

# **Analys och förslag för gymnasieskolans och högskolans matematikutbildning**

Matematikdelegationen, arbetsgrupp 11-H

februari 2004

## Förord

Arbetsgruppen 11-H har fått i uppdrag av matematikdelegationen att analysera och ge förslag beträffande matematikutbildningen i gymnasieskolans två sista år och högskolans grundutbildning och forskarutbildning. Arbetsgruppen ber härmed att få överlämna ett underlag till delegationen. Målgruppen för följande text är i första hand delegationens medlemmar. Det kortare dokument på högst 10 sidor som delegationen begärt återfinns i första avsnittet som innehåller en sammanfattning av analysen och de viktigaste av våra konkreta förslag. På grund av den komplexa karaktären av frågorna har vi dock funnit det omöjligt att inom ramen för totalt 10 sidor lägga fram alla relevanta argument och analyser som stöder våra förslag. Därför väljer vi att presentera en längre text, samt bilagor, där delegationens medlemmar kan läsa mer om bakgrunden till förslagen.

Syftet är att samlat presentera en analys av nuläget, en problemformulering och förslag till åtgärder. Utgångspunkten är delegationens uppdrag och uppdraget till arbetsgrupperna som återfinns i bilagor. Arbetsgruppens avgränsning av uppdraget redovisas i ett inledande avsnitt.

Denna text gör inte anspråk på att utgöra en heltäckande beskrivning utan det är arbetsgruppens värdering av vad som är viktigt och möjligt att analysera på en kort tid (ett halvt år). Vi bygger på tidigare utredningar och rapporter, samt vissa egna kartläggningar. Gruppens medlemmar har skrivit utkast till olika delar av rapporten och bearbetat hela texten genomsamt.

Arbetsgruppen har följande medlemmar:

Gerd Brandell, Lunds universitet, ordförande

Leif Abrahamsson, Uppsala universitet

Tom Britton, Stockholms universitet

Ola Helenius, NCM och Karlstads universitet, sekreterare.

Anette Jahnke, Hvitfeldtska gymnasiet, Göteborg, medlem i delegationen

Christer Kiselman, Uppsala universitet, medlem i delegationen

Per-Eskil Persson, Klippans gymnasium och Malmö högskola

Elisabeth Sjöstedt, Uppsala universitet, medlem i delegationen

Attila Szabo, S:t Eriks gymnasium, Stockholm

Delegationen har i samråd med arbetsgruppen för lärarutbildning och arbetsgruppen 11-H beställt kartläggningar av utomstående experter. Det gäller två enkätundersökningar riktad till gymnasielärare genomförda vid SCB av Anders Karlsson. Delegationen har också på förslag av arbetsgruppen 11-H beställt en kartläggning av elevers och studenters deltagande i matematikundervisning i gymnasieskolan och högskolan genomförd av Lars Brandell. Dessutom har arbetsgruppen 11-H genomfört andra enkäter i egen regi.

En preliminär version av denna text (inte i fullständigt skick) har i december 2003 skickats till en rad referenspersoner, som vi tackar för medverkan med konstruktiva synpunkter.

Lund den 2 februari 2004

För arbetsgruppen

Gerd Brandell

ordförande

**Innehåll**

<b>Sammanfattning</b>	<b>4</b>
<b>Kapitel 1 Inledning och bakgrund</b>	<b>15</b>
<b>Kapitel 2 Vad är matematik?</b>	<b>17</b>
<b>Kapitel 3 Vad är matematisk kompetens?</b>	<b>23</b>
<b>Kapitel 4 Gymnasieskolans matematik</b>	<b>27</b>
<b>Kapitel 5 Högskolans grundutbildning i matematik</b>	<b>39</b>
<b>Kapitel 6 Övergången gymnasium – högskola</b>	<b>48</b>
<b>Kapitel 7 Forskarutbildning i matematiska ämnen</b>	<b>52</b>
<b>Kapitel 8 Kompetensutveckling</b>	<b>55</b>
<b>Kapitel 9 Jämställdhet och mångfald</b>	<b>59</b>
<b>Kapitel 10 Matematikdidaktisk forskning och pedagogiskt utvecklingsarbete</b>	<b>66</b>
<b>Kapitel 11 Ett övergripande matematikprojekt</b>	<b>68</b>
<b>Referenser</b>	
<b>Bilagor, förteckning</b>	

## Sammanfattning

### *Vision*

Arbetsgruppen 11- H har avgränsat sitt uppdrag till att gälla framförallt yrkeslivets behov. Kunskaper för yrkeslivet är motiverade både utifrån *individens* och utifrån *samhällets* behov. Vi utgår från att delegationen också behandlar matematikutbildningen utifrån andra motiv, men har inte i vår arbetsgrupp haft möjlighet att arbeta med hela spektret av motiv för matematik i utbildningssystemet.

Vi anlägger ett systemperspektiv på matematikutbildningen och har i våra analyser utgått från ett önskvärt sammanhang i systemet och ömsesidig förståelse mellan representanter för de olika delarna i systemet. Arbetsgruppen menar också att läraren är den enskilt viktigaste faktorn för att ge elever och studenter lust och möjligheter att lära matematik och att lärarkompetensen därför är en central fråga.

Arbetsgruppens vision kan sammanfattas som

- *ett effektivt och väl fungerande samband mellan gymnasieskolans och högskolans matematikutbildning*
- *en dimensionering av och ett utbud vid gymnasieskola, kommunal vuxenutbildning och högskola som uppfyller kravet att*
  - (a) ge elever och studenter tillräckligt goda kunskaper i matematik för att de ska kunna fortsätta till de utbildningar som de siktar mot med adekvata matematikkunskaper*
  - (b) motsvara omfattningen av samhällets behov av personer med relevant matematisk kompetens*
- *en tydlig koppling till användningar samtidigt som matematikens generella karaktär är central*
- *väl kvalificerad(e) lärare i ämnet till varje elev/student*
- *matematik – ett jämställt ämne*

### *Matematik och matematisk kompetens*

I inledande avsnitt i rapporten ges en bakgrund i form av en diskussion om vad matematik och matematisk kompetens är. Rapportens kapitel två handlar om ämnet matematik. Vi konstaterar dels att matematiken är en av de äldsta vetenskaperna, med stark karaktär både av teoribygge och av instrument för problemlösning dels en modern vetenskap i snabb utveckling med inflytande på allt fler andra vetenskaper. Matematiken används för att beskriva, analysera och förstå omvärlden och konstruera lösningar på problem i samhället. Datoriseringen och matematikens starka utveckling bidrar till att samhället matematiseras alltmer och att matematiken fått en ökande användning inom allt fler områden. Samtidigt är den ofta osynlig i samhället. Den ökande matematiseringen leder till ett ökande behov av matematiskt kunnande bland allt fler personer i dagens och framtidens samhälle. Det gäller både specialister – matematiker i en bred bemärkelse – och många andra yrkesgrupper. Vi återkommer längre fram till dimensioneringsfrågorna. Matematiken är också en del av kulturen, med kopplingar till filosofi, musik, arkitektur, konst och hantverk. Idag saknas en samsyn eller gemensam förståelse av vad matematik är bland matematiklärare på olika nivåer inom utbildningssystemet och bland planerare.

Kunnande i matematik har beskrivits på olika sätt. I avsnittet om matematisk kompetens refererar vi aktuell litteratur, som beskriver vad vi kan mena med ”matematisk förmåga”, ett mångfacetterat begrepp. Matematiskt kunnande låter sig inte beskrivas genom en specificering av det matematiska innehållet. Det låter sig inte heller beskrivas enbart som metodkunnande eller räknefärdighet. Det man dessutom behöver komma åt är mer djupgående kunnande som handlar om begreppsförståelse, sammanhang och förmåga att använda matematiken. Den beskrivning som vi refererar mer utförligt är den modell som beskrivs i den danska KOM-rapporten. Där introduceras en modell som omfattar åtta olika matematiska kompetenser. Dessa är tillsammans

specifika för just matematiskt kunnande, de är någorlunda avgränsade från varandra och täcker det man syftar till, nämligen ett generellt matematiskt kompetensbegrepp som kan användas oberoende av nivå. De åtta kompetenserna uppdelas i två huvudgrupper, där den ena gäller förmågan att kunna ställa frågor och finna svar med matematik och den andra gäller att använda språk och redskap i matematik. Den första gruppen innehåller följande fyra kompetenser: tankegångs-, problembehandlings-, modellerings-, och resonemangskompetens. Den andra gruppen innehåller representations-, symbol- och formalism-, kommunikations- och hjälpmedelskompetens. Innebörden beskrivs närmare i kapitel 3.

#### FÖRSLAG

- En kritisk diskussion av *vad ämnet är* bör ingå i kompetensutvecklingsprogram, speciellt sådana som omfattar olika nivåer (se vidare våra förslag om kompetensutveckling)
- För ut det generella *kompetensbegrepp* som utvecklats inom KOM-projektet till lärare på gymnasium och högskola för diskussion
- Utveckla *exempel på kursplaner* eller tolkningar av kursplaner baserade på KOM-strukturen och i ett svenskt sammanhang

#### *Gymnasieskolans matematik*

Enligt den kartläggning som delegationen beställt (Lars Brandell, *Matematik för fortsatta studier*, bilaga 3) så behöver en hög andel av gymnasiet elever välja kurser eller program som innehåller matematik utöver den obligatoriska kärnkursen i gymnasiet. Om 50 %-målet för deltagande i högskoleutbildning ska nås, måste *betydligt fler elever välja att studera mer matematik* på gymnasienivå, antingen i gymnasieskolan eller inom vuxenutbildningen, förutsatt att nuvarande studiemönster inte ändras. Kvinnorna representerar den största potentialen för ökad rekrytering. Även med dagens nivåer på högskolestuderade finns ett glapp mellan ”tillgång” och ”efterfrågan”.

De andelar det handlar om ligger relativt högt. Mellan 30% och 40% av en årskull (hela årskullen, inte bara av dem som får slutbetyg från gymnasiet) behöver läsa någon matematikkurs utöver den obligatoriska i gymnasiet. Mellan 20% och 25% behöver en nivå motsvarande kurs D eller E. Detta gäller med nuvarande dimensionering av högskolan. Behovet kommer att öka om 50%-målet ska uppnås.

Utvecklingen är emellertid oroande. Ser man bakåt på perioden sedan nuvarande gymnasieskola infördes har andelen i ungdomskullarna födda 1978 – 1983 som studerat till en viss nivå i gymnasiet alternativt komvux i kort sammanfattning ökat för kullarna födda på 70-talet för att sedan minska eller stagnera i kullarna födda på 80-talet, så långt man kan följa utvecklingen. Tendensen både i uppgång och nedgång är tydligast bland kvinnorna. Den negativa utveckling som pågår för närvarande är oroande och måste brytas och vändas till en ökning.

Det finns givetvis – och bör fortsatt finnas – möjligheter att komplettera sina matematikkunskaper inom högskolan, inom speciella program (t ex basår) eller inom det program man valt, t ex en ekonomutbildning. Men sett på systemnivå är det en fördel om en viss matematisk nivå uppnås innan inträdet i högskolan. En lösning som innebär att alltmer av matematikstudierna förläggs till högskolan får konsekvenser i form av minskad kvalitet på längre sikt.

Behovet av förbättrade matematiska kunskaper finns alltså i många grupper. Ökande antal elever och studenter kommer i framtiden att behöva lära sig mer matematik för att kunna genomföra sina fortsatta studier eller få den matematiska kompetens som krävs i ett kommande yrke. Men vilket innehåll det handlar om och vilken kombination av de olika kompetenserna (enligt KOM-modellen) som behövs varierar utifrån tillämpningsområdet. Det är klar skillnad på behovet av matematisk kompetens hos läkare, sjuksköterskor, sjukgymnaster, samhällsvetare, ekonomer, tekniker, ingenjörer, lärare, biologer, fysiker och kemister för att ta några grupper.

Arbetsgruppen föreslår en omstrukturering av gymnasieskolans matematik. Nuvarande system är en ren etappmodell, där variationen för elever på olika program enbart ligger i antalet kurser.

Systemets medger i princip fullständig påbyggbarhet och är därmed enkelt att administrera och tillåter valfrihet för eleverna. Men det har visat sig medföra stora nackdelar i praktiken. Alla program tvingas in i en gemensam "kostym" som inte passar. Problemen visar sig på följande punkter som utvecklas mer i avsnittet om gymnasiet:

- En oacceptabelt hög andel elever får betyget icke godkänt på den gemensamma kursen (matematik A) på många program. På 11 av de 18 nationella programmen har över 20% av eleverna IG på det nationella provet, på 4 av dessa över 40%. Andelen med icke godkänt i kursbetyg ligger över 20% på 6 av programmen. Kursen passar uppenbarligen dåligt på många program.
- På NV-programmet får å andra sidan över hälften av eleverna MVG på både provet och kursen, mindre än 10% har betyg G och ingen IG.
- Liknande problem med hög andel IG finns för andra kurser, t ex matematik C.
- För de elever som läser flera kurser (upp till sju-åtta kurser förekommer) blir matematiken onödigt sönderhackad, upprepningar och repetitioner ges för stort utrymme, teman återkommer och repeteras, men utrymmet för fördjupning begränsas.
- Målen och innehållet i kurserna kan inte programanpassas i den grad som behövs, så länge de är desamma.

Arbetsgruppen föreslår att *gymnasiets matematik struktureras utifrån en koppling till användningen av matematiken*. Målet och innehållet bör anpassas till programmet och till fortsatta studier både därför att kraven på innehåll är olika och därför att eleverna känner större motivation om innehållet anpassas till deras intressen. I matematikdidaktisk och pedagogisk forskning har man visat att en förankring i elevernas tidigare begreppsvärld underlättar förståelsen av nya matematiska begrepp. Ett helhetsperspektiv och en känd kontext ger elever stöd för lärandet.

Vårt förslag bygger på följande principer:

- Innehållet i kärnämneskursen, 100 poäng, ändras så att den helt inriktas på kunskaper och färdigheter av betydelse för vardagsliv, samhällsliv och *programmets övriga ämnen*. Den görs därmed programspecifik, men med gemensamt mål för delen "medborgarkunskaper".
- Det rena etappsystemet med B – E – kurserna ersätts med programspecifika (eventuellt inriktningsspecifika) karaktärsämneskurser av varierande storlek.
- Den sista obligatoriska matematikkursen på varje program skall tydligt riktas mot programmets övergripande mål. För vissa av yrkesprogrammen sammanfaller den sista med den första, dvs. kärnämneskursen.
- För samtliga program ska det finnas ett antal valbara kurser.
- En allmän valbar påbyggnadskurs för yrkesprogrammen, innehållande algebra, funktionslära och geometri, ska erbjudas. Denna kurs är avsedd som en plattform för vidare studier inom matematik samt som behörighetsgivande kurs för vissa högskoleutbildningar.

Förslaget kan anpassas antingen till nuvarande programstruktur eller till en sektorsstruktur. Arbetsgruppen har inte utarbetat en fullständig modell, eftersom en reformering planeras, utan vi nöjer oss med ett exempel på hur en struktur för gymnasiets matematik kan se ut (sid XX).

Delegationen har uppdragit åt SCB att genomföra en kartläggning av kompetens och önskemål om kompetensutveckling bland de lärare som undervisar i matematik vid gymnasiet. En del av resultaten redovisas i bilaga 6. Arbetsgruppen för lärarutbildning har också behandlat denna enkät. Utifrån enkäten kan man generalisera till hela gruppen. Bland lärarna i matematik vid gymnasiet har en majoritet, drygt 50%, en utbildning som ämneslärare enligt systemet som gällde före 1988. Drygt 10% har den gymnasielärarutbildning som gällde fram till år 2001, medan övriga inte har utbildning som direkt syftar till att undervisa i gymnasiets matematik. Mer än en tredjedel saknar således den utbildningen och nästan en femtedel av alla har mindre än 10 akademiska poäng i

matematik. Arbetsgruppens slutsats är att det föreligger ett stort behov av kompetensutveckling i form av komplettering av den grundläggande utbildningen upp till en nivå som motsvarar dagens gymnasielärarutbildning. Räknat på hela gruppen svarar gruppen utan den utbildningen mot drygt 1500 personer. Det förefaller också finnas många som saknar matematikdidaktik i rimlig omfattning.

Få lektorer i matematik finns idag vid gymnasierna. Arbetsgruppen anser att skolorna bör anställa flera (och högskolorna utbilda flera). Ett alternativ kan vara ettämneslärare. Vi finner det motiverat att införa utbildning som ettämneslärare eftersom ämnet är så stort, och kan innefatta många ämnen på akademisk nivå exempelvis tillämpad matematik, matematisk statistik, teoretisk datalogi, matematikhistoria mm. En lärare med matematik som sitt enda ämne bör ha något tillämpat ämne i sin utbildning. I lärarlaget på en gymnasieskola bör naturligtvis finnas lärare med varierande andra undervisningsämnen.

I SCB:s enkät har man också ställt frågor om ämnesansvar och gjort en enkätundersökning bland ämnesansvariga. Knappt 40% av lärarna svarar att det finns ämnesansvarig på skolan medan cirka 50% svarar att det inte finns ämnesansvarig. Många av de ämnesansvariga sköter endast administrativa uppgifter och saknar budget. Det framgår att det framförallt är skolor med teoretiska program som har ämnesansvarig lärare medan skolor med endast yrkesprogram saknar sådan.

Arbetsgruppen anser att en ämnesansvarig lärare bör finnas på varje gymnasieskola, oavsett vilken sammansättning av program man har. Den ämnesansvariga ska ha ett tydligt uppdrag att leda utvecklingen av ämnet vid skolan, vilket bland annat innebär att tolka och skriva lokala mål och kriterier, välja läromedel, utveckla lokala kurser och planera kompetensutvecklingen för sig och kollegorna.

