkt svagaste eleverna medför för dem ogynnsamma konsekvenser i fråga om kunskapsinhämtandet samtidigt som homogeniseringen inte har några påtagliga positiva effekter för de bästa eleverna.*
>
> (SOU 1961:30, [21])

På en avgörande punkt i sin argumentering har t ex 1957 års skolberedning dragit en slutsats, som kan uppfattas och också har tolkats så att en homogenisering genom organisatorisk differentiering missgynnar de sämsta eleverna utan att för den skull ge några positiva effekter för de bästa. Den resultatbild som kan utläsas ur stockholmsundersökningen ger snarare stöd för den motsatta tolkningen.

(Dahllöf, 1967, [22])

Många ville ha betydligt tidigare differentiering medan andra uppfattade alternativkurserna som en rest från det gamla parallellskolesystemet som måste avskaffas:

I en grundläggande allmänbildande skola för alla bör i princip undervisningen bedrivas enligt en läroplan utan alternativkurser i något ämne

(SOU 1961:30, [21])

Både de som förordade tidig differentiering och de som ville ha en helt sammanhållen grundskola åberopade pedagogisk expertis och olika forskningsprojekt som genomförts i anslutning till försöksverksamheten. Beslutet kom emellertid att fattas på andra grunder:

Det är värt att notera att det föredragande statsrådet Ragnar Edenman i riksdagsdebatten med viss emfas slog fast att differentieringsproblemet i en obligatorisk skola inte är en pedagogisk utan en rent politisk fråga.

(Unenge, 1997, [21])

Nästan direkt efter det att Lgr 62 trätt i kraft startade arbetet på Skolöverstyrelsen, SÖ med att försöka avskaffa alternativkurserna. Man trodde att problemet kunde lösas med hjälp av förbättrade och utvecklade läromedelssystem, sk metod-materialsystem. Med utgångspunkt i den försöksverksamhet som började i Braås 1963 startade det mycket omfattade IMU-projektet

(Individualiserad matematikundervisning). Projektet och tillhörande undervisningsteknologi skulle inte bara lösa alternativkursproblemet utan också ge stora rationaliseringsvinster på lärarsidan och därmed lösa det stora problemet med lärarbristen i matematik [23]. Med hänvisning till erfarenheter från IMU-projektet föreslog Skolöverstyrelsen 1968, innan projektet slutrapporterats, att alternativkurserna i matematik skulle slopas. Men i likhet med 1961 hade man knappast den grund för förslaget som man gjorde gällande:

"Within Sweden, the National Board of Education did not wait for the results of experimentation to recommend regular introduction of the IMU system nation-wide. In November 1968 the Board stated: Even if the final scientific efficiency have not yet been completed, he board has nevertheless found the data already available so overwhelmingly positive that the application of the methods-material-systems approach should now be allowed in schools " (Tescher, 1973, 403). This recommendation was done without consulting the IMU researchers and they reacted against what they saw as premature and compulsory introduction of the system into schools.

(Howson et al. 1981, [24])

Regeringen följde inte Skolöverstyrelsens förslag utan behöll alternativkurserna i matematik i Lgr 69.

I förarbetena till Lgr 80 föreslog SÖ åter igen att alternativkurserna skulle slopas, trots starkt motstånd från många håll. Denna gång var det inte differentierade läromedel som skulle lösa problemen utan ett decentraliserat flerårigt lokalt utvecklingsarbete. Förebilder fann man bl a i en svensk kommun, där några lärare hade startat ett lokalt utvecklingsarbete i matematik utan alternativkurser.

Den resurs som var kopplad till alternativkurserna skulle få behållas under en övergångsperiod på 5 år. Men regeringen gick inte heller denna gång på SÖ:s förslag. Man ansåg att frågan måste utredas ytterligare:

> *Alternativkurserna i matematik och engelska bör däremot finnas kvar ... Den pedagogiska frågan slutligen, vilken typ av gruppering som ger eleverna bästa färdighetsträningen och är positiv även ur andra synpunkter bör avgöras först efter utprövning. Det bör finnas frihet för kommuner att delta i försöksverksamhet med annan organisation än alternativkurser. Försöksverksamheten bör medges av SÖ och ges tillräcklig omfattning för att bilda grund för vidare ställningstaganden. Vilka elevgrupperingar som uppkommer om alternativkurserna överges bör noggrant studeras. SÖ bör få i uppdrag att utvärdera försöksverksamheten och inkomma med förslag i frågan fem år efter det att läroplanen trätt i kraft*
>
> (Prop 1978/79:100, [25]).