Arbetsgruppen har fått uppfattningen att många gymnasier inte satsar i tillräcklig utsträckning på datorn som ett medel för lärande i matematik. Varje matematikklassrum borde utrustas med några datorer och datorn integreras i lärandet. Användningen av miniräknaren diskuteras i ett senare avsnitt.

#### FÖRSLAG

- Fler elever måste ges lust och möjlighet att läsa mer matematik på gymnasienivå. Tendensen till minskat intresse måste vändas
- En *ny struktur* föreslås för *gymnasieskolans matematik*. Kurserna anknyts till programmets eller inriktningens övriga innehåll. Kärnkursen (100 p) görs specifik för programmet men med en gemensam del som syftar till medborgarkunskap. Karaktärsämneskurser införs av olika omfattning. Alla program erbjuder valbara kurser. Systemet kompletteras med vissa överbryggningskurser. Modellen fungerar också i en gymnasieskola med sektorsstruktur.
- Mål och innehåll i gymnasieskolans matematikkurser ses över med anknytning både till grundskola och till högskola och utifrån ett kompetensperspektiv och ett innehållsligt perspektiv.
- Lektorer i matematik anställs vid gymnasieskolorna, i första hand vid skolor med teoretiska program. Utbildning som ettämneslärare i matematik införs och ettämneslärare kan anställas vid gymnasieskolor.
- Alla gymnasieskolor bör införa en ämnesansvarig lärare med uppdrag att leda ämnesarbetet i matematik. Uppdraget ska vara tydligt och förenat med utrymme i tjänsten och med budget och budgetansvar.
- Lärare som saknar utbildning som matematiklärare för gymnasiet bör erbjudas kompetensutveckling i matematik upp till nuvarande nivå i gymnasielärareutbildningen och ges reella möjligheter att genomföra en komplettering på deltid.
- Ökad satsning på hjälpmedelskompetens och på datorn som ett instrument för lärande i matematik.

### *Högskolans grundutbildning i matematik*

Arbetsgruppens bedömning är att samhällets behov av matematikkunskaper, också på högskolenivå kommer att växa. Vi grundar det på en övertygelse om att mer avancerad matematik inte är ett behov för ett litet antal experter, utan för de många som använder matematik inom sitt specialområde. Ingenjörer, lärare, naturvetare och många ekonomer och samhällsvetare behöver studera matematik vid högskolan i dagens system. I takt med att fler vetenskaper utnyttjar matematiken alltmer kommer fler att använda de matematiska verktygen, och behöva förstå hur de fungerar och deras begränsningar. Exempel från senare tid är finansiell ekonomi och biologi. Därmed kommer allt fler studenter vid högskolan att behöva studera matematik på den nivån.

Det finns tecken på att rekryteringen till matematikstudier vid högskolan numera minskar mätt som andelen av en årskull som före en viss ålder studerat minst en matematikkurs vid högskolan. Det framgår av kartläggningen i bilaga 3. Det betyder att en utveckling av stark ökning under 90-talets första hälft har mattats av och verkar vändas i en minskning. Studierektorer bekräftar denna bild, även om undantag finns. Det är oroande.

De speciella utbildningarna till matematiker (och tillämpad matematik, industrimatematik osv) lever ett alltför anonymt liv i Sverige. Ofta väljs de som specialisering inom ett bredare naturvetenskapligt eller ingenjörsprogram. Arbetsgruppen menar att det är nödvändigt att utbilda fler matematiker på alla nivåer för arbete inom näringsliv, förvaltning och skola och som bas för forskarutbildningen. Matematikerprogram bör därför införas på alla universitet och större högskolor som inte redan har ett sådant. En inspiration för planeringen är ett gemensamt dokument utarbetat av matematiker från hela Europa inom ramen för Bologna-processen. Nya program bör ges struktur enligt Bologna-modellen. Rekryteringen till lärarutbildning i matematik är sviktande. Kombinationsutbildningar som lärare och civilingenjör är ett intressant alternativ som prövats.

Innehållet i matematikkurser som ingår i andra program måste utvecklas i nära samarbete med avnämarna. Ansvar för att matematiken integreras på ett bra sätt i utbildningen vilar på matematikerna men också på övriga ämnens representanter.

Motivation, intresse och självtillit brister hos många studenter. Pedagogiskt och didaktiskt utvecklingsarbete prioriteras inte alltid. Här finns många problem som bör mötas med starkare ledning på institutionerna. Lärarna bör sprida erfarenheter av pedagogiskt utvecklingsarbete genom publicering. Många institutioner står inför pensionsavgångar bland lärare med lång erfarenhet som gör en stor insats inom grundutbildningen. Yngre lärare/forskare med stark pedagogisk kompetens bör rekryteras till lektorstjänster, för att fylla det stora behovet inom grundutbildningen.

Många studenter möter inte datorn som instrument för matematiskt arbete under sina högskolestudier i matematik. Det är en uppenbar brist att datorn inte integreras mer. Den behövs både som ett medel för lärande i matematik och som ett led i att utveckla hjälpmedelskompetens. Modelleringskompetensen får också för liten plats enligt arbetsgruppens mening.

#### FÖRSLAG

- Fler studenter måste intresseras för och erbjudas möjligheter att läsa mer matematik på högskolan. Kvinnorna utgör den största potentialen för ökad rekrytering.
- Inför matematikerprogram vid naturvetenskapliga och tekniska fakulteter där sådana inte finns. Inslag av modellering, tillämpningar och beräkningsvetenskap bör vara starka och Bologna-modellen bör följas.
- Utbildningar till ettämnslärare för gymnasiet bör erbjudas studenterna i lärarutbildningen. Kombinationsutbildningar som civilingenjör och lärare bör utvecklas.
- Utvecklingen av innehåll och didaktik i kurser och program med matematik inom högskolan måste göras fortlöpande i enlighet med nya krav/behov/möjligheter. Lärarna bör uppmanas att dokumentera och publicera sitt utvecklingsarbete.
- Modellerings- och hjälpmedelskompetensen måste ges större utrymme i utbildningen.
- Ledningen vid institutionerna bör finna modeller för att premiera didaktisk kompetens och strategiskt arbete med undervisningsfrågor och för att rekrytera skickliga lärare.



## Övergången gymnasium – högskola

Diskussionen om brister i förkunskaperna i matematik bland nybörjarstudenterna i matematik har pågått länge och med särskilt hög intensitet sedan 1998, då högskolorna slog larm om försämringar. Dessa sattes i samband med det nya gymnasiets införande och förändringar i grundskolans matematikkurser. Flera utredningar gjordes och framförallt rapporten *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket 1999) fick stort genomslag. Problemen kvarstår eller förvärras enligt senare utvärderingar. Många studenter har brister i kunskaperna och dessa kan gälla gymnasiets alla kurser. Det finns också studenter som har svagheter i grundläggande moment som hör till grundskolans kurs. Brister finns både i begreppsförståelse och i förmågan att hantera uttryck med matematiska symboler. Spridningen är stor mellan studenterna vilket också är ett problem.

Högskolor och gymnasieskolan har mött problemet på olika sätt. De flesta av våra förslag är därför inte nya utan prövade på olika håll. Att problemen kvarstår beror inte på att åtgärderna inte är välkomna eller inte fungerar, utan att det krävs mer genomgripande förändringar. Arbetsgruppen har två förslag som går utöver det som hittills gjorts.

Det första gäller gymnasieskolans matematik, som med vårt förslag till ny struktur bör ge förutsättningar för bättre förberedelser för högskolan. Det andra förslaget gäller antagningssystemet. Idag gör antagningsreglerna att elever i gymnasiet stimuleras att välja kurser där det är enklast att få högt betyg, snarare än de kurser de har nytta av kunskapsmässigt vid sina kommande studier. Problemet behandlas för närvarande av en utredning inom departementet, och vi har därför inte arbetat fram något konkret förslag.

Ett specifikt problem vid övergången utgörs av att gymnasiet och högskolan har olika syn på användningen av datorer och miniräknare. Hjälpmedelskompetensen bör stärkas på ett sådant sätt att datorn (miniräknaren) blir ett instrument för lärande i matematik. Använd på fel sätt kan miniräknare istället hindra begreppsförståelse och bidra till en osäker taluppfattning. Ett pedagogiskt utvecklingsarbete pågår vid gymnasierna för att rätta till detta, men fortfarande finns brister. Vid högskolan bör man inte helt förbjuda hjälpmedlen i den inledande undervisningen som nu ofta sker, utan istället utveckla en didaktiskt motiverad integration av dessa hjälpmedel i matematikutbildningen.

### FÖRSLAG

- Förändring av strukturen och innehållet i gymnasiets kurser i matematik enligt tidigare
- Förnyat system för behörighet och antagning vid högskolan som uppmuntrar eleverna att skaffa sig god matematisk kompetens innan de söker till högskolan
- Gymnasierna bör fortsätta erbjuda speciella valbara högskoleförberedande kurser i matematik eller starta sådana
- Flexibla överbryggnadsprogram i matematik vid högskolan för studenter som behöver stärka sin kompetens från gymnasiet, även riktade till NV-studenter. Universitet och högskolor bör i samverkan med Nätuniversitetet och utveckla ett utbud av distanskurser av överbryggnadskaraktär
- Högskolorna bör införa differentiering i de inledande matematikkurserna i innehåll, omfattning och/eller undervisningsformer för att anpassa kurserna till studenternas varierande förkunskaper.
- Ökad samverkan mellan gymnasieskolan och högskolorna för ökad kunskapsutbyte och samarbetsprojekt inom matematikutbildningen
- Utveckla användningen av miniräknare och datorer på ett didaktiskt motiverat och effektivt sätt i högskolans grundkurser och på gymnasiet. Miniräknare (och dator) måste användas på ett sätt som inte leder till försämrade begreppsförståelse

### *Forskarutbildning i matematiska ämnen*

Forskarutbildningen i matematiska ämnen har under de senaste decennierna både breddats ämnesmässigt och vuxit i omfattning. Breddningen och den huvudsakliga expansionen har skett inom olika tillämpningar av matematik, t ex tillämpad matematik, matematisk statistik och nu de senaste fem åren matematikdidaktik. Arbetsmarknaden för doktorer i matematik växer. Numera går allt fler nya doktorer vidare till näringslivet. Det hänger naturligtvis samman med samhällets ökade matematisering.

Trots ökningen i forskarutbildningen är behovet i framtiden större än som motsvaras av nuvarande volym. Det kommande 10-15 åren kommer högskolorna i Sverige ha ett mycket stort behov av att nyanställa lektorer/professorer. Mängden nydisputerade täcker inte detta behov ens om man räknar optimistiskt med en fördubblad volym på forskarutbildningen.. Andelen disputerade som söker jobb utanför högskolan förväntas också öka framgent. Slutligen anser arbetsgruppen att gymnasierna bör börja anställa lektorer med forskarutbildning igen.

Bolognaprocessen kan enligt arbetsgruppen ge en bättre förberedelse för forskarutbildning genom den nya magisternivån (3+2 år) och en bättre möjlighet att anta doktorander som fått mer inblick i forskning genom sitt magisterarbete och därmed större förmåga att bedöma sina möjligheter att genomföra en forskarutbildning.

Matematikdidaktisk forskarutbildning har startats inom ramen för en forskarskola finansierad av Riksbankens Jubileumsfond. Finansieringen från RJ upphör då nuvarande doktorander avslutar sin utbildning. Arbetsgruppen föreslår fortsatt statlig finansiering. (Se vidare avsnittet om matematikdidaktisk forskning, kapitel 10)

Kvinnorna är starkt underrepresenterade inom forskarutbildningen i matematiska ämnen. Andelen kvinnor ökar, men det tycks som om kvinnorna i större utsträckning avbryter sina studier. En bättre social miljö kan vara en väg att behålla fler av de kvinnliga doktoranderna.

Kvaliteten i handledningen kan ökas genom handledarutbildning, som numera blir vanligare och genom samarbete mellan flera handledare.

#### FÖRSLAG

- En väsentligt ökad finansiering av forskarutbildningen från statsmakterna
- En breddning av forskarutbildningen (mer professionsträning och fler inriktningar)
- Ökad rekrytering av kvinnliga doktorander och förbättrad social miljö för dessa
- Obligatorisk handledarutbildning för handledare
- Forskarskolan i matematikdidaktik får fortsätta (med statlig finansiering)
- Lärarutbildningsinstitutioner och matematikinstitutioner samarbetar om att utveckla matematikdidaktisk forskarutbildning

### Kompetensutveckling

Alla lärare har rätt till kompetensutveckling inom ramen för sin tjänst. För att kompetensutvecklingsprogram ska ge resultat för eleverna måste de uppfylla vissa kriterier, bland annat vara långsiktiga och planeras utifrån lärarnas behov.

Enligt den enkätundersökning som SCB genomfört har en tredjedel av gymnasielärarna (totalt cirka 4700) i matematik *inte* deltagit i någon kompetensutveckling i matematik. Alla har svarat på frågan om vilken kompetensutveckling de helst önskar. Ämnesteorier prioriteras av 21%, ämnesdidaktik av 31% och integrerade kurser/program med både ämnesteorier och ämnesdidaktik av 32%. Program för kompetensutveckling bör därför erbjudas inom alla områden, beroende på individuella behov och på skolans och kommunens behov. Kurser bör som idag erbjudas av högskolornas institutioner för lärarutbildning och för matematik och av regionala kompetenscentra. Alla skolor bör få tillgång till erbjudanden om kurser och kortare program på nära håll eller som distansutbildning. En samordning behövs på regional och nationell nivå. NCM bör ges uppdraget att i samverkan med Myndigheten för skolutveckling, högskolorna och de regionala utvecklingscentra utveckla ett nätverk på regional och lokal nivå för samordning och information.

Många lärare – drygt 20% – är intresserade av att genomgå en forskarutbildning. Matematikdidaktik prioriteras högst, därefter ett annat ämne och i tredje hand matematik. Mot bakgrund av det stora intresset för forskarutbildning bör fler möjligheter öppnas för lärare att på deltid och med stöd från kommunen genomgå forskarutbildning, åtminstone till licentiatexamen.

När det gäller högskolans lärare finns också behov av kompetensutveckling. Utveckling inom ämnet sker huvudsakligen via egen forskning, något som inte alla lärare har utrymme för. Arbetsgruppen föreslår att alla lärare ges möjlighet till kompetensutveckling inom ämnet, i form av forskning eller på annat sätt. Detta gäller även gruppen icke-forskarutbildade lärare. Många lärare vid högskolan saknar utbildning i pedagogik och didaktik. Matematikdidaktik bör komma med i den grundläggande utbildningen för adjunkter, lektorer och doktorander som numera är obligatorisk. Tidpunkten är lämplig eftersom universitetet just är i färd med att utveckla dessa kurser. En enkät som arbetsgruppen genomfört vid några institutioner visar på att det finns ett intresse för kurser inom matematikdidaktik, men att det är ganska lågt. Det relativt låga intresset kan tyda på en liten kunskap om vad didaktikutbildning innebär.

#### FÖRSLAG

- Kompetensutvecklingsprogram i matematik, andra matematiska ämnen och matematikdidaktik ska erbjudas alla lärare i matematik vid gymnasieskolan. Programmen bör vara långsiktiga och planerade utifrån den lokala situationen och utformas utifrån ett bottom-up-perspektiv.
- NCM bör ges i uppdrag att utveckla ett regionalt kontaktnät, via en fungerande organisation t ex med hjälp av RUC (regionala utvecklingscentra) eller lärarutbildningsinstitutioner. Uppbyggnaden bör ske i samverkan med myndigheten för skolutveckling.
- En reformerad gymnasieutbildning enligt arbetsgruppens förslag måste åtföljas av ett omfattande kompetensutvecklingsprogram med inriktning på nya kurser och arbetssätt
- Högskolorna bör utveckla fler kurser inriktade på kompetensutveckling och livslångt lärande riktade till lärare och andra.
- Högskolorna bör erbjuda licentiat- alternativt magister-program (enligt Bologna-modellen) inom matematikdidaktik och andra matematiska ämnen riktade till lärare
- Kompetensutvecklingsprogram i matematikdidaktik bör utvecklas för lärare och doktorander vid högskolan. Alla lärare bör ges utrymme för kontinuerlig kompetensutveckling, både ämnesmässigt och i matematikdidaktik.

### *Jämställdhet*

Matematiken är inte jämställd. Kvinnor väljer bort matematiken med början i gymnasiet. I gymnasiet är det något fler flickor än pojkar som läser kurserna A, B och C. Däremot utgör flickorna endast cirka 40% av eleverna på D-kursen och cirka 30% av eleverna på E-kursen. Inom grundutbildningen vid högskolan utgör kvinnorna 30% och på kurser på C- och D-nivån 21%. Bland de forskarstuderande i matematiska ämnen är kvinnorna 26% och bland lektorer, professorer och forskarasistenter 14%. Siffrorna gäller för år 2002. Inga nämnvärda skillnader i prestationer finns på gymnasiet med undantag för D och E-kurserna där flickorna har något bättre resultat.

Utvecklingen har varit positiv på alla nivåer sett i stort över de senaste 10 – 15 åren. Men lokalt kan variationerna vara stora uppåt och nedåt och utvecklingen har gått långsamt bland doktorander och lärare. Den stora variationen mellan institutionerna framgår av en sammanställning som arbetsgruppen gjort utifrån högskoleverkets utvärdering av grundutbildningen i matematik år 2002.

Sammanfattningsvis kan det konstateras att många matematikinstitutioner önskar sig en jämnare könsfördelning. Det talas ofta om att man vill locka till sig fler kvinnliga studenter, men få konkreta åtgärder nämns. Ett fåtal institutioner har dock arbetat aktivt med att uppmärksamma och förändra de egna attityderna för att bana väg för en mer jämställd arbetsplats. Kunskapen är dålig om vilka åtgärder som visat sig vara effektiva. Arbetsgruppen föreslår att institutionernas arbete följs upp och att man sammanställer information om institutionernas jämställdhetsprojekt. Man vet alltför litet om vilka hinder de kvinnliga doktoranderna och lärarna upplever i sin karriär idag och mer forskning skulle behövas.

De kvinnliga matematikerna har tillsammans med lärare i skolan bildat nätverket Kvinnor och matematik som bland annat har genomfört fem konferenser sedan 1990 som tilldragit sig stort intresse. Frågor om jämställdhet har diskuterats, projekt redovisats och forskning om kvinnor och matematik redovisats. Konferenserna finns redovisade i rapporter. Vid två tillfällen – senast år 2003 – har sommarskolor för kvinnliga doktorander anordnats med positiv respons och gott deltagande.

#### FÖRSLAG

- Gör en uppföljning av Högskoleverkets undersökning för att kartlägga institutionernas jämställdhetsarbete som omfattar både rekrytering av kvinnor och deras vidare karriärer.
- Sammanställ information om goda sätt att rekrytera kvinnor till grund- och forskarutbildningen i matematik i samarbete med nätverket Kvinnor och matematik
- Fakulteter bör kunna använda ekonomiska styrmedel i jämställdhetsarbetet.
- Institutionerna bör uppmuntra och stödja lokala nätverk för kvinnliga matematiker.

### *Matematikdidaktisk forskning och pedagogiskt utvecklingsarbete*

Matematikdidaktik som forskningsområde är relativt nytt i Sverige om man tänker på speciella forskartjänster och forskarutbildning. Den matematikdidaktiska forskningen behandlar frågor om lärande i matematik, med eleven, ämnet och läraren i fokus. Men forskningen behandlar också frågor om det utbildningssystem inom vilket elever och läraren arbetar. Betydelsen av forskningen hänger samman med att matematiken är ett stort ämne i skolan (det näst största) och vid högskolan, att man i alla länder stöter på stora och likartade problem i matematikutbildningen.

Sverige har hittills endast en professur i matematikdidaktik, vid Luleå tekniska universitet, institutionen för matematik. Bland matematiska institutioner har institutionen i Umeå gjort en pionjärinsats genom att starta en forskargrupp inom ämnet och forskarutbildning i matematik med ämnesdidaktisk inriktning redan 1995.

Sedan 2001 pågår en stor satsning via Riksbankens Jubileumsfond som finansierar en forskarskola med tjugo doktorander i matematik med ämnesdidaktisk inriktning. Ett tiotal matematiska institutioner runt om i landet medverkar i forskarskolan.Handledningen bedrivs i samarbete mellan matematiker, matematikdidaktiker och pedagoger och i samarbete med en rad utländska forskare. Anslaget från RJ är ett engångsanslag och forskarskolans fortsättning efter de fem åren är därmed inte möjlig utan ny finansiering.

Forscarskolan har ett mål utöver att utbilda forskare, nämligen att medverka till en framväxt av matematikdidaktiken som forskningsområde i Sverige, vid de matematiska institutionerna. Detta är i linje med intentionerna bakom satsningen på utbildningsvetenskaplig forskning de senaste åren, där statsmakterna uppmanar ämnesinstitutionerna att engagera sig i den ämnesdidaktiska forskningen.

De som genomgår forskarutbildning inom matematikdidaktik kommer att ha en kompetens som gör dem lämpade att arbeta som lektorer inom gymnasiet och inom lärarutbildningen. Inom båda dessa områden är bristen stor på forskarutbildade lärare. Många gymnasielärare i matematik är intresserade av att genomgå forskarutbildning enligt den enkät som SCB genomfört (bilaga 6).

Det finns alltså många skäl att stödja och utveckla matematikdidaktiken som forskningsområde. En sådan satsning kommer matematikutbildningen tillgodo dels direkt genom forskningsresultat som ligger nära praktiken i skolan/högskolan, dels indirekt genom att bidra till försörjningen av forskarutbildade lärare inom gymnasier och lärarutbildning.

Arbetsgruppen föreslår därför att flera universitet bygger upp en forskningsorganisation inom området, med tjänster och forskarutbildning. Det bör ske i samverkan mellan matematiska institutioner och institutioner för lärarutbildning, med ansvar för utbildning till matematiklärare och via fakulteter för utbildningsvetenskap (motsvarande).

Pedagogiskt utvecklingsarbete har en nära relation till den didaktiska forskningen. Vid institutioner med forskning inom området finns kvalificerat stöd för lärare som önskar bedriva pedagogiskt utvecklingsarbete och på ett systematiskt sätt dokumentera och utvärdera sitt arbete. Erfarenhetsutbytet mellan högskolornas matematiska institutioner är begränsat när det gäller pedagogisk utveckling. Arbetsgruppen föreslår därför årliga konferenser om matematikutbildningen vid högskolorna, med inriktning på teman som innehåll, mål, lärande, samverkan med avnämare, undervisning, organisation, rekrytering, samverkan med gymnasiet bör anordnas.

#### FÖRSLAG

- Matematiska eller andra institutioner som har ansvar för lärarutbildningen i matematik bör genom sina fakulteter bygga upp en forskningsorganisation för matematikdidaktik med forskartjänster, forskarutbildning och anslag från fakultetsmedel
- Fortsätt stödet till forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning via statliga medel
- Årliga nationella konferenser om matematikutbildningen på högskolan med teman som handlar om innehåll, mål, lärande, samverkan med avnämare, undervisning, organisation och rekrytering bör anordnas.

### *Ett övergripande matematikprojekt*

Matematikämnet inom skola och högskola står inför stora utmaningar. Det krävs insatser av många entusiastiska och kunniga lärare för att nå förändringar. Ett kraftfullt stöd för lokal utveckling via projekt som når eleverna är nödvändigt för att driva fram förändringar.

Som framgått tidigare visar rekryteringen till matematik tecken på att minska. Vi ser det som allvarligt och menar att man måste vända den trenden tidigt. Matematiken är ett oumbärligt inslag i många utbildningar och inom allt fler yrkesområden. (Se tidigare avsnitt).

Vi föreslår efter modell av NOT-projektet som drivits framgångsrikt under 10 år ett liknande projekt för matematiken under en kommande femårsperiod. Projektet ska gälla matematiken både i grundskolan och gymnasiet. Det övergripande målet ska vara ökad rekrytering och förbättrade attityder till ämnet.

Projektet bör ledas av myndigheten för skolutveckling, skolverket och högskoleverket gemensamt.

Stommen i ett MAT-projekt ska vara lokala och regionala projekt för bättre matematikutbildning och ökad rekrytering, framförallt av flickor och kvinnor. Exempel kan vara ”röda tråden”-projekt där lärare från olika nivåer samverkar med varandra och utvecklar undervisningen inom ett visst tema. Man bör ta vara på erfarenheterna från NOT-projektet.

Många av de förslag som vi framfört tidigare kan ingå i ett MAT-projekt. Det gäller till exempel det kompetensutvecklingsprogram som bör åtfölja en reform av gymnasiets matematik. Det gäller också de årliga nationella konferenser vi föreslår för högskolans matematikutbildning.

Projektet utvärderas efter fem år och kan sedan eventuellt fortsättas.

#### FÖRSLAG

- Ett övergripande nationellt projekt – MAT-projektet – drivs under fem år. Målet är ökad rekrytering till matematik inom gymnasiet och högskolan, framförallt av flickor och kvinnor. Målet är också mer positiva attityder till matematik bland eleverna. Projektet leds i samverkan mellan myndigheten för skolutveckling, skolverket och högskoleverket.
- Grundvalen för projektet är lokala och regionala projekt. Projekt för samverkan F-12-högskolan (alternativt mellan två skolformer) uppmuntras.

## Kapitel 1 Uppdraget och visionerna

Vårt uppdrag gäller 11-H, vilket ska utläsas de två högsta klasserna i gymnasiet och högskolans grund- och forskarutbildning. En annan arbetsgrupp har ansvar för skolår 7 – 12 och behandlar andra aspekter av gymnasiets matematik. Ytterligare en annan arbetsgrupp har ansvar för folkbildning och vuxenutbildning. Vi har haft viss diskussion om konkreta förslag beträffande gymnasiet med arbetsgruppen 7 - 12, men inte haft möjlighet att samordna våra förslag fullständigt.

Vi har tolkat vårt uppdrag så att det gäller de matematikstudier på gymnasiet och i högskolan som syftar till yrkesmässig användning av matematiken inom alla yrken och matematik som serviceämne inom utbildningar vid högskola eller i yrkesutbildningar på andra nivåer. Vi ser därmed inte i första hand matematiken ur ett medborgarperspektiv eller matematiken i vardaglig användning.

Av de fyra huvudmotiv för matematikutbildning som brukar föras fram i debatten, nämligen att individerna behöver

- (a) medborgarkunskaper för ett aktivt deltagande i samhällslivet, för behov i vardagslivet och i den privata tillvaron
- (b) kunskaper i matematik för yrkeslivet
- (c) kunskaper i matematik för en individuell personlig utveckling
- (d) kunskaper om matematiken som en del av vår kultur

sysslar vi i denna arbetsgrupp framförallt med yrkeslivets behov, vilket kan sägas vara ett pragmatiskt motiv eller ett nyttomotiv. Kunskaper för yrkeslivet är motiverade både utifrån *individens* och utifrån *samhällets* behov. Vi utgår från att delegationen också behandlar matematikutbildningen utifrån andra motiv, men har inte i vår arbetsgrupp haft möjlighet att arbeta med hela spektret av motiv för matematik i utbildningssystemet.

### *Vision*

Vi har i arbetsgruppen inte haft möjlighet att utveckla en vision för hela vår del av uppdraget, men kan formulera en delvision som har styrt vårt arbete när det gäller sambandet mellan gymnasieskolan och högskolan. Enligt riksdagens mål för gymnasieskolan ska alla vägar genom gymnasiet förebreda för en möjlighet att fortsätta till högre studier, och en långsiktig målsättning från regeringen är att 50% av en årskull ska gå vidare till högskolan. Det kräver enligt vårt synsätt

- *ett effektivt och väl fungerande samband mellan gymnasieskolans och högskolans matematikutbildning*
- *en dimensionering av och ett utbud vid gymnasieskola, kommunal vuxenutbildning och högskola som uppfyller kravet att*
  - (a) *ge elever och studenter tillräckligt goda kunskaper i matematik för att de ska kunna fortsätta till de utbildningar som de siktar mot*
  - (b) *motsvara omfattningen av samhällets behov av kvalificerade personer med relevanta matematikkunskaper*

En vision som arbetsgruppen har haft i sitt arbete gäller tillgången på goda lärare. Lärarens betydelse för att ge elever och studenter lust och möjligheter att lära matematik kan knappast överskattas. Arbetsgruppen anser att varje elev och student som studerar matematik har rätt till en/flera välutbildad(e) och kvalificerad(e) lärare i matematik, lärare som har goda och relevanta kunskaper i matematik och matematikdidaktik och som besitter en helhetssyn på ämnet och dess roll i samhället och utbildningssystemet. I detta ligger också att läraren bemöter elever och studenter med förståelse för variationerna i deras matematikkunnande och kan hantera eventuella svagheter i den matematiska kompetensen eller bristande matematisk självförtroende hos eleverna/studenterna på ett positivt sätt. Vår vision är skolor och högskolor på sikt får möjlighet

- *att ge varje elev och student som studerar matematik en/flera väl kvalificerad(e) lärare i ämnet.*

Matematik är idag inte ett jämställt ämne. Könsfördelningen är sned ju längre upp i systemet man kommer och kvinnor kan känna sig främmande i den kultur som präglar de matematiska institutionerna. Visionen är

- *matematik - ett jämställt ämne*

### *Arbetet i gruppen*

Arbetsgruppen 11-H har under sitt arbete tillsammans med arbetsgruppen för lärarutbildning planerat en enkätundersökning som rör kompetensen hos gymnasiets lärare och deras önskemål om kompetensutveckling och en enkätundersökning bland ämnesansvariga. Den kartläggningen genomfördes på uppdrag av delegationen av SCB där Anders Karlsson varit ansvarig för projektet. En studie om omfattningen av gymnasieelevers och studenters matematikstudier har på arbetsgruppens initiativ och på delegationens uppdrag genomförts av Lars Brandell. Mindre enkätundersökningar om lärarkompetens riktad till lärare vid högskolan har genomförts i arbetsgruppens regi. Studierektorer vid de matematiska institutionerna har också deltagit i intervjuundersökningar och skriftligt svarat på arbetsgruppens frågor.

Ett 30-tal referenspersoner kontaktades under hösten och många av dem har läst och kommenterat ett första utkast till denna rapport.

Arbetsgruppens medlemmar har deltagit i ett antal möten och konferenser anordnade av delegationen. Arbetsgruppen har också blivit inbjudarna till delta i möten med Svenska matematikersamfundet, nationalkommittén för matematik vid KVA och med lärare vid Hvitfeldtska gymnasiet, och bjudit in och på andra sätt haft direkt kontakt med många andra personer som givit impulser till arbetet.



## Kapitel 2 Vad är matematik?

Matematik kan uppfattas på många sätt olika sätt. Det framgår bland annat i olika läroplaner för den obligatoriska skolan (1919, 1955, 1962, 1969, 1980 och 1994), alltifrån de tidiga där matematiken delas upp i räkning och geometri, till modernare beskrivningar av matematiken som ett färdighetsämne, som vardagsmatematik, som problemlösning, som ett formalbildande ämne (liksom latinet en gång var) och som ett bildningsämne.

Inom högskolan är matematiken och de övriga matematiska vetenskaperna (matematisk statistik, numerisk analys, optimeringslära, teoretisk datalogi, tillämpad matematik m fl) mer formaliserad. Den logiska uppbygganden är central och det finns ett inneboende samband mellan ämnets olika delar. I många sammanhang har matematiken karaktär av instrument för andra ämnen, som behöver matematiken som ett språk, som ett analysverktyg och för modellering.

Ämnet har förändrats och vuxit starkt de senaste decennierna inte minst genom datorernas utveckling. Datorerna gör det möjligt att lösa problem av helt annan karaktär än tidigare och man kan numera behandla problem som kräver beräkningar av oerhört mycket större omfång än som var möjligt tidigare. Men datorerna har vidgat matematikens domäner på fler sätt, utvecklat intresset för teoretiska delar av ämnet och återupplivat tidigare forskning. Mängder av nya tillämpningar inspirerar i sin tur en inomvetenskaplig utveckling av matematiken och ett intensivt och fruktbart utbyte pågår mellan matematiken, dess tillämpningar och de delar som finns i gränslandet däremellan. Ämnesområden som tidigare inte var tunga matematikanvändare inom naturvetenskap och samhällsvetenskap matematiseras alltmer.

Kontakten mellan lärare i matematik för elever i olika åldrar och skolformer förutsätter ett gemensamt språk och vi behöver veta vad vi menar med *matematik*. Vad är *ämnet*? På vilka olika sätt kan det ”öppna världen” för oss? Det gäller inte i första hand om att bli överens om *en* uppfattning om vad matematik är utan snarare om att vi utvecklar en förståelse för de olika identiteter som ämnet har utifrån olika positioner.

### *Om matematik*

Den troligaste etymologiska förklaringen till ordet *matematik* är att det betyder 'problemlösningskonst'. Ordet är också släkt med det grekiska verbet *manthanein* 'att lära'. För delegationens syften är en provisorisk definition av *matematik* som 'problemlösningskonst' i själva verket en god utgångspunkt, som omedelbart tillåter flera viktiga överväganden och slutsatser.

### *Problemlösning*

Exakt vilka problem som löses inom matematiken är kulturellt betingat. Under olika epoker av mänsklighetens historia har olika problem stått i fokus. Innehållet av matematikutbildningen kan inte betraktas som något givet, hur allmängiltiga matematikens resultat än må vara.

Matematiken utmärkes av att vissa av dess resultat är mer internationella än några andra av människans skapelser -- eller rent av universella: man har velat sända ut primtal i rymden för att därigenom signalera existensen av intelligens på jorden -- medan andra är starkt kulturellt beroende, och någon god förståelse av matematikens natur kan inte nås om man inte beaktar såväl det universella som det kulturellt betingade inom den.

Detta att det handlar om att lösa problem har viktiga konsekvenser. Det finns ingen anledning att tro att svåra problem skall kunna lösas med enkla metoder. Det finns ingen kungsväg till matematiken. Den enklaste matematiken kanske kan lösa de enklaste problemen, men för de svåra problemen måste man vara beredd på att blott kraftfulla metoder hjälper. Att lära sig dessa och att verkligen lösa svåra problem är också en källa till personlig glädje och tillfredsställelse, vilket är den viktigaste drivkraften i all utbildning.

Synen på matematiken som en problemlösningskonst med ett innehåll som varierat under historiens gång och varit olika i olika kulturer leder till slutsatsen att den kommer att vara aktuell även i framtiden oberoende av tidens strömningar i utbildning och arbetsliv. Det finns ingen anledning att tro att alla de tekniska och ekonomiska verksamheter där matematik används skulle

upphöra, eller att naturvetenskapen, hur modebetonad den än kan komma att vara, skulle upphöra att använda den problemlösningskonst som vi kallar matematik.

De problem som man önskar lösa kanske kan lösas av specialister, och det skulle kanske räcka med att utbilda tillräckligt många specialister. I en praktisk utbildningssituation leder detta till svårigheter, eftersom barnen börjar utbilda sig innan de vet om de vill eller kan bli sådana specialister och eftersom det inte heller går att välja ut dem som skall komma i åtnjutande av en avancerad matematisk eller teknisk utbildning. Man vet helt enkelt inte vilka som i en framtid kommer att göra väderprognoser och vilka som kommer att konstruera flygplan eller dataspel. Man vet inte heller vilka helt nya yrken som kommer att finnas med stora krav på matematikkunskaper.