Utbildningsutskottet ställde sig bakom regeringens förslag [26]. Uppdraget till SÖ formuleras på följande sätt:

> ... *beträffande alternativkurserna i engelska och matematik genom försöksverksamhet studera vilka elevgrupperingar som uppkommer, om alternativkurserna slopas, samt så snart som möjligt utvärdera denna försöksverksamhet och senast den 1 juli 1987 inkomma med de förslag som försöksverksamheten ger anledning till.*
>
> (Prop 1978/79:100, [25])

Alternativkurserna blev alltså kvar också i Lgr 80. Kursplanen i matematik i Lgr 80 innehåller på sätt och vis två kurser på varje stadium – en slags allmän och särskild kurs på varje stadium. Men det sägs inget om alternativa kurser i matematik i kursplanen. Ordet alternativkurs saknas som sökord i sakregistret i Lgr 80. Det finns bara med på en enda plats i läroplanen, nämligen på sidan 159, som den 5:e föreskriften under rubriken Timplaner:

> *5. Alternativkurser*
> *På högstadiet finns alternativa kurser i ämnena matematik och engelska. Föräldrar till elev väljer efter samråd med eleven för varje läsår alternativkurs* (s 159).

Det finns alltså inga skrivningar om allmän och särskild kurs vare sig i kursplanen för matematik och eller i tillhörande kommentarmaterial till Lgr 80. Eleverna har fått betygsstyrande nationella standardprov på allmän eller särskild kurs – och sedan fått betyg på dessa kurser – som egentligen inte funnits. Denna förvirrade situation speglar på något sätt de motsättningar och den osäkerhet som funnits i alternativkursfrågan ända sedan kurserna introducerades i mitten av 50-talet.

Den försöksverksamhet med alternativ till alternativkurser som SÖ fick i uppdrag att genomföra och rapportera senast i juli 1987 fick ingen avgörande betydelse för frågans behandling i förarbetena till Lpo 94. Det blev istället den nya decentraliserade ansvarsfördelningen och målstyrningen som definitivt satte punkt för det nationellt reglerade alternativkurssystemet. Regeringens motiv till det smått historiska beslutet återges här i sin helhet:

> *Nuvarande reglering om alternativkurser i engelska och matematik upphör.*
>
> (prop 1992/93:220, s 53, [27])

> *Sedan grundskolan infördes har undervisningen i engelska och matematik bedrivits i två kurser, allmän och särskild kurs. I Lgr 80 återfinns den centrala regleringen i en kort föreskrift till timplanen. Där anges att alternativa kurser finns på högstadiet och att föräldrar efter samråd med eleven väljer alternativkurs för varje läsår. Däremot finns det endast en kursplan i engelska respektive matematik. Betygssättning har dock skett utifrån skilda referensgrupper.*

Under ett antal år har försöksverksamhet och utvecklingsarbete bedrivits för att komma fram till andra sätt att gruppera eleverna och differentiera undervisningen. Ett växande antal skolor överger nu alternativkurssystemet. Ett relativt stort antal elever väljer dock allmän kurs i årskurs 9 vilket kan tolkas som utslag av taktikval inför slutbetyget.

I och med de förändringar som ett nytt statsbidragssystem inneburit har en central reglering av hur eleverna skall grupperas kommit i ett nytt läge. Kommunerna bestämmer själva hur resurserna skall fördelas. De förslag, som vi lägger i denna proposition om timplaneutrymme för elevens fria val och lokal profilering, innebär därtill ökande möjligheter för skolorna att tillgodose elevernas olika intressen och behov. Det är en professionell bedömning som bör ligga till grund för hur eleverna skall grupperas för att uppnå bästa möjliga studieresultat. Vi återkommer till detta i avsnitt 3.5. De lokala förutsättningarna varierar. Elever har skilda intressen, förutsättningar och behov och skolorna har möjligheter att tillgodose dessa variationer på olika sätt. Ämnena är också olika till sin karaktär. Vi gör därför bedömningen att någon central reglering av alternativa kurser i engelska och matematik inte längre behövs.

(prop 1992/93:220, s 62, [27])

Riksdagen hade inget att erinra mot denna skrivning. Därmed sattes punkt för en av 1900-talets största och mest omdiskuterade skolfrågor, differentieringsfrågan. Den är nu reducerad till en lokal fråga för rektor, reglerad på en enda mening i grundskoleförordningen:

Eleverna skall fördelas på klasser och grupper enligt beslut av rektorn.