I ett demokratiskt samhälle är det varken möjligt eller önskvärt att lösningar på svåra samhällsliga och tekniska problem helt överlätes till specialister; alla måste få möjlighet att sätta sig in i problemen, förstå lösningsalternativen och överblicka konsekvenserna. Därav följer att matematikens problemlösningskonst måste få bli en allmän egendom så långt detta är möjligt.

### *Konst*

Att matematiken är en problemlösningskonst innebär också att den är en konst med alla de drag som andra konster har: den kan inte säkert behandlas och undervisas rationellt. Liksom andra konster måste den tillåtas få en viss frihet och ges ett sökande, kanske rentav irrationellt arbetssätt. I skolan skulle den med fördel kunna undervisas tillsammans med ämnen som bild, musik och filosofi. Om problemen är svåra kan man inte vänta sig att rutinmetoder skall duga. Kreativitet och intuition får komma fram. För övrigt är det ju så att det som är en rutinmetod för någon är en nyskapande, revolutionerande nyhet för en annan. Var och en måste få upptäcka och bygga upp sin egen verktygslåda med metoder.

### *Kultur*

Ett fruktbart sätt att se på matematiken, såväl den traditionella skolmatematiken som all den nya matematik som kommer fram varje år genom forskningen, är att se den som en mänsklig kulturyttring. Därigenom undviker man djupa filosofiska frågor om matematikens innersta väsen, frågor som inte kan besvaras inom ramen för detta arbetsmaterial, och som inte heller behöver besvaras här.

Den gemensamma matematiken är ett kulturelement, gemensamt inom en viss kultursfär, som för övrigt för närvarande blir alltmer internationell. Den avancerade matematiken är en subkultur, dvs. den delas inte av alla inom denna kultursfär, men genom utbildningen står den i en relation till den gemensamma kulturen. Denna relation kan vara mer eller mindre fruktbar och mer eller mindre konfliktfylld, men det är förstas viktigt att den existerar och att den präglas av ömsesidig förståelse.

Om matematiken är en kulturyttring så innebär det också att den är svår att ändra på och svår att styra genom statliga eller kommunala beslut. Att ändra på viktiga styrdokument hjälper inte alltid när man vill åstadkomma förändringar; insikt om att det handlar om en del av den mänskliga kulturen kan hjälpa oss att välja medel för att få till stånd en förbättrad utbildning.

### *Val av problem*

Att kunna lösa ett problem ger problemlösaren en tillfredsställelse och ökad självförtroende inför kommande uppgifter. Just denna ökade självförtroende är alltså en önskvärd följd av problemlösandet och ett viktigt mål för all utbildning. Tyvärr gäller också omvändningen, nämligen att självförtroendet får en knäck när man misslyckas med att lösa ett problem. Detta pekar på den stora vikt som måste fästas vid att problemen får rätt svårighetsgrad och blir tillräckligt breda i den meningen att man kan lösa dem till större eller mindre del och på flera olika nivåer, och det pekar på den oerhört viktiga processen att välja och konstruera rätt problem på alla utbildningsstadier och för alla elever och studenter.

### *Matematik och andra skolämnen*

Man kan göra en tankeväckande jämförelse mellan svenska och matematik. Vi kan börja med alfabetet och siffrorna. Sedan följer rättstavning i svenskan och multiplikationstabellen i matematiken. Grammatiska kunskaper kanske motsvarar kunskaper om räkneregler som den distributiva lagen. Korsord och räknegåtor är en annan parallell. Att läsa bruksanvisningar kan motsvara att deklarerar. Humaniora och juridik förutsätter svenska, och motsvaras av naturvetenskap och teknik, som kräver matematik. Facklitteratur på svenska motsvaras av tekniska beräkningar. Det sagda gäller förstås för varje annat modersmål.

Så långt syns en tydlig analogi mellan skolans två största ämnen. Men sedan glider ämnena isär, och en klyfta, för att inte säga avgrund, öppnar sig. I svenskämnet går man vidare med skönlitteratur, kulturhistoria, drama och eget kreativt skrivande. För alla dessa aktiviteter finns det motsvarigheter inom matematiken, men de förekommer inte i skolan.

Jämförelsen kan vara orättvis, eftersom det matematiska språket inte är ett modersmål utan kanske hellre skall jämföras med engelskan i den svenska skolan. Men även en sådan jämförelse ger stoff till eftertanke.

Gymnasieelever förväntas den ena timmen studera och diskutera komplexa samhällliga fenomen, något som förutsätter såväl djupgående kunskaper som en mogen förmåga att sätta in dem i ett sammanhang, samt att värdera dem och redovisa sina värderingar. Nästa timme förväntas de nöja sig med träning av rent mekaniska räkneregler utan minsta diskussion, tillämpning, insättande i ett sammanhang eller värdering. Kontrasten är slående och visar på en hisnande skillnad mellan ambitionsnivåerna för ämnena.

### *Matematiken som vetenskap*

Matematiken som vetenskap kan karakteriseras som en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Matematiken är *abstrakt*: den har frigjort sig från det konkreta ursprunget hos problemen, vilket är en förutsättning för att den skall kunna vara *generell*, dvs. tillämpbar i en mångfald situationer, men också för att den logiska giltigheten hos resonemangen skall kunna klarläggas. Matematiken är inriktad på studium och uppbyggnad av strukturer av de mest skilda slag, såväl för att lösa problem som för att utveckla metoder för att lösa problem och ange dessas begränsningar. Det sista är inte minst viktigt och ofta svårt att förstå för lekmannen (vinkelns tredelning är inget problem längre, ty man har redan avgjort med hjälp av Galoisteori att en godtycklig vinkel inte kan tredelas exakt med passare och linjal).

Som *vetenskap* karaktäriseras matematiken bl. a. av att den uppfyller högt ställda krav på verifierbarhet. Det är möjligt att stjäla matematiska resultat, men knappast att fuska, eftersom varje påstående måste kunna verifieras.

Slutligen: definitionen säger att matematiken är *en* vetenskap. Trots att det finns tusentals matematiska teorier och många nya skapas varje år, och trots att det publiceras flera tiotusentals matematiska uppsatser varje år med hundratals nya satser av de mest skilda slag och med inriktning mot de mest varierande tillämpningar, så utmärks matematiken av en så stark inre enhetlighet och sammanhållning i tillvägagångssätt och angreppsmetoder att det vore oberättigat att tala om annat än *en* vetenskap.

### *Matematikens teorier*

En matematisk teori består av resultat som härleds ur en samling påståenden vilka betraktas som givna och utan bevis läggs till grund för teorin: de är dess axiom. Valet av axiom begränsas endast av kravet på utvecklingsmöjligheter och intresset hos den teori som kan byggas upp från dem. Genom denna frihet får matematiken starkt konstruktiva och intuitiva drag.

Intuitionen spelar också en framträdande roll när man ställer upp och löser enskilda problem. Eftersom en matematisk teori alltid innebär att vissa slutsatser gäller under angivna förutsättningar, kan den principiellt inte utsäga något om den fysiska verkligheten -- man kan ju inte veta huruvida förutsättningarna är uppfyllda. Icke desto mindre har matematiken blivit ett oundgängligt verktyg för en lång rad av ämnen, särskilt för astronomi, fysik, kemi, statistik och de tekniska vetenskaperna. Paradoxen uttrycks i titeln till en uppsats av Eugen Wigner från 1960: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the physical sciences*.

### *Matematiken i konsten och tekniken*

Kakelmosaikerna i Alhambra visar intrikata mönster som upprepar sig och griper in i varandra. De illustrerar i själva verket grupper av transformationer av planet som lämnar ett visst mönster invariant och ger ett samspel mellan grupp teori och euklidisk geometri. Grupperna kan vara oändliga eller ändliga. M. C. Eschers verk är kanske det mest åskådliga vittnesbördet om hur man kan förvärva en förståelse för dessa grupper. I flera år kämpade Escher med att framställa mönster av djurfigurer. Han besökte Alhambra, och studerade ingående en uppsats av G. Pólya från 1924, som beskriver var och en av de aktuella grupperna och illustrerar deras verkan. Han uppger att den visuella information som gavs av Pólya var viktigare än den skrivna texten. Som ett resultat av sina studier i grupp teori uppfann Escher ett eget beteckningssystem för grupperna (upptecknat 1941), och hans mönster blev därefter mer avancerade.

Mycket av den moderna musiken framställs med hjälp av synthesizers. Fram till omkring 1983 var dessa analoga, men därefter har de digitala helt tagit över, medan de analoga syntarna har kommit mer eller mindre ur bruk. Digital styrning av frekvensmodulering ger en fyllig och rik ljudkvalitet, som akustiska instrument skapar naturligt, men som är svårt att åstadkomma med analoga syntar. Bakom utvecklingen av de digitala syntarna ligger en matematisk analys av hur ljud framställs. Med denna som grund utvecklades tekniken i Stanford och gick sedan rakt in i Yamaha DX-7, den första helt digitala synthen.

Ett tredje exempel på hur avancerad matematik kan finnas dold är de felrättande koderna, som används vid dataöverföring men även i modern telefoni.

Ett fjärde exempel kan iakttas när en bild överförs i digital form. Vid överföringen ser man först ett litet antal stora rutor, som sedan blir allt fler och samtidigt mindre. Fler och fler detaljer överförs successivt; matematiskt innebär det att man ser koefficienterna för bildsignalen, utvecklad i en viss bas, överförs. Koefficienterna, som är koordinaterna för en viss vektor, synliggörs alltså. I mobiltelefonen hörs de inte lika tydligt.

I själva verket så används matematik alltmer i allt fler tekniska tillämpningsområden och exemplen ovan skulle lätt kunna mångfaldigas. Matematiker arbetar inom många typer av företag: inom försäkringsbranschen och bankvärlden, speciellt inom finansvärlden, inom telekommunikationsindustrin, inom processindustrin som använder alltmer exakta metoder för att styra processer, inom tillverkningsindustri både för design och konstruktion, inom bygg- anläggnings- och transport-industri med logistik och planering men också modellering, inom många tillämpningar som rör statistiska metoder för styrning, kvalitetsövervakning och tillförlitlighet.

### *Ren och tillämpad matematik*

Matematiken brukar indelas i ren och tillämpad. Den rena utvecklas enligt detta synsätt utan tanke på praktiska tillämpningar, medan den tillämpade skapas för ett behov som har uppstått i ett annat sammanhang. I själva verket är situationen mer subtil än så. Den rena matematikens problem har, även om de har avlägsnat sig från tillämpningarna, sina rötter i problem som uppstått genom studium av naturen eller samhället. Och den tillämpade matematiken innehåller lösningar på problem som kan vara av stort teoretiskt intresse.

Även den tillämpade matematiken har olika syften. Med Newtons gravitationslag som bas kan man med stor precision förutse kommande solförmörkelser. I naturvetenskapen används matematiken för att göra prognoser och skapa en enhetlig ram för förståelsen av naturfenomenen. Inom tekniken har matematiken en annan roll: att vara ett verktyg för skapande, för att åstadkomma något önskat, konstruera en maskin med önskvärda egenskaper.

Ett klassiskt exempel på hur matematiken skapar sammanhang där tidigare forskning givit en fragmenterad bild är Keplers och Newtons lagar. Kepler ställde upp tre lagar för planeternas rörelser, nämligen att en planet rör sig i en elliptisk bana med solen i den ena brännpunkten; att den rör sig så att radius vektor sveper över en area med konstant hastighet; samt att olika planeters omloppstider i kvadrat är proportionella mot medelavståndena till solen i kub. Newton formulerade sin gravitationslag så att gravitationskraften är proportionell mot produkten av de två planeternas massor och omvänt proportionell mot kvadraten på deras avstånd. Detta är fyra lagar, och man kan lätt tänka sig universa där vissa av dem är uppfyllda och andra inte: det blir totalt

sexton olika fall. Lagarna framstår som fyra olika faktapåståenden som inte hänger ihop. Men med matematik kan man visa att Keplers tre lagar följer av Newtons gravitationslag och hans rörelselag. Matematiken ger en helhetsbild: de keplerska lagarna är inte tre osammanhängande påståenden om världen; de följer av en enda lag. Matematiken ger sammanhang och förståelse. Behovet att känna att världen hänger samman är en djupt mänsklig drift, som vi alla behöver tillfredsställa.

### *Matematiken i samhället nu*

Matematik finns mer eller mindre dold överallt i det moderna samhället. Det är en viktig uppgift i skolan att klargöra detta. Annars sprids lätt uppfattningen att matematiken inte behövs. Man kan komma att tro att alla datorer, alla ekonomiska överväganden, all statistik sköts av någon annan. Vem skall då göra detta i framtiden?

Ingenjörsutbildningen har nu utvecklats så att det inte längre är fysiken som är det sammanhållande elementet. Det har i stället blivit matematiken. Matematiken har blivit ett tekniskt ämne; den är ett direkt medium för tekniska konstruktioner.

### *En statisk eller en dynamisk ståndpunkt*

Matematiken kan ses som ett logiskt sammanhängande system av begrepp, teorier, relationer, satser och bevis. Systemet växer och utvecklas, men det finns vid varje tidpunkt en kunskapsmassa, gemensam och förvaltd av matematiker och alla andra som använder matematiken. Att närma sig matematiken innebär då att lära sig *förstå och behärska* delar av detta system.

Matematiken kan å andra sidan ses som ett förhållningssätt till en materia som kan bestå av konkreta ting eller abstrakta begrepp. Matematiken karaktäriseras av ett arbetssätt som kan beskrivas av fyra faser:

1. Observera och hitta ett *mönster*
2. Formulera en *hypotes*
3. Undersök hypotesens giltighet i andra och *generellare* fall
4. *Bevisa* hypotesen

Att lära sig matematik innebär med detta synsätt att vänja sig vid att se omvärlden genom matematiska glasögon och att kunna *arbeta matematiskt* (John Mason, *Thinking mathematically*, 1986).

Ett tredje sätt att uppfatta matematiken, som också är mer dynamiskt, är det *tekniska* sättet. Då är matematiken ett instrument som man använder så länge det ger goda och användbara resultat i de konstruktioner man önskar utveckla eller de analyser man vill göra. Matematiken värderas efter sin användbarhet och smidighet. Att lära sig matematik betyder att lära sig att *använda matematik*.

### *Vad är en matematiker?*

Begreppet matematiker uppfattas ofta som någon som forskar inom ämnet på en universitetsinstitution eller en annan forskningsinstitution, eventuellt inom industrin eller näringslivet. Man menar alltså med beteckningen att den syftar på en *forskande matematiker*, verksam med vetenskaplig forskning, oftast en *universitetsmatematiker*.

För en del år sedan fanns vid universiteten en matematikerlinje på grundutbildningsnivå och för de studenter som gick den utbildningen fick begreppet kanske en annan innebörd och de kan ha uppfattat sig själva som blivande matematiker i och med att de fick examen från linjen.

I och med att fler personer i framtiden kommer att arbeta som matematiker med utveckling och avancerad användning av matematik utanför de traditionella institutionerna, skulle det vara adekvat och praktiskt att vidga begreppet matematiker. Ett bredare matematikerbegrepp skulle ge ämnet en identitet, både för dem som sysslar med det och själva skulle identifiera sig som matematiker, och för allmänheten. Vi kommer i fortsättningen av denna text använda begreppet matematiker i en bred mening, och syfta på alla som yrkesmässigt använder eller utvecklar matematiska verktyg eller forskar och utvecklar någon del av de matematiska vetenskaperna. Lärare med god grund i matematik räknar vi också in i denna breda grupp av matematiker. Ett sådant språkbruk stämmer bättre med användningen av motsvarande begrepp biolog, fysiker osv

*Förslag i punktform*

- En kritisk diskussion av *vad ämnet är* bör ingå i kompetensutvecklingsprojekt, speciellt sådana som omfattar olika nivåer (se vidare våra förslag om kompetensutveckling)
- Forskning och debatt om *filosofiska, vetenskapsteoretiska och samhällsliga perspektiv* på ämnet matematik bör utvecklas mer i Sverige

### Kapitel 3 Vad är matematisk kompetens?

Begreppet *matematisk kompetens* har utvecklats i olika sammanhang under de senaste decennierna. Mycket av diskussionen är baserad på forskning, t ex har mycket forskning i matematikdidaktik handlat om problemlösning och förmåga till problemlösning, som är en del i den matematiska kompetensen.

En tidigare ofta använd beskrivning av kunnande i matematik har varit i termer av *kunskaper och färdigheter*. Kunskap antas då betyda någon slags förståelse av begrepp medan färdighet anknyter till en mer eller mindre automatiserad metod för behandling av ett visst avgränsat problem.

I läroplaner och kursplaner på olika nivåer har innehållet oftast specificerats genom målet med undervisningen angivet i allmänna termer, samt innehållet specificerat av en lista med stoff. En sådan bild ger dock ett mycket snävt perspektiv på matematikkunnande. En förmåga att t ex kunna förstå och lösa matematiska problem låter sig knappast brytas ned i termer av förståelse av enskilda begrepp och behärskande av speciella färdigheter.

Att definiera kursinnehåll i termer av stoff är problematiskt av minst två skäl. För det första blir jämförelse mellan kurser inom samma område svårt, eller åtminstone ytligt, eftersom det bara kan handla om en beskrivning om vilket stoff som ingår i den ena kursen men inte i den andra och vice versa. Vidare är en beskrivning av målen med matematikundervisningen i termer av stoff problematiskt eftersom kurserna tenderar att bli överfyllda av innehåll. Detta lämnar elever och lärare i en svår situation. Tiden räcker inte för att arbeta igenom allt innehåll, och resultatet blir s k "pensumdöd", dvs att det omfattande innehållet upplevs som ett hinder för att nå de djupare målen, till exempel förståelse och problemlösning förmåga.

Att hitta mer generella och effektiva sätt att angripa dessa problem har varit föremål för mycket diskussion och forskning.

I rapporten *Räcker kunskaperna i matematik* (Högskoleverket, 2002), inför man begreppet *matematisk mognad*, som beskrivs utan referens till specifikt innehåll och kan användas på alla stadier enligt rapporten. Även i kursplanerna för den svenska skolans matematik och i de nationella proven beskrivs en slags matematiska kompetenser som är allmänna och refererar till ämnet utan att specifikt koppla till innehållet.

I den amerikanska organisationen National Council for Teachers of Mathematics (NCTM) Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) beskrivs matematikkunnande och inhämtande av matematikkunnande med hjälp av processer och innehållsområden. Processerna kan sägas handla om hur man behandlar och använder sig av matematik. Tanken är att dessa processer både kan användas för att utveckla kunskap och för att använda sig av sin kunskap. De fem processerna/förmågorna är: problemlösning förmåga, argumentationsförmåga, kommunikationsförmåga, förmåga att se samband och representationsförmåga.

Jeremy Kilpatrick (Kilpatrick et al, 2001) har tillsammans med sina medarbetare utvecklat ett begrepp *proficiency*, som består av fem olika förmågor, sammanvävda med varandra. De identifierar följande fem förmågor: begreppslig förståelse, strategisk kompetens, adaptivt resonerande, procedurkunskap och slutligen en produktiv inställning till sin förmåga i ämnet.

När det gäller innehållet väljer man i NCTMs Standards att dela in skolmatematiken i fem områden; tal och operationer, algebra, geometri, mätning samt dataanalys och sannolikhet. Dessa områden skiljer sig till en viss del från en mer klassisk indelning av matematiken och de är valda så de kan placeras som *stråk* genom hela skolmatematiken, från förskola till årskurs 12. Dessa innehållsstråk kan sedan kompletteras med och stödjas av de fem processerna.

I ett omfattande arbete i Danmark, beställt av Uddannelsesstyrelsen (Danmarks utbildningsdepartement) lägger författarna fram begreppet *matematisk kompetens* (Niss & Jensen, Kompetenser och matematikläring, Uddannelsesstyrelsen, 2002, KOM). Till skillnad från i NCTM:s "Standards" så argumenteras det i KOM-rapporten snarast *mot* en indelning av (skol)matematiken i *nya* ämnesområden och man ger istället en modell för att beskriva kunnande i matematik som är utan primär referens till specifikt innehåll (stoff). Däremot kan NCTM:s processer relateras till KOM:s *kompetenser* i den meningen att båda dessa begrepp är kopplade till vad man kan *göra* med sitt matematikkunnande.

Med begreppet matematisk kompetens vill man skapa ett verktyg för att kunna åstadkomma följande:

- att utan att referera till stoff eller pensum kunna lägga fast vad det innebär att behärska (känna till, förstå, utföra och använda) matematik, inom matematiken och i andra sammanhang.
- att kunna beskriva utveckling och progression i matematikundervisning att användas inom läroplaner och mellan olika läroplaner
- att kunna karakterisera olika nivåer av behärskning av matematik för att kunna beskriva utveckling och progression sett från den enskilde elevens sida
- att kunna jämföra olika kursplaner och olika slags matematikundervisning på parallella eller olika stadier på ett sätt som väsentligt går utöver att enbart jämföra stoffinnehållet.

Matematisk kompetens delas in i åtta undergrupper, åtta *matematiska kompetenser*, grupperade i två grupper:

#### **Att fråga och svara i, med och om matematik**

- Tankegångskompetens
- Problembehandlingskompetens
- Modelleringskompetens
- Resonerandekompetens

#### **Att använda språk och redskap i matematik**

- Representationskompetens
- Symbol- och formalismkompetens
- Kommunikationskompetens
- Hjälpmedelskompetens

De åtta kompetenserna är mycket utförligt beskrivna i rapporten och beskrivningarna där åtfölja också av explicita exempel på hur de olika kompetenserna kan uttrycka sig. Författarna menar att de åtta kompetenserna både är rimligt avgränsade men också samverkar och överlappar en hel del. Det finns en slags dualitet i dessa kompetenser, alla innehåller en undersökande och en produktiv sida; *att förstå* och *att utföra*. Här följer en mycket kort beskrivning: av kompetenserna:

#### *Tankegångskompetens – att kunna utöva matematisk tankegång*

Detta handlar att vara klar över vilka slags frågor som är typiska för matematik och kunna ställa sådana frågor samt ha inblick i vilka typer av svar man kan förvänta sig. Här ingår att kunna skilja på olika typer av matematiska utsagor som sats, definitioner och förmodanden. Att förstå olika begrepps räckvidd samt via generalisering och abstraktion kunna utvidga begreppen till större klasser objekt är också en del av denna kompetens.

#### *Problembehandlingskompetens – att kunna formulera och lösa matematiska problem*

Denna kompetens består av att kunna ställa upp olika slag av matematiska problem samt att kunna lösa sådana problem. Med problem menar man här en matematisk fråga som kräver en matematisk undersökning för att kunna besvaras. Vad som är ett problem är alltså relativt.

#### *Modelleringskompetens – att kunna analysera och bygga matematiska modeller*

rörande andra områden. Kompetensen består av att kunna översätta en situation från ett annat område än matematik till matematiskt språk och analysera och bedömma räckvidden av en den uppkomna modellen. Att kunna ”avmatematisera” modellen (översätta tillbaka) ingår också.



*Resonemangskompetens – att kunna resonera matematisk*

Resonemangskompetensen byggs upp av att kunna följa och bedöma ett matematisk resonemang och t.ex. förstå vad ett matematisk bevis är och hur ett bevis skiljer sig från andra typer av matematiska resonemang. Att kunna tänka ut och genomföra resonemang är det produktiva sidan av denna kompetens.

*Representationskompetens – att kunna hantera olika representationer av matematiska förhållanden*

Denna kompetens består i att kunna förstå och använda sig av olika slags representationer av matematiska objekt, fenomen, problem eller situationer samt att kunna förstå inbördes förhållanden mellan olika representationsformer. Att kunna välja och översätta mellan olika representationsformer är den produktiva delen av denna kompetens.

*Symbol- och formalismkompetens – att kunna hantera matematiskt symbolspråk och formalism*

Denna kompetens består i att kunna avkoda symbol och formelspråk, att kunna översätta mellan symboliskt matematiskt språk och naturligt språk samt att kunna behandla och använda sig av symbolmässiga utsagor och uttryck.

*Kommunikationskompetens – att kunna kommunicera i, med och om matematik*

Denna kompetens består dels i att sätta sig in i och tolka matematikinnehåll i andras presentationer och dels i att kunna uttrycka sig på olika sätt och olika nivåer om matematiska angelägenheter.

*Hjälpmedelkompetens – att kunna använda sig av och förhålla sig till hjälpmedel för matematisk verksamhet*

Kompetensen består dels i att känna till existensen av och egenskaper hos diverse relevanta redskap för matematisk verksamhet samt ha kännedom om deras möjligheter och begränsningar samt vara i stånd till att på ett reflekterat sätt använda sig av sådan hjälpmedel.

En annan viktig komponent är att en person kan besitta var och en av dessa kompetenser i olika grad. Denna ”besittning” karakteriseras i tre dimensioner: täckningsgrad, aktionsradie och tekniska nivå. Kompetensen som den beskrivs i KOM-projektet är starkt knuten till ämnet matematik och alltså inte generell. De matematiska kompetenserna är knutna till matematiska situationer, eller i alla fall situationer som kan bli matematiska. Författarna till KOM-rapporten finner det viktigt att också beakta hur matematik relaterar till omvärlden. För detta använder man begreppen *överblick* och *omdöme*. Man undviker av praktiska skäl att även karakterisera dessa som kompetenser, men argumenterar för att både överblick och omdöme kan ges mening på alla stadier av matematikutbildning.

All undervisning i matematik måste givetvis ha ett specifikt ämnesinnehåll, och i KOM-rapporten påpekas det tydligt att de matematiska kompetenserna endast kan utvecklas genom kontakt med ett konkret specifikt ämnesinnehåll. Att dessa kompetenser är generella och stoffoberoende betyder alltså inte att stoffet är en mindre viktig del av undervisningen. I KOM-rapporten identifieras tio (sex mer klassiska och fyra mer moderna) stoffområden såsom lämpliga att ge en hjälpstruktur för uppbyggnad av matematiskt ämnesinnehåll genom grundskolan, gymnasiet och inledningen av högskolestudierna. De tio områdena är: talområden, aritmetik, algebra, geometri, funktioner, infinitesimalkalkyl, sannolikhetslära, statistik, diskret matematik och optimering. Man presenterar också i en tredimensionell matris ett förslag till hur dessa tio stoffområden och kompetenserna kan kopplas samman med progression genom skolsystemets matematikundervisning.

KOM-modellen är i sin helhet komplex, men dess grundtankar har visat sig tillgängliga och accepterade av lärare. I Danmark har modellen presenteras och diskuterats i många grupper av lärare. De olika modellerna för att beskriva matematisk kompetens, utan tydlig knytning till ämnesinnehåll och nivå, är intressanta bland annat eftersom de underlättar en diskussion över stadiegränserna av matematikutbildningens mål: att öka den matematiska kompetensen hos

eleverna. Modellen kan också användas som ett stöd för planering och genomförande av den dagliga undervisningen.

*Förslag i punktform*

- För ut det generella *kompetensbegrepp* som utvecklats inom KOM-projektet till lärare på gymnasium och högskola för diskussion
- Utveckla *exempel på kursplaner* eller tolkningar av kursplaner baserade till exempel på KOM-strukturen och i ett svenskt sammanhang
- Använd begreppen från KOM-projektet i samband med *kompetensutveckling*, speciellt sådana som omfattar olika nivåer (se vidare våra förslag om kompetensutveckling)

## Kapitel 4 Gymnasieskolans matematik

En utgångspunkt för arbetsgruppens har varit det utredningsarbete som lagts ned i två större utredningar om skolmatematiken och som rapporterats i Hög tid för matematik (Nationellt Centrum för Matematikutbildning, 2001) och Lusten att Lära med fokus på matematik (Skolverket, 2003).

### *Kartläggning av elevernas deltagande*

Enligt den kartläggning som arbetsgruppen beställt (Lars Brandell, *Matematik för fortsatta studier*, bilaga 3) så behöver en hög andel av gymnasiets elever välja kurser eller program som innehåller matematik utöver den obligatoriska kärnkursen i gymnasiet. Om 50 % - målet för deltagande i högskoleutbildning ska nås, måste *betydligt fler elever välja att studera mer matematik* på gymnasienivå, antingen i gymnasieskolan eller inom vuxenutbildningen. Kvinnorna representerar den största potentialen för ökad rekrytering.

Ser man bakåt på perioden sedan nuvarande gymnasieskola infördes har andelen i ungdomskullarna födda 1978 – 1983 som studerat till en viss nivå i gymnasiet alternativt komvux i kort sammanfattning ökat för kullarna födda på 70-talet för att sedan minska i kullarna födda på 80-talet, så långt man kan följa utvecklingen. Tendensen både i uppgång och nedgång är tydligast bland kvinnorna. Den negativa utvecklingen som pågår för närvarande är oroande och måste brytas.

Möjligheten att komplettera sina matematikkunskaper i vuxenutbildningen och vid högskolan undanskymmer inte det faktum att systemet vinner i effektivitet om fler elever uppmuntras att redan i gymnasiet välja till matematik.

Matematiken är viktig för många områden, inte enbart den naturvetenskapliga och tekniska sektorn, som vi framhållit tidigare. Stora avnämrområden är också samhällsvetenskap, ekonomi och vårdutbildningar. I själva verket är det en förhållandevis liten andel av högskoleutbildningarna som endast bygger på nuvarande matematik A. Andelen går naturligtvis inte att uppskatta exakt. Den beror ju dels på vilka behörighetsregler och reella kunskapskrav som högskolestudierna ställer, dels vilka val individerna kommer att göra i högskolan och hur programmen dimensioneras. I rapporten görs en uppskattning utifrån vissa antaganden.

Enligt rapporten är det med nuvarande studiemönster och nuvarande volym vid högskolan mellan 30% och 40% av en årskull som kommer att behöva kunskaper utöver den obligatoriska kursen (kurs A), dvs minst kurs B, för fortsatta studier vid högskolan. Kvinnorna står för en högre andel. I rapporten görs även en uppskattning av vilka högre nivåer olika grupper behöver. Det är omkring 30% som behöver en nivå motsvarande minst kurs C och det är mellan 20% och 25 % av en årskull som behöver motsvarande matematik D eller E för kommande högskolestudier. Andelarna blir ännu högre om man dessutom tänker sig att fler ska gå vidare till högre studier. Målet är av statsmakterna satt till att 50% av en årskull ska fortsätta till högskolan. Observera att det här handlar om andelar av *hela* årskullen, alltså inte av dem som genomgår gymnasiet eller får slutbetyg från gymnasieskolan.

I kartläggningen jämförs andelen som skaffar sig viss kompetens från gymnasiet eller komvux med det uppskattade behovet i högskolan enligt ovan. I princip bör gymnasiet/Komvux utbilda tillräckligt många elever för att täcka behovet inom högskolan. Men det räcker inte med en överensstämmelse av nivåerna. Många elever kommer att välja andra studievägar inom högskolan än dem som deras matematikbakgrund berättigar till, studieval där deras matematikkunskaper inte är krav, men där deras kunskaper mycket väl kan komma till nytta. Kunskaperna kan naturligtvis också ge dem en beredskap för behov av matematikkunnande på längre sikt, i yrket eller studier. Vi ser det som en fördel att personer med matematikkunskaper utöver "minimum" kommer in inom olika områden. Personer med god matematisk förståelse kommer att kunna hjälpa till att skapa positiva attityder till ämnet var de än blir verksamma. Slutsatsen blir att man inte ska sträva efter en överensstämmelse mellan "tillgång" och "efterfrågan" utan att "tillgången" bör vara större än "efterfrågan", just för att ge utrymme för successiva och varierade studieval.

Men det visar sig att "tillgång" och "efterfrågan" inte stämmer överens ens om man räknar med att alla skulle utnyttja sin matematiknivå i fortsatta studier. Ett exempel från rapporten är följande: 17% av kvinnorna (dagens 21-åringar) har läst matematik D eller mer i gymnasium/komvux,

medan 21% av dem kan förutses behöva den nivån vid sina pågående eller kommande högskolestudier. Vid en sådan jämförelse måste man ha i minnet att man kan komplettera kunskaperna vid högskolan, vilket hjälper upp situationen.

Sammanfattningsvis anser arbetsgruppen att ett viktigt mål är att fler elever ges möjlighet och lust att välja att läsa mer matematik i gymnasiet. Det krävs av två skäl. Det första är för att fylla behovet inom högskolan. Det andra är för att bryta den trend som pågått några år och som innebär att andelen som väljer att läsa matematik på gymnasiet successivt minskar för de årskullar som är födda på 80-talet. Incitament och signaler att det lönar sig att läsa mer matematik redan på gymnasiet måste bli tydliga.

Vi föreslår i det följande en ny struktur för gymnasiets matematikkurser. Det är en väg att ge tydligare signaler om behov av mer matematik. Men det kommer också att behövas nya regler för antagning och behörighet och för komplettering av betyg. Dessa frågor som utredas för närvarande går vi inte in på men ser dem som viktiga.

### *Elevens inställning idag*

Genom NOT-projektet vet vi att elever inte går vidare till fortsatta studier inom NT-området om de inte känner sig trygga med matematiken. De vet att matematik är ett viktigt ämne inom detta område. Inom andra områden har signalerna varit motstridiga, till exempel då ekonomutbildningarna av rekryteringsskäl inte kräver mer än matematik B, trots att den kunskapsnivå som behövs enligt nuvarande system borde vara matematik C. Samma signaler gavs också då gymnasiets samhällsvetenskapliga program förändrades genom att kravet på matematik C för vissa grupper togs bort i revisionen år 2000.

### *Kopplingen till användning – en viktig princip*

Behovet av förbättrade matematiska kunskaper finns alltså enligt ovan i många grupper. Ökande antal elever och studenter kommer i framtiden att behöva lära sig mer matematik för att kunna genomföra sina fortsatta studier eller få den matematiska kompetens som krävs i ett kommande yrke. Men vilket innehåll det handlar om och vilken kombination av de olika kompetenserna (enligt KOM-modellen) som behövs varierar utifrån tillämpningsområdet. Det är klar skillnad på behovet av matematisk kompetens hos läkare, sjuksköterskor, sjukgymnaster, samhällsvetare, ekonomer, tekniker, ingenjörer, lärare, biologer, fysiker och kemister för att ta några grupper. Vi föreslår därför att *gymnasiets matematik struktureras utifrån en koppling till användningen av matematiken*.

Nuvarande gymnasie matematik är uppbyggt som ett rent etappsystem och differentieringen sker genom att man läser olika antal kurser. Det innebär i princip att målen för den som läser kurserna A+B+C med sikte till exempel på samhällsvetenskapliga studier vid högskolan, läser kurser med samma mål som den som går vidare och läser kurserna A+B+C+D+E med sikte på naturvetenskapliga studier. Detta system medger inte att kursernas mål och innehåll utvecklas utifrån behovet i andra ämnen och kommande studier. Nuvarande system är inte optimalt som vi ser det och vi kommer att utveckla argumenten och exemplifiera detta mer längre fram.

Att knyta matematiken till användningsområden innebär pedagogiska och didaktiska fördelar. Om matematiken sätts in i ett relevant sammanhang, till exempel med anknytning till ett yrkes- eller intresseområde, så blir den för många elever lättare att förstå, intresset och motivationen ökar och det blir mindre risk att ämnet blir tråkigt eller svårt.

Var i utbildningssystemet ska en elev/student nå den matematiska kompetens som hon/han behöver? Det kan vara i gymnasiet, på högskolan eller inom kommunal vuxenutbildning. För en stor grupp handlar det om att läsa matematik i någon form vid högskolan, men för de flesta är det i gymnasiet som man läser sin sista matematikkurs.