(SFS 1994: 1194, 4 kap., 4 §, [28])

Från elevperspektiv ger naturligtvis två alternativkurser en alltför mekanisk uppdelning av matematikinnehållet. Systemet med en fast organisatorisk differentiering visar sig ha negativa effekter på många elevers självuppfattning, intresse, motivation och attityder till matematik och matematikstudier i den känsliga 14-15-åråldern [29]. Det är nu upp till de professionella: lärare, skolledare att – inom ramen för grundskolans styrdokument – i samråd med elever och föräldrar välja arbets- och organisationsformer som är de bästa utifrån egna och skolans förutsättningar för att målen med utbildningen i matematik skall nås. Kommer det fortfarande att innebära att matematik får mer lärarresurser än andra ämnen i förhållande till garanterad undervisningstid? Ja, det avgörs nu lokalt!

Avslutningsvis kan vi konstatera att den diskussion som förts i tre decennier om elevgrupperingar och olika kurser i matematik på högstadiet nu upprepas på gymnasiet. Orsaken till detta är att matematik (kurs A) blivit obligatoriskt kärnämne för alla elever. Måste man nivågruppera för att kunna individualisera eller går det att individualisera i "heterogena grupper" inom gruppens ram. Det är bara att hoppas att gymnasiets lärare försöker ta del av de många erfarenheter som vunnits på grundskolans högstadium under arbetet med alternativkurser och med olika alternativ till alternativkurser [30].

SAMMANFATTNING

Vi kan konstatera att det saknas formulerade motiv för matematikämnet i målbeskrivningarna för matematikämnet i måldokumenten från 1842, 1878, 1889, 1900, 1919, 1955 och 1969. Inte förrän 1980 ges en motivering, om än något obestämd, för matematikämnets plats i svensk skola. När man läser de centrala styrdokumenten får man ett intryck av att matematiken har haft en sådan självklar plats i skolan att ämnet inte behövt motiveras [31].

Antalet årskursveckotimmar för matematik har i stora drag varit oförändrat i 150 år. Då antalet årskurser successivt blivit fler har också undervisningstiden i matematik förlängts. När man utifrån de behandlade texterna försöker rekonstruera motiv för matematikämnet så ser man en antydan till stegring av motiv för privatlivets behov. I 1955 års plan för folkskolan har formuleringar kring "praktiska uppgifter" och "dagliga livet" bortfallit helt. Målen ger ingen signal om att det finns syften för matematiken betingade av samhälls- eller privatliv. I Timplaner och Huvudmoment för enhetsskolan, 1955 finns däremot en mera "modern" beskrivning, som visar på att syften skall svara mot behov i både samhälle och privatliv.

I grundskolans första läroplan, Lgr 62, kan man spåra kompromissen mellan folkskoletankar och realskoletankar. Den fackmatematiska karaktären är starkare än i ToH 1955. I 1969 års mål finns ingenting som direkt uttrycker behov av matematik i vare sig samhälle eller privatliv. "Den nya matematiken" introduceras, främst i rekommenderad matematikterminologi för skolan och i kursplanens supplement som i praktiken blir kursplan. Många nya "inommatematiska" begrepp och moment introduceras vilket snabbt leder till en motreaktion. Den konkretiseras i en basfärdighetshandledning för de lägst presterande eleverna och i en återgång till betoning på vardagsmatematik i Lgr 80. Kursplanen i Lgr 80 innehöll flera nyheter. För första gången ser vi ett framskrivet syfte för matematikämnet i skolan. Vi får en helt ny typ av huvudmoment, problemlösning. Uppdelningen på nivåer inom respektive stadium är också ny.

REFERENSER

[1] Duhre, A. G. (1721). *Första delen af en grundad geometria.* Stockholm.

[2] SKOLFS 1994:1. *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet,* Lpo 94. SKOLFS 1994:3. *Kursplaner för grundskolan.*

[3] Årsböcker i svensk undervisningshistoria, nr 178. *Aurelius räknelära från 1614.* Uppsala: Föreningen för svensk undervisningshistoria.

[4] Strömer, M. (1744). *Euclides Elementa.* Uppsala.

[5] Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1994). Begrundelseproblemet i den elementära matematikundervisningen i Sverige. *I Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen. Göteborg 26-28 januari 1994. Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.*
Kungl. Maj:ts Nådiga Stadga angående Folkundervisningen i riket (1842). Gifwen Stockholms Slott den 18 Junii 1842.

[6] *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor (1878).* Stockholm: P.A. Norstedt & söner.

[7] *Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor* (1889). Stockholm: P.A. Norstedt & söner.
Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor (1900). Stockholm: P.A. Norstedt & söner.

[8] *Undervisningsplan för rikets folkskolor* (1919). Stockholm: P.A. Norstedt & Söners förlag.