I vårt förslag utgår vi ifrån att det är viktigt att skapa *tydliga vägar genom gymnasiet direkt till högskolan* för de stora grupperna av studenter som behöver matematik i högskolestudierna. Detta anser vi vara ett grundkrav i den kommande gymnasiereformen. Det gäller bland andra för blivande tekniker, (civil)ingenjörer, naturvetare, ekonomer, samhällsvetare, medicinare och sjuksköterskor.

Motivet är givetvis att inte skapa förseningar för växande grupper genom extra terminer eller år för komplettering mellan gymnasiet och högskolan.

Vi föreslår en *förstärkning av matematiken* för flera grupper i jämförelse med nuläget. Motivet är först och främst de mycket tydliga signalerna från högskolan om svagheter i matematikkundandet hos stora grupper bland nybörjarna inom många områden (förkunskapsutredningen, se vidare kapitlet om övergången mellan gymnasiet och högskolan). Men det handlar också om att ge elever som inte går vidare till högskolan en bra matematikbas i sina kommande yrken.

Ytterst väsentligt är att man inte skapar återvändsgränder. Inom gymnasiet, den kommunala vuxenutbildningen eller högskolan måste eleverna/studenterna erbjudas överbyggningskurser som ger goda möjligheter för den som byter inriktning att komplettera sina kunskaper från ett visst program till en viss annan kompetensnivå. Den kompletteringen blir svårare att organisera än i nuvarande system (där påbyggbarheten är fullt genomförd) men den är avgörande för att inte stänga vägar för någon som vill välja om.

Samtidigt som vi föreslår en ny struktur med programanknytning av matematikinnehållet, så vill vi betona att vi inte uppfattar detta som någon sorts nivågruppering av elever. Det kommer att på de flesta program (alternativt sektorer), att finnas elever med vitt skilda nivåer på sina kunskaper i matematik från grundskolan, precis som det är nu. Det gäller både yrkesinriktade program och de program som är rent studieförberedande. Problemet med varierande kompetens och kunskaper måste mötas med andra metoder.

Vi beskriver i det följande mer ingående problemen i gymnasiet och utvecklar längre fram våra förslag.

### *A-kursproblematiken*

Ända sedan gymnasiereformen 1994 har konstruktionen av A-kursen ställt till stora problem för i synnerhet yrkesprogrammen. Innehållet i ungefär halva kursen är ”medborgarkunskap”, och är inte så svår att motivera för eleverna. Det är talförståelse med tillämpningar, statistik och annat av allmänbildningskaraktär. Resten av kursen är en teoretiskt mycket svårare del med algebra, funktioner mm., som betraktas som svår och ”onödig” av eleverna. Denna del är egentligen det trappsteg på vilket B-kursen ska byggas. Många läroböcker för yrkesprogrammen placerar dessa avsnitt bak i böckerna i ”påbyggnadskapitel”, och följderna blir att många elever helt hoppar över dessa avsnitt. Dessvärre ingår de sedan i *det för alla program identiskt lika nationella provet*, vilket till viss del förklarar varför så många elever på yrkesprogrammet misslyckas. Men lärarna, som följt det kursplanen föreskriver för tillämpningarna, gör då troligen rätt när de sätter kursbetygen på andra grunder.

Utdrag ur målen för A-kursen:

#### *Eleven skall*

- kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för vardagsliv och *vald studieinriktning*,
  - med och utan tekniska hjälpmedel med omdöme kunna tillämpa sina kunskaper i olika former av numerisk räkning med anknytning till vardagsliv och *studieinriktning*,
  - ha fördjupat kunskaperna om geometriska begrepp och kunna tillämpa dem i vardagssituationer och i *studieinriktningens övriga ämnen*,
  - kunna tolka och hantera algebraiska uttryck, formler och funktioner som krävs för problemlösning i vardagslivet och i *studieinriktningens övriga ämnen*,
- (arbetsgruppens kursiveringar)

Eleverna på yrkesprogrammen får problem med stora delar av kursen, vilket har visat sig i resultaten på de nationella proven. Andelen icke godkända på matematik A-kursen är oacceptabelt hög, i genomsnitt 11%. På 11 av de 18 nationella programmen har över 20 % IG på det nationella provet och på sex av programmen gäller det för över 40% av eleverna. Som kursbetyg får över 20% av eleverna IG på sex av programmen, medan över 10% har IG på 13 av programmen. Andra ämnen ligger mycket lägre. På engelska A och svenska B är andelarna icke godkända i genomsnitt 4% respektive 2%. Skillnaden mellan provbetyg och kursbetyg och sambandet med program diskuteras i en färsk rapport. Skolverket har nyligen i en bilaga till svaret på ett regeringsuppdrag

presenterat en utredning av det nationella provsystemet (Skolverket, Enheten för resultatbedömning, 2003). Man skriver där

Samtidigt är dock kursmål och betygskriterier desamma för en viss kurs oberoende av inom vilket program den genomförs. Det finns därför ur det perspektivet ingen anledning att anta att relationen mellan provbetyg och slutbetyg skulle skilja sig åt mellan olika program. (sid 89)

Man visar i rapporten att skillnaden mellan provbetyg och kursbetyg är större för matematik än för engelska och svenska. Skillnaden i matematik A är störst för de yrkesförberedande programmen och minst för de studieförberedande (inklusive estetiska och medieprogrammet). Matematik A skiljer sig i det avseendet från engelska A och svenska B där programmen inte påverkar. Den största avvikelsen mellan provbetyg och kursbetyg på matematik A gäller andelen IG. Andelen med IG på provet i matematik A är betydligt högre än den andel som har IG i kursbetyget för många av yrkesprogrammen. På NV-programmet har däremot 0% IG medan över 90% har VG eller MVG som kursbetyg och ungefär samma fördelning återfinns på provbetyget.

Det finns säkert många förklaringar till de systematiska skillnaderna mellan program och matematikens särställning. En hypotes som arbetsgruppen vill föra fram som en trolig orsak är att lärarna höjer andelen godkända på många av programmen därför att det annars skulle bli vad som uppfattas som orimligt många icke godkända på kursen. Matematiklärarna på yrkesprogrammen har en helt annan måttstock för betygssättningen än vad nationella proven ger. De gör nog i grunden rätt, men det visar att idén med en gemensam första kurs har allvarliga brister. Syftet med att ha ett för alla programmen gemensamt nationellt prov måste allvarligt ifrågasättas om man sedan avsiktligt gör väsentliga avsteg från provresultatet. Visserligen ska det nationella provet bara vara rådgivande för lärarna vad gäller betygssättningen, men situationen med en nationell nivå för proven och en helt annan för betygen måste vara klart otillfredsställande om syftet med de nationella proven också är att de ska utgöra en slags ”rikslikare”.

I rapporten visar man att det även är stor skillnad mellan skolor när det gäller sambandet mellan provbetyg och kursbetyg. För matematikens del kan skillnader mellan programsammansättning vid olika skolor förklara en del av skillnaden mellan skolor.

På naturvetenskapsprogrammet blir situationen också problematisk. För att klara senare matematikkurser och Fysik A-kursen, tvingas man föra in ett antal moment i A-kursen, som egentligen tillhör andra kurser, exempelvis trigonometri i rätvinkliga trianglar. En del algebramoment och moment inom funktionsläran är även nödvändiga för att B-kursen ska vara förståelig för eleverna. Här stöter man på ett annat grundläggande problem: Det ska ju i princip vara möjligt för en elev på vilket program som helst att bygga på med nästa ”byggsten”. Men elever som gått A-kursen på ett yrkesprogram har haft stora svårigheter att klara B-kursen. Den blir abrupt mycket svår, och kräver egentligen att de extra algebraavsnitten, som eleverna från de teoretiska programmen fått i A-kursen, genomgås först. Tyvärr är den tillgängliga tiden för B-kursen alldeles för kort.

### *Läroplansrevideringen 2000 och NV-programmets matematik*

Vid revideringen 2000 var man klar över många av bristerna i 1994 års kursplaner och man avhjälpte en del av dessa. Matematiken fick mer tid, men genom en annan förändring av timplanesystemet kom det att slå ganska olika på olika gymnasieskolor, och tyvärr ibland fel. Tidigare hade kurserna helt enkelt fått så många undervisningstimmar, som deras poäng angav. I det nya systemet finns inga fasta timtal för de olika kurserna, utan man fastställer det lokalt. Eleverna ska under sin gymnasietid samla ihop till 2500 poäng, men får bara 2180 undervisningstimmar (87,2 %) om de går på ett teoretiskt program eller 2430 timmar (97,2 %) på yrkesinriktade program. Det finns alltså inte fullständig tilldelning av timmar i förhållande till poängtalet, som avspeglar kursinnehållet. Till på köpet måste olika ämnen konkurrera om timmarna, vilket gör situationen ytterligare komplicerad. I tabellen nedan visas kurspoäng samt timplaner för Naturvetenskapsprogrammet enligt det nya systemet som fastställts på en viss gymnasieskola (timtalen varierar betydligt mellan olika skolor):

	Ma A	Ma B	Ma C	Ma D	Ma E	Summa
--	------	------	------	------	------	-------

Äldre poäng/timplan	150	50	40	60	300
Nya kurspoäng	100 + 50	100	100	50	400
Ny timplan i Klippan	145	80	80	45	350

Kurserna A och B har egentligen poängtalet 100 resp. 50, men läses som en AB-kurs utan tydlig timtalsuppdelning.

Om man ser till de enskilda kurserna, ser förändringen ut att halta betydligt, men samtidigt med poängjusteringen flyttades också vissa moment mellan kurserna. Främst kom avsnitt från B- och E-kurserna att flyttas till C- resp. D-kurserna. Förbättringen i timplanen ser man bäst i totala timtalet, som ökat med 50 timmar. Dessa har helt lagts på de två kurser där behovet var som störst, nämligen C- och D-kurserna.

Hur har då olika huvudgrenar och -avsnitt av matematiken lagts in i de olika kurserna? En förenklad uppdelning för NV:

Huvudgren	Kurser
Aritmetik och taluppfattning	A
Geometri (utom trigonometri)	A, B
Statistik och sannolikhetslära	A, B
Algebra	A, B, C, E
Trigonometri	A, D
Funktionslära, polynom., exp., log., mm.	A, B, C, D
Analys, derivata med tillämpningar	C, D, E
Analys, integralkalkyl	D, E
Analys, differentialekvationer	E
Databehandling, räknehjälpmiddel	A, B, C, D, E

Man ser att det är påbyggnadstanken, som genomsyrar planeringen. Exempelvis delas algebra upp i olika bitar, som tillsammans ska ge helheten. Tyvärr blir följderna ofta istället splittring av algebran, och mycket tid måste användas för repetitioner i varje kurs. Även i den gamla ämnesplanen för linjegymnasiet var avsnitten uppdelade, men inte alls i lika hög grad. Tiden kunde användas effektivare än till en idelig repetition.

Det är intressant att konstatera att totaltiden för matematik i stora drag återställts med den nya tidsplanen, och att innehållet ungefärligen är det samma (med något tillskott). Men då måste man komma ihåg att det är stor skillnad på förutsättningarna hos de elever, som påbörjar studier vid NV-programmet nu jämfört med dem som började på NV-linje tidigare. Då var inträdeskravet till NV betyget 3 på särskild kurs i grundskolan. Det betydde t.ex. att samtliga hade klarat av svåra algebraavsnitt och att nivån generellt var tämligen hög. Nu tas ofta alla behöriga sökande in (i varje fall på mindre landsortsgymnasier), och många har dessvärre fått mycket bristfällig undervisning i exempelvis algebra och kanske ingen alls i grundläggande funktionslära. Även talförståelsen kan vara svag, exempelvis inom bråkräkning och potensräkning. Lärarens uppdrag är "en skola för alla", dvs. man ska ge alla en möjlighet att klara studierna på NV-programmet, och detta kan bli en alltför svår uppgift. Efter justeringen av timplanerna är det numera A- och B-kurserna, som är problemet. Tiden för dessa behöver ytterligare byggas på.

*Sammanfattning av problemen med strukturen hos gymnasiets kurser*

**Modellen med en gemensam A-kurs för alla program har inte fungerat.**

Samtidigt som kursplanen förskriver en långtgående ”infärgning” mot programmets inriktning, har det nationella provet varit detsamma för alla program, och har oftast upplevts av eleverna som anpassat till de teoretiska programmen. Det har gett katastrofala resultat på flera av de yrkesinriktade programmen, samtidigt som det gett toppbetyg för elever på det naturvetenskapliga programmet. A-kursen har dessutom uppfattats som tråkig och som en repetition av grundskolans matematik. Avsnitten med algebra och funktionslära har upplevts som alltför abstrakta och rentav onödiga. Det är inte ovanligt att många elever helt hoppar över dessa, fastän de sedan visar sig ha stor betydelse på det nationella provet.

#### **Etappmodellen har inte fungerat särskilt bra.**

Tanken med A–E –kurserna var att de skulle bygga på varandra ungefär som våningar i ett hus. I verkligheten har det för de flesta programmen fungerat dåligt redan i övergången mellan A- och B-kurserna. B-kursen är konstruerad som en direkt fortsättning på algebra- och funktionsavsnitten i A-kursen. Om dessa då lästs som en sluten enhet eller kanske överhoppats, blir följderna ett misslyckande. Bäst har övergången fungerat då man läst en AB-kurs, som är det vanligaste på naturvetenskapsprogrammet. Att avsluta sina matematiska studier med en kurs man upplever som alltför abstrakt och utan kopplingar till övriga ämnen inom programmet, och som man dessutom misslyckas på, måste vara förödande för både självkänslan och den attityd gentemot matematiken man bär med sig resten av livet.

#### **Uppdelningen av matematiken i många etappkurser har inte varit bra för elever med matematikinriktning.**

Matematiken har upplevts som splittrad och med de många kurserna har värdefull tid slösats på repetitioner. Uppdelningen har också drivit på betyghetsen och fokuseringen på provresultat, bl.a. med nationella prov varje termin. Följderna har ofta också blivit en begränsning av arbetssätten till mera resultatutriktad träning inför dessa prov, och elevaktiva och undersökande arbetssätt har fått stryka på foten.

#### **Otydligheten med fem kurser, som alla heter ”Matematik X”, är inte bra.**

För eleverna är innehållet i de olika kurserna svårt att genomskåda, även om skolan och lärarna försöker informera väl. Även ur högskolans eller andra avnämares synvinkel kan det vara svårt att bedöma vilket ämnesmässigt innehåll kurserna i verkligheten har. Ett mera programinriktat innehåll på samtliga kurser, och i synnerhet på de första och sista kurserna på programmet, skulle underlätta betydligt. Vissa specialkurser kunde, i likhet med t.ex. Matematik Diskret, ha namn som avspeglar kursinnehållet.

#### *Utgångspunkter för förslaget till ny struktur för gymnasiets matematikkurser*

Utgångspunkterna för vårt förslag är dels vissa punkter i matematikdelegationens uppdrag och dels fyra punkter som bygger på analysen i tidigare delarna av kapitlet. Med förslaget hoppas vi kunna undanröja några av de problem som uppstått med nuvarande kurssystem.

Vårt förslag baseras på följande punkter i delegationens uppdrag:

- förbättra attityder till matematikämnet
- öka intresset för matematikämnet
- stimulera elever/studenterna till fortsatta studier inom området

Utgångspunkterna är att den nya strukturen ska innehålla

- Matematikkurser inom de olika programmen, som uppmuntrar till och underlättar ett djupare samarbete med främst karaktärsämnen. Matematiken ska för eleverna vara en naturlig del av deras utbildning, och tematiska arbetssätt ska lättare kunna tillämpas.
- En tydlig väg genom gymnasiet för elever, som är inriktade på fortsatta studier inom naturvetenskap och teknik.
- En förstärkning av matematikkunskaperna för elever, som är inriktade mot studier inom samhällsvetenskap och ekonomi samt inom kvalificerad yrkesutbildning.



- Mer tid för matematik inom avsnitt, som i nuläget getts för liten tidsplan för de avsnitt kurserna omfattar.

### *Förslagets huvudprinciper*

Arbetsgruppens förslag bygger på fyra huvudprinciper.

#### **1) Innehållet i kärnämneskursen Matematik A, 100 poäng, ändras så att den helt inriktas på kunskaper och färdigheter av betydelse för vardagsliv, samhällsliv och programmets övriga ämnen.**

För yrkesprogrammen blir en stor del av kursen vad som tidigare kallades yrkesmatematik. För de teoretiska programmen tillkommer avsnitt, som tidigare inte lästs eller som legat i senare kurser. För det naturvetenskapliga programmet kan det innebära exempelvis grundläggande trigonometri och logaritmer, logik och naturvetenskaplig modellering. För samhällsvetenskapliga programmet matematik inom demografi och samhällsvetenskaplig statistik.

#### **2) Det rena etappsystemet med A – E –kurser ersätts med programspecifika karaktärsämneskurser av varierande storlek.**

Även inriktningen, som exempelvis humanistisk eller matematisk, slår igenom. För samhällsvetenskaplig och ekonomisk sektor utökas matematiken inom områden av betydelse för dessa inriktningar, som samhällsvetenskaplig och ekonomisk modellering, linjär optimering, kalkylprogram etc.

#### **3) Den sista obligatoriska matematikkursen på varje program skall tydligt riktas mot programmets övergripande mål.**

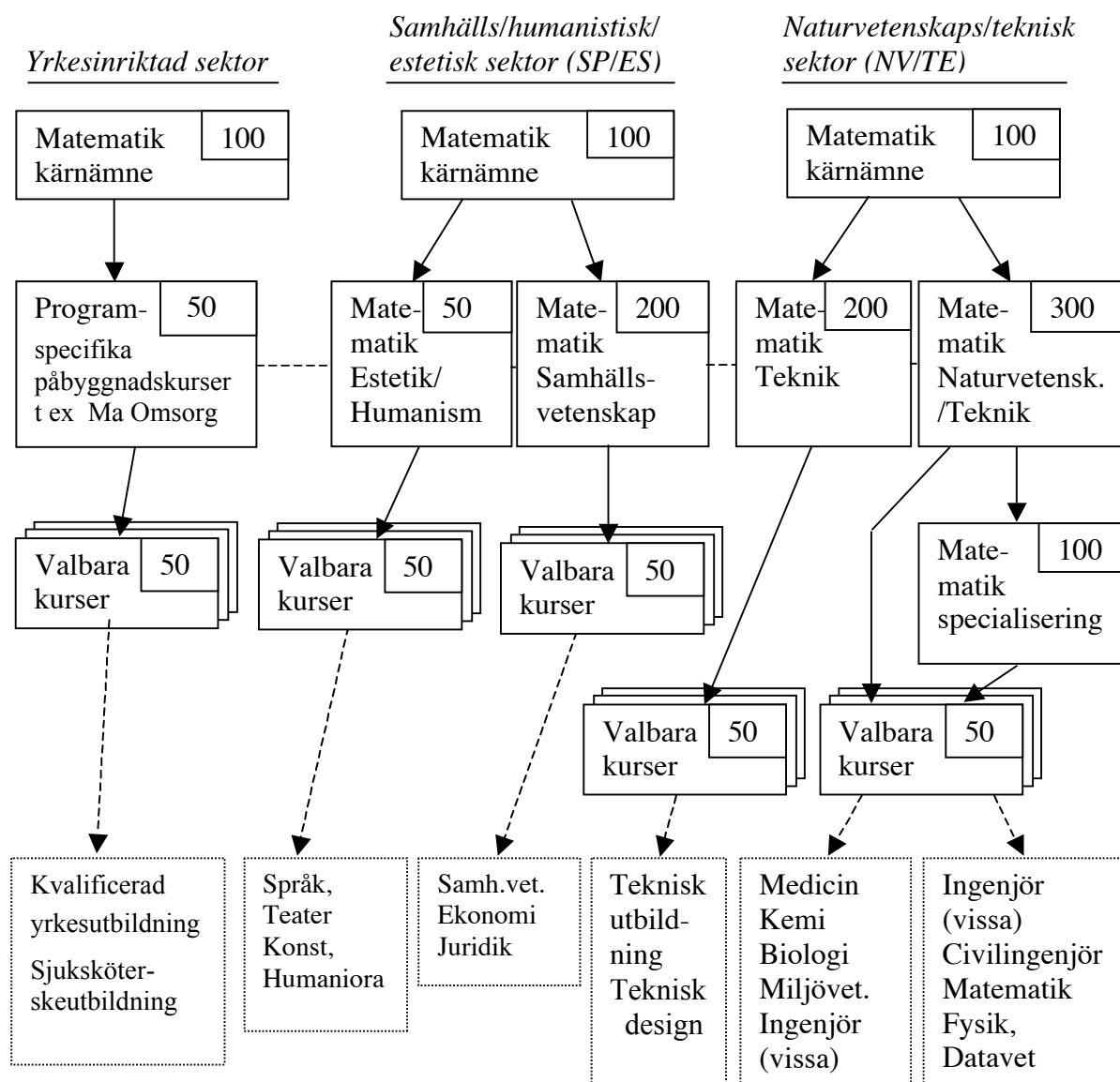
För vissa av yrkesprogrammen sammanfaller den sista med den första, dvs. kärnämneskursen. Inom andra yrkesprogram, där det finns krav på större matematisk kompetens, skapas programspecifika påbyggnadskurser. För exempelvis elever på Omvårdnadsprogrammet, som ska gå vidare till sjuksköterskeutbildning, eller elever på Elprogrammet, som ämnar gå vidare till utbildning som behörig elektriker, krävs relevanta kurser innehållande algebra, funktionslära eller geometri med trigonometri. För humanistisk inriktning och estetiskt program bör en kurs tillskapas, i vilken matematikens roll och betydelse i samhällsliv och kultur speglas. Tillämpningar inom design, arkitektur och konst betonas. För elever på teknikprogrammet, som inte är inriktade mot teknisk högskola, bör en ny kurs med matematiska principer och tillämpningar inom tekniken skapas. Slutligen, för elever på naturvetenskaps- och teknikprogrammet, som kan tänkas fortsätta med studier inom matematik, naturvetenskap och teknik, kan det mesta av det nuvarande innehållet i B, C och D-kurserna finnas i en karaktärsämneskurs, samt en speciell högskoleförberedande specialiseringskurs med innehåll från E- och Diskretkursen.

#### **4) För samtliga program ska det finnas ett antal valbara kurser.**

Bland dessa skall obligatoriskt finnas en allmän påbyggnadskurs för yrkesprogrammen, innehållande algebra, funktionslära och geometri. Denna kurs är avsedd som en plattform för vidare studier inom matematik samt som behörighetsgivande kurs för vissa högskoleutbildningar. Påbyggnadskursen är också avsedd att vara en "brokurs" i samband med övergång från yrkesprogram till andra program. Vidare bör ett antal "spetskurser" av skilda slag med ämnesspecifikt innehåll tillskapas. Exempel på sådana är "Linjär algebra och matriser" (för bl.a. teknik- och naturvetarelever), "Linjär optimering" (för bl.a. ekonomielever), "Sannolikhetslära fördjupning" (för bl.a. samhällsvetar- och naturvetarelever) och "Talteori" (för bl.a. matematikelever).

### *Förslag*

Principerna kan realiseras inom olika ramar och på många olika sätt. Vi ger här nedan ett förslag till hur kursstrukturen skulle kunna se ut. Det måste bli ett arbete för någon annan instans att utveckla tankarna bakom strukturen och arbeta fram struktur, mål och innehåll om det skulle visa sig att det finns uppslutning bakom principerna.



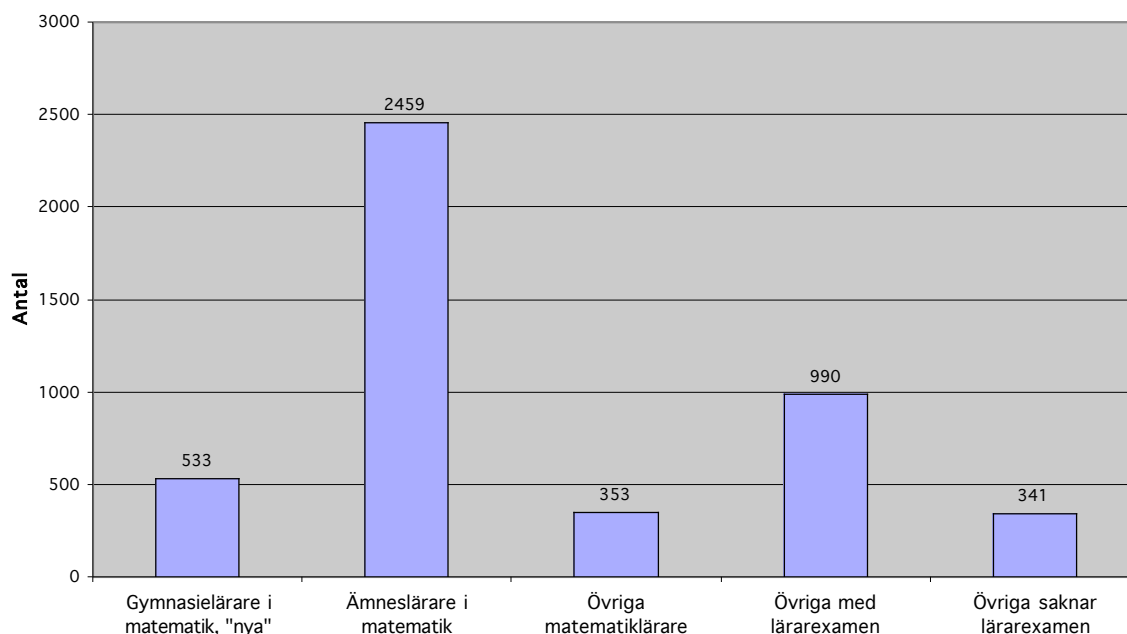
Kommentarer till figuren

- Förslaget utgår från nuvarande programstruktur på gymnasiet. Vid den kommande läroplansreformen kan denna struktur helt omändras, men detta innebär inga avgörande problem för förslaget genomförande. Tvärtom kommer en struktur som den av Gymnasiekommittén föregivna sektorsmodellen snarare ställa större krav på en förändring i förslaget riktning. Skillnaden blir att man kan få tillskapa ännu fler sektorskurser och specialiseringskurser.
- I bilden har endast ett fåtal exempel på vägar till universitet, högskola och övrig vidareutbildning skisserats. I verkligheten är naturligtvis möjligheterna ofantligt mycket större.
- För att möjliggöra övergångar mellan olika program, måste det finnas vägar horisontellt i bilden. Dessa vägar måste emellertid vara utformade för varje speciell situation. I bilden har dessa horisontella vägar endast antytts.
- De valbara kurserna ska kunna utgöra ett val både mellan olika matematikkurser och mellan matematikkurser och kurser inom andra ämnen.

### *Gymnasielärarnas kompetens, önskemål om kompetensutveckling*

I den enkätundersökning som SCB genomfört (bilaga 4, 5 och 6) framgår vilken utbildning nuvarande lärare i matematik vid gymnasiet har och vilka önskemål de har om kompetensutveckling. Enkäten gick till 1500 lärare och svarsfrekvensen var över 75%. Uppskattningen av antalet i hela populationen har gjorts utifrån enkätsvaren, som kan anses vara representativa för hela gruppen. Givetvis finns en viss osäkerhet i de uppskattade antalen.

En majoritet, 65 %, har utbildning som lärare i matematik för gymnasiet. De har antingen gymnasielärarexamen enligt det nya systemet eller ämneslärarutbildning enligt det tidigare systemet. Vi har delat upp svaren i fem grupper. Den första gruppen är de lärare som har den nya gymnasielärarexamen och därmed minst 60 akademiska poäng i matematik. Nästa grupp är de lärare som har den tidigare utbildningen till ämneslärare som gällde fram till 1988. De har minst 40 poäng i matematik. Nästa grupp (övriga matematiklärare) är de lärare som har lärarexamen och som har mellan 20 och 40 poäng i matematik. De kan till exempel ha utbildning för att undervisa i matematik i grundskolan. Den fjärde gruppen (övriga lärare) har lärarexamen, men mindre än 20 poäng i matematik. Den sista gruppen saknar lärarexamen. I gruppen ”övriga matematiklärare” och ”övriga utan lärarexamen” har en majoritet, eller 19% av hela gruppen, inte läst matematik vid högskolan överhuvudtaget.



**Figur 1** Uppskattat antal lärare som undervisar i matematik på gymnasiet uppdelade i grupper utifrån utbildning

En liten grupp lärare har forskarutbildning. Endast 16 bland de svarande på enkäten uppgav att de har en forskarutbildning.

Det är anmärkningsvärt att så många som en tredjedel av lärarna saknar den utbildning som egentligen skulle krävas. Att dessutom nästan var femte lärare som undervisar i matematik på gymnasiet saknar utbildning i matematik på högskolenivå är förvånansvärt. Det kan tyda på att vissa rektorer låter lärare i andra ämnen undervisa i matematik, i en föreställning om att det inte krävs mer för att klara av matematikundervisning. En annan tänkbar orsak är en brist på utbildade gymnasielärare i matematik.

Alla dessa matematiklärare har – liksom andra lärare och andra professionella grupper – ett behov av kontinuerlig kompetensutveckling. En rätt till kompetensutveckling finns också inskriven i avtal och förordningar, men det är inte alla lärare som får kompetensutveckling inriktat specifikt på deras undervisning i matematik. Enligt enkäten har 68% deltagit i någon form av

kompetensutveckling relaterat till ämnet. Det är anmärkningsvärt att så stor andel som 32% *inte* har fått någon sådan kompetensutveckling.

Vi ser det som mycket viktigt att den grupp som saknar lärarutbildning med inriktning mot matematik för gymnasiet bör erbjudas möjlighet till fortbildning så att de uppnår en grundläggande "behörighet". Denna fortbildning bör ha en omfattning i matematik och matematikdidaktik som motsvarar nuvarande program i den grundläggande lärarutbildningen. Vi hänvisar till arbetsgruppen för lärarutbildning för vidare diskussion av dessa frågor.

Kompetensutveckling i allmänhet behandlas i ett särskilt kapitel.

### *Organisation, ledning och utveckling av matematikutbildningen på gymnasiet på lokal nivå*

Nuvarande styrning av skolan bygger på ansvar på den enskilda skolan för tolkningar inom de vida ramar som styrdokumentet definierar. Det förutsätter ett aktivt arbete med ämnet och det måste utföras av lärarna tillsammans, men det krävs ett tydligt uppdrag och resurser. Varje gymnasium bör ha en ämnesansvarig matematiklärare med ansvar för att utveckla ämnet, ansvara för arbetet med lokala planer, inrätta lokala kurser, välja läromedel, planera kompetensutvecklingen för matematiklärarna, fånga upp signaler från olika resurscentra och myndigheter, genomföra implementering av nya läroplaner och kursplaner, planera organisering, mål, innehåll av valbara kurser, rekrytering till dessa. Det gäller alla gymnasieskolor utan undantag, eftersom matematik är ett viktigt ämne för eleverna, och sällan oproblemiskt, på alla program. Det måste finnas ett tydligt och formulerat, nerskrivet uppdrag och resurser för att genomföra uppdraget. Den ämnesansvarige kan ersättas av en liten grupp av personer som tillsammans sköter ämnesansvaret, om det visar sig fungera på en enskild skola, men normalt bör ett tydligt ansvar ges till en person.

Inom ramen för SCB:s undersökning på uppdrag av delegationen gjordes även en enkät till ämnesansvariga lärare. Det visar sig att många gymnasier saknar en ämnesansvarig lärare. Enligt enkäten till gymnasielärare arbetar 50 % av matematiklärarna på skolor som saknar lärare med uppdrag som ämnesansvarig. Där uppdraget finns är det ofta otydligt eller rent administrativt.

Av enkäten till ämnesansvariga framgår att den besvarats av lärare som arbetar på skolor med olika förutsättningar, allt ifrån små skolor med mindre än 300 elever till stora skolor med över 1000 elever. De arbetar i kommuner av olika storlek och på skolor med olika kombinationer av program och med allt ifrån mindre än 5 kollegor som är matematiklärare till dem som har över 20 lärare i gruppen. Det tycks som om de lärare som besvarat enkäten (49 stycken) kan anses representera alla typer av skolor. De ämnesansvariga har varierande längd på sin yrkeserfarenhet, med rätt god spridning från mindre än fem år till mer än 20.

De skolor som har ämnesansvariga är i hög grad skolor med NV- och SP-program. Skolor med endast yrkesprogram har i liten grad ämnesansvarig matematiklärare. När det gäller tiden för uppdraget har 55% av de ämnesansvariga inget utrymme i form av särskilt avsatt tid för uppdraget. Endast 20% har mer än 5% av heltid för att ägna uppdraget. I uppdraget kan ingå en rad uppgifter, men bilden är splittrad och variationen stor mellan skolorna. Endast en tredjedel har i uppdrag att utveckla ämnets innehåll. Uppdrag som att ta fram lokala mål, planera kompetensutveckling, utveckla organisationen ingick för vissa. Hälften har budgetansvar och en budget som omfattar allt ifrån mindre än 5000 kronor till över 100 000 kronor. För många ska anslaget täcka kostnader för läroböcker, medan cirka 10% ansvarar för kostnader för kompetensutveckling. Ytterst få har fått någon utbildning för sitt uppdrag eller får fortlöpande utveckling för detta.

På frågan om vilka resurser som finns tillgängliga på lokal, regional och nationell nivå svarar de flesta kollegor och litteratur (oftast tidskriften Nämnaren). Ett fåtal (2-3) anger kontakter med högskolan. Arbetsgruppen finner det anmärkningsvärt att varken NCM (Nationellt centrum för matematikutbildning) eller Skolverket alternativt Myndigheten för skolutveckling uppfattas som en resurs av de ämnesansvariga. Detta tyder på att stödet på nationell nivå behöver prioriteras och utvecklas. Kontakterna mellan gymnasier och högskolan borde också utvecklas för att ge ett stöd till ämnesansvariga på skolorna.

### *Forskarutbildade lärare, ettämneslärare*

Gymnasierna bör anställa lektorer i matematik, som är forskarutbildade. Tillgången på forskarutbildade lärare är för närvarande liten, och skolorna kan då som ett första steg anställa

ettämneslärare med till exempel magisterexamen, eller på annat sätt fördjupade kunskaper i matematik och matematikdidaktik. Ettämneslärare ska ses som komplement till lärare med två eller tre ämnen. Ettämneslärare är motiverat inte bara som alternativ till lektorer utan av andra skäl. De främsta skälen är följande fyra:

- Matematik är ett så stort undervisningsämne i timomfång
- Matematiken är ett så brett område, med kurser från grundskolenivå (för IV-programmet) upp till högskolekurser
- Matematiken innebär stora didaktiska utmaningar som motiverar vissa specialister
- Möjligheten till tjänster som ettämneslärare kan underlätta rekryteringen till läraryrket.

### *Mål och innehåll*

Nuvarande kurser i matematik lider enligt många lärare av stofffrängsel. Innehållet i kurserna i gymnasiet liknar ytligt sett innehållet i de grundkurser som ges första terminen vid högskolan. För att undvika att överlasta kurserna med innehåll bör man analysera målen både utifrån de matematiska kompetenser som eleverna behöver i andra ämnen eller som är mål i sig och utifrån innehållet. Även om innehållet kan behöva begränsas betyder inte det att man inte kan behöva föra in nya moment, till exempel diskret matematik för nya grupper.