[9] *Undervisningsplan för rikets folkskolor* (1955). Stockholm: Svenska Bokförlaget Norstedts.

[10] ToH. *Timplaner och huvudmoment för studieplaner för skolor av A- och B-form vid försöksverksamhet i anslutning till 1946 års skolkommissions principförslag* (1951). Stockholm: Kungliga skolöverstyrelsen. (Fastställda för läsåren 1951/54). (Timplaner och huvudmoment vid försöksverksamhet med nioårig enhetsskola (1955). Stockholm: Svenska bokförlaget Norstedts. (Fastställda för läsåren 1955/58).

[11] Läroplan för grundskolan, *Lgr 62.* (1962). Kungliga Skolöverstyrelsens skriftserie 60: Stockholm: Kungliga Skolöverstyrelsen.

[12] Läroplan för grundskolan, *Lgr 69. Allmän del.* (1969). Stockholm: Skolöverstyrelsen.

[13] Skolöverstyrelsen (1966). *Matematikterminologi i skolan.* Stockholm: Skolöverstyrelsen.

[14] Läroplan för grundskolan *Lgr 69 II: Ma. Supplement. Matematik.* (1969) Stockholm: Skolöverstyrelsen.

[15] *Basfärdigheter i matematik.* Skolöverstyrelsens handledningar. (1973). Stockholm: Skolöverstyrelsen.

[16] Carlesson, L. (1968). *Matematik för vår tid. En presentation och ett debattinlägg.* Stockholm: Bokförlaget Prisma.
Håstad, M. (1978) *Matematikutbildning från grundskola till teknisk högskola. I går - i dag - i morgon.* Stockholm: KTH
Kilborn, W. m.fl. (1977). Hej Läroplan! Hur man bestämmer vad våra barn skall lära sig i matematik. *PUMP-projektet rapport nr 15.* Mölndal: Pedagogiska institutionen, Göteborgs universitet.
Unenge, J. (1997). *Med mina ögon sett. Några nedslag i skolmatematikens historia.*

[17] Skolöverstyrelsen (1979). *Matematikterminologi i skolan.* Stockholm: Liber Utbildningsförlaget

[18] Läroplan för grundskolan, *Lgr 80.* Allmän del. Mål och riktlinjer. Timplaner. Kursplaner. (1980). Stockholm: Liber.

[19] Lgr 80. *Kommentarmaterial. Att räkna. En grundläggande färdighet.* (1982). Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.

[20] Regeringens proposition 1950:70.

[21] SOU 1961:30.
Unenge, J. (1997). *Med mina ögon sett. Några nedslag i skolmatematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

[22] Dahllöf, U. (1967). *Skoldifferentiering och undervisningsförlopp.* Göteborg Studies in Educational Research No 2. Göteborgs universitet, pedagogiska institutionen.

[23] Larsson, I. (Red.) (1973). *Individualiserad matematikundervisning. En bok om IMU-projektet.* Pedagogisk Orientering och Debatt 43. Malmö: Hermods.
Marklund, I. (1986). Från IMU till IEA. *Nämnaren 12*(4), 12 – 14.

[24] Howson, G., Keitel, C., Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics.* Camebrigde, England: Camebridge University Press.

[25] Regeringens proposition 1978/79:100.

[26] Utbildningsutskottets betänkande 1978/79: UbU 45

[27] Regeringens proposition 1992/93: 220.

[28] SFS 1994: 1194. Grundskoleförordningen.

[29] Dahlgren, L.-O., Eriksson, R., & Hellström, L. (1985). *Gruppera mera? Erfarenheter från försök med olika grupperingar i engelska och matematik på högstadiet.* Skolöverstyrelsen, rapport R 85:35.
Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning om liv och arbete i svenska klassrum.* Stockholm: Skolverket.
Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund och erfarenheter.* (FoU-rapport 37). Stockholm: Liber Utbildningsförlaget.
Kilborn, W. (1986). Att individualisera är inte att organisera. *Nämnaren 13*(2-3), 55-59.
Marklund (1980). *Differentieringsfrågan.* Stockholm: Liber Utbildnings-förlaget.

[30] Emanuelsson, G., Johansson, B., Nilsson, M., Olsson, G., Rosén, B. & Ryding, R. (Red.) (1995). *Matematik ett kärnämne.* Nämnaren TEMA. Mölndal: Göteborgs universitet, Institutionen för ämnesdidaktik.

[31] Niss, M. (1995). *Goals of Mathematics Teaching.* Tekst Nr 306. Roskilde, Danmark: IMFUFA. [This report is a preprint of one chapter of the forthcoming International Handbook of Mathematics Education (Alan. J. Bishop, Ed.]