Mål och innehåll för gymnasieskolan bör utvecklas i nära samverkan med representanter för andra ämnen, högskolan och den kvalificerade yrkesutbildningen. Om den reform av gymnasiet matematik som arbetsgruppen föreslår kommer till stånd måste en genomgång och översyn av alla kurser genomföras. Sambandet med grundskolan å ena sidan och högskolan å den andra måste nog övervägas, så att glappet som nu finns mellan grundskolan och gymnasiet å ena sidan och mellan gymnasiet och högskolan å den andra kan minskas och helst överbryggas.

Datorn används fortfarande i mycket liten utsträckning i gymnasieundervisningen i matematik. Undantag finns givetvis vid vissa gymnasier. I jämförelse med vissa andra länder som Frankrike och Norge ligger Sverige efter på detta område. Många utmärkta undervisningsprogram finns som verkligen utnyttjar möjligheten till interaktivt lärande där datorn kan fungera som instrument för ökad begreppslig förståelse och hjälp till visualisering (exempelvis Cabri, Cinderella och Derive). Grafritande miniräknare används på gymnasiet och rätt använda kan de bidra till förståelse (Bergqvist, 2002). Samtidigt används miniräknare ibland på ett sätt som motverkar lärandet, funktioner blir till knapptryckningar och algebraiskt strukturellt tänkande (formalismkompetens enligt KOM-modellen) utvecklas sämre genom att miniräknaren tillåts ta över på fel sätt.

Arbetsgruppen menar att undervisning med miniräknare måste vidareutvecklas och att datorer i större utsträckning ska dels ersätta miniräknarna, dels komma in på ett didaktiskt motiverat sätt i gymnasiet matematikundervisning.

### *Undervisning och lärande (Lusten att lära)*

I en bilaga finns en sammanställning av de delar expertrapporterna för projektet Lusten att lära – med fokus på matematik (Skolverket, 2002) som behandlar klassrumsobservationer och intervjuuttalanden om hur lektionerna upplevs av elever och lärare. Den kritik som finns riktas framförallt mot en alltför läroboksstyrd och enahanda undervisning.

### *Läromedel*

Läroböckerna spelar en stor roll för lärarnas undervisning och elevernas arbete. Läroböcker kan användas på olika sätt av olika lärare och ett läromedel styr inte ensamt undervisningen och lärande. Men faktum kvarstår att olika böcker också skapar olika möjligheter för lärande. Val av läroböcker är alltså en viktig kvalitetsfråga.

En granskning och värdering av läroböckernas innehåll ur matematisk och didaktisk synpunkt måste göras av lärarna i skolorna inför deras val av läroböcker. Det är en svår och tidskrävande uppgift att bedöma en lärobok grundligt och ur alla relevanta aspekter. Det vore ett värdefullt stöd för lärarna att ha en kvalificerad bedömning och värdering av de olika läroboksalternativen att stödja sig på vid sina beslut. Någon sådan granskning sker inte längre. Vi anser att en granskning på nationell nivå av läroböcker skulle vara av stort värde. Den skulle inte utmynna i ett enkelt betyg

utan var informativ och beskriva bokens användningsmöjligheter i förhållande till olika undervisningsmetoder.

### *Förslag i punktform*

- *Fler elever* måste ges lust och möjlighet att läsa *mer matematik* på gymnasienivå. Tendensen till minskat intresse måste vändas.
- En *ny struktur* föreslås för *gymnasieskolans matematik*. Kurserna anknyts till programmets eller inriktningens övriga innehåll. Kärnkursen (100 p) görs specifik för programmet men med en gemensam del som syftar till medborgarkunskap. Karaktärsämneskurser införs av olika omfattning. Alla program erbjuder valbara kurser. Systemet kompletteras med vissa överbryggingskurser. Modellen fungerar också i en gymnasieskola med sektorsstruktur.
- Mål och innehåll i gymnasieskolans matematikkurser ses över med anknytning både till grundskola och till högskola och utifrån ett kompetensperspektiv och ett innehållsligt perspektiv.
- Alla gymnasieskolor bör införa en *ämnesansvarig* lärare med uppdrag att leda ämnesarbetet i matematik. Uppdraget ska vara tydligt och förenat med utrymme i tjänsten och med budget och budgetansvar.
- Lektorer i matematik anställs vid gymnasieskolorna, i första hand vid skolor med teoretiska program.
- Tjänster som *ettämneslärare* i matematik bör kunna införas vid gymnasieskolorna
- *Läroboksgranskning* på nationell nivå bör införas – inledningsvis som en del av ett övergripande matematikprojekt (se kapitel 11)
- Lärare som saknar utbildning som matematiklärare för gymnasiet bör erbjudas kompetensutveckling i matematik upp till nuvarande nivå i gymnasielärareutbildningen och ges reella möjligheter att genomföra en komplettering på deltid.
- Ökad satsning på *hjälpmedelskompetens* och på datorn som ett instrument för lärande i matematik.

## Kapitel 5 Högskolans grundutbildning i matematik

Högskolans matematikutbildning har utvärderats i flera sammanhang senaste 10-års-perioden. Arbetsgruppen bygger i sina analyser och förslag i hög grad på framförallt två av dessa. Den ena gjordes av en internationell expertgrupp på uppdrag av universitetskanslern (Universitetskanslern, 1995) och den andra på uppdrag Högskoleverket. Den leddes av Anders Tengstrand (Högskoleverket, 2002). I den stora utvärderingen av ingenjörutbildningarna finns också en hel del material om matematiken som vi kunnat utnyttja (Högskoleverket, 2003).

### *Matematik i högskolan*

Inom högskolan finns många ämnen som klassificeras som matematik i vid mening i studieregistreringssystemet, både inom grundutbildning och forskarutbildning. Inom grundutbildningen finns ämnena matematik, tillämpad matematik, matematisk statistik, numerisk analys, optimeringslära, teoretisk datalogi m fl. Inom forskarutbildningen finns likaså en rad ämnen som hör till de matematiska vetenskaperna. I det följande kommer matematik ibland att användas i snävare mening, ibland i den bredare. När det gäller den statistik som presenteras i avsnitten om grundutbildning och forskarutbildning avses hela tiden alla matematiska ämnen. I avsnitten om matematik som serviceämne, motivation, kompetens och examination avses i första hand ämnet matematik.

### *Studenternas deltagande*

Den kartläggning som tidigare referats (Brandell, bilaga 3) behandlar också högskolans studenter och deras studiemönster. Två huvudgrupper av studenter finns med i kartläggningen. En grupp är de studenter som läser matematik vid högskolan, en annan de som behöver matematik – utöver den obligatoriska kursen på gymnasiet – för sina högskolestudier. I kartläggningen undersöks dessa gruppers antal och utvecklingen sedan 1993. Eftersom årskullarna varierar kraftigt kan man inte enkelt dra några slutsatser om studenternas ökande eller minskande intresse utifrån dessa totalsiffror. Därför beskrivs i kartläggningen också andelen personer i en årskull i någon av dessa grupper.

En slutsats i rapporten är att intresset bland studenterna för att läsa matematik är stort, matematik är det näst största ämnet i högskolans grundutbildning. Bland kvinnorna är den största gruppen de som studerar vid civilingenjörutbildningar, följda av ingenjörutbildningar, lärarutbildningar och fristående kurser i matematik. Bland männen är fördelningen annorlunda, större andel läser på civilingenjör- och ingenjörprogram medan matematik som fristående kurs kommer på tredje plats. Expansionen var betydande under 90-talet, vilket bland annat sammanhänge med ökningen av ingenjörutbildningen. Speciellt ökade antalet kvinnor och äldre studenter. Men ökningen har stannat av och en tendens till minskning framgår om man ser på de årskullar som är födda på 80-talet..

Det finns alltså tecken på att rekryteringen till matematikstudier vid högskolan minskar mätt som andelen av en årskull som före en viss ålder studerat minst en matematikkurs vid högskolan. Det gäller särskilt kvinnorna, medan tendensen är oklar för männen. Denna utveckling bekräftas av enkäten till studierektorerna, där de flesta nämner att speciellt rekryteringen av kvinnliga studenter minskat de senaste åren. En del av minskningen förklaras av minskat intresse för ingenjörprogrammen. Vissa institutioner pekar också på minskat intresse för de fristående kurserna och/eller ”egna” program inom naturvetenskaplig fakultet. Men samtidigt har man på en del håll god rekrytering till C- och D-nivå och till inriktningar som t ex finansiell matematik.

När det gäller behovet av matematik utöver kurs A på gymnasiet i andra program inom högskolan än dem som innehåller matematikkurser, finns en analys byggd på en klassificering av program och kurser inom högskolan och en bedömning av vad som är ett rimligt matematikbehov. Exempelvis antar man i rapporten att ekonomiutbildningar vid högskolan bör kräva matematik C från gymnasiet. Utifrån en sådan analys visar det sig att av en hel årskull 25-åringar så har 9% av kvinnorna läst matematik vid högskolan, 11% läst andra program eller kurser som bygger på matematik D eller E från gymnasiet, 9% kurser eller program som bygger på matematik C och 8%

utbildningar som bör kräva matematik B. Totalt är det närmare 40% av årskullen som studerat/studerar vid högskolan på utbildningar som bygger på matematik utöver kurs A. För männen är motsvarande värden 18% som läst matematik, 6% som läst andra utbildningar som kräver matematik D eller E, 6% som läst kurser/program som kräver matematik C och 2% i sista gruppen. Totalt är det drygt 30% av årskullen män som studerar/studerat kurser/program vid högskolan som skulle kräva matematik utöver kurs A. Nästan hälften av högskolestudenterna läser kurser som bygger på matematik som är obligatorisk endast på NV-programmet.

Det går inte av dessa siffror att dra någon bestämd slutsats av statistiken beträffande behovet av matematik på gymnasium och högskola i framtiden. Men flera skäl talar för att det kommer att öka. Ett viktigt sådant är att högskoleutbildningen enligt statsmakternas mål ska omfatta 50% av en årskull i en snar framtid.

En viktig synpunkt man kan lägga på denna jämförelse är att det inte är realistiskt eller ens önskvärt att alla studenter med en viss matematisk nivå går till utbildningar som kräver just den nivån av matematik. Det är av stort värde ur flera synpunkter att studenter med god förståelse och intresse för matematik väljer att studera inom områden som språk, juridik, humaniora. Det betyder att andelen som läser matematik till en viss gymnasienivå helst ska vara större än den direkta efterfrågan.

I rapporten finns analys av sambandet mellan högskolans ”efterfrågan” och andelen av ungdomar som läser matematik till en viss nivå, antingen i gymnasiet eller på Komvux. Slutsatsen i rapporten blir att det idag är för få ungdomar som läst kurserna matematik D och E för att man ska kunna hålla uppe volymen i de högskoleutbildningar som bygger på förkunskaper från dessa. Slutsatsen är att systemet behöver förändras så att fler elever stimuleras att välja matematik på gymnasiet.

### *Antagningsreglerna*

Idag gör antagningsreglerna att elever i gymnasiet stimuleras att välja kurser där det är enklast att få högt betyg, snarare än de kurser de har nytta av kunskapsmässigt vid sina kommande studier. Problemet behandlas för närvarande av en tillträdesutredning inom departementet, som väntas lägga fram ett förslag inom kort. Problemkomplexet är omfattande och vi har därför inte arbetat fram något konkret förslag. Arbetsgruppen vill dock framhålla att ett nytt antagningsystem som uppmuntrar gymnasisterna att skaffa sig kunskaper som de har nytta av i högskoleutbildningen, snarare än att taktikläsa för att skaffa höga betyg, är ett nödvändigt inslag i den reformering som krävs för att stimulera fler elever att läsa mer matematik.

### *Matematik som serviceämne*

Ämnet matematik är för de flesta studenter ett serviceämne. Många studenter som läser matematik har uppfattningen att matematiken är viktig men det gäller inte alla. För en del kan det vara oklart vad matematiken i deras utbildning syftar till. Speciellt för de studenterna är det en tillgång att få matematiken insatt i ett sammanhang som visar vad matematiken har för syfte i problemlösning och modellering inom det aktuella tillämpningsområdet. Detta kräver fungerande samverkan och ett delat ansvar för att visa matematikens roll inom tillämpningen. Om matematiken ska upplevas som meningsfull, behöver studenterna dels se autentiska tillämpningar inom matematikkurserna, dels få använda sina matematiska kunskaper inom tillämpningsämnet. Det händer att lärarna i tillämpningsämnena väjer för att använda matematiska metoder som studenterna har mött, för att slippa sätta av tid på att förklara matematiken. Matematiklärarna å andra sidan kan ofta vara tveksamma att ta med tillämpningar i sina kurser, eftersom de inte alltid känner väl till hur matematiken används i olika tillämpningar.

För de flesta studenter är det inte omedelbart möjligt att transferera kunskap från en kontext till en annan (detta är ett känt pedagogiskt-psykologiskt fenomen och inget speciellt för matematiken). Matematisk modellering inom tillämpningsområdet är en brygga mellan matematiken och tillämpningen. Enkla modeller bör i större utsträckning kunna användas i matematikkurserna för att belysa användningarna. Centrala matematiska metoder från matematikkurserna bör i större utsträckning kunna användas i tillämpningsämnena.

Enligt arbetsgruppens erfarenheter finns ett problem inom grundutbildningen som består i att matematik som undervisas tidigt i utbildningen inte senare används i kurser inom andra ämnen.



Detta trots att matematikkursens innehåll ibland rent av kan vara skraddarsytt för just användning i sådana efterföljande kurser. En sådan situation sänder olyckliga signaler till studenterna. I många utbildningsprogram inom naturvetenskap och teknik har matematik en stark ställning. Det är därför centralt att ansvariga för programmen, avnämarämnena och matematiken fortlöpande för en diskussion om matematikinnehållet och hur det tillämpas. Alla dessa tre parter bör ha klart för sig på vilket sätt programmets matematikinnehåll bidrar till målet med utbildningen.

### *Motivation och tillit*

Många studenter – kanske de flesta, vi har ingen möjlighet att bedöma det – upplever en positiv stämning tillsammans med lärarna och kamraterna i matematikkurserna. De undervisas av lärare som med engagemang, kunskaper, erfarenhet och god pedagogisk förmåga hjälper studenterna till ett gott lärande. Studierektorerna vittnar i intervjuerna om att den största tillgången i verksamheten är de goda lärarna. Några tillägger att begåvade och intresserade studenter är den andra stora tillgången.

Men åtskilliga studenter kan berätta om att de mött en negativ kultur skapad bland annat genom den ihärdiga debatten om bristande kunskaper och de låga förväntningarna från lärarna. Vårt intryck är att denna negativa kultur har starkare fäste på vissa matematikinstitutioner. På andra ställen fungera kontakten mellan lärare och studenter bra. I en rätt nyligen utkommen avhandling beskrivs situationen för ingenjörstudenter (Westlund, 2001). Författaren skriver i sammanfattningen att för över hälften av studenterna krävs en förändring i deras studiesituation för att de ska kunna känna sig mindre pressade och anpassa sig till en djupinriktad inlärningsstil. Hon menar att lärarnas attityder kan vara ett hinder för den förändring som behövs i studenternas situation.

Arbetsgruppen anser att det är en ledningsfråga att möta effekter av en kultur som uppfattas som negativ med ett förändringsarbete, där de vissa attityder ifrågasätts. Vi anser också att detta arbete är av yttersta vikt för att skapa goda relationer mellan matematiker och tillämpare i framtiden.

Orimligt svaga tentamensresultat förekommer på vissa håll ibland och kan ge upphov till diskussioner med negativa återverkningar. Det finns många studenter som varit med om att misslyckandet på matematikkurserna orsakar studieavbrott eller stora förseningar. Matematiken blir ett hinder för många studenter att fullfölja sina studieplaner. Frågan diskuteras i utvärderingen av ingenjörutbildningarna (Högskoleverket 2003) och man inför ett begrepp ”examinationskvot” för att mäta resultaten. Det anger andelen studenter som klarar *alla* moment i en matematikkurs och alltså får godkänt. Det måttet kan vara betydligt lägre än prestationsgraden. Institutionerna bör redovisa sin statistik över studenternas resultat och inkludera denna ”examinationskvot”.

För de studenter som kommer till högskolan med bristande tillit till sin egen matematiska förmåga, så krävs att man möter dem på ett annat sätt än de starka studenter som har en tro på sin förmåga. Men också studenter med goda erfarenheter och en positiv inställning kan råka ut för bakslag som får dem att vackla i tilltron. Matematikinstitutionernas uppdrag är att erbjuda också studenter med svag självtillit en positiv utveckling och möjligheter att nå sina mål, med en rimlig insats, som i vissa fall naturligtvis måste bli större än den formella arbetstiden enligt poängen.

### *Strukturen i matematikerutbildningen*

Matematikerutbildningen finns traditionellt både inom tekniska och naturvetenskaplig fakultet. Vid de tekniska högskolorna har matematiker utbildats framförallt vid Teknisk Fysik – programmet. Vid de naturvetenskapliga fakulteterna ser det olika ut, men vid flera universitet/högskolor, så utbildas matematiker som en inriktning vid ett allmännare naturvetarprogram. Magisterexamen i matematik kan också avläggas efter studier av fristående kurser. Rekryteringen till matematikerprogram skulle behöva ökas. Arbetsgruppen menar att matematikerprogram bör introduceras vid alla universitet som inte redan har sådana och tydligt marknadsföras bland eleverna på gymnasiet. De bör följa Bologna-modellen (se vidare nedan). Detta skulle enligt vår mening hjälpa upp rekryteringen, och ge matematikeryrket en starkare identitet i samhället.

Vid Lunds tekniska högskola har ett nytt civilingenjörsprogram, Teknisk matematik, startats läsåret 2002/2003. Det är det första programmet i sitt slag i Sverige men har förebilder i andra länder. Inriktningen är som namnet anger matematik med teknisk profil. Det finns ett större

matematikinslag - matematik, tillämpad matematik och datalogi - redan från början än i andra program. Som specialisering väljer studenterna mellan finansiell matematik, biomatematik, signaler och system, beräkning och simulering alternativt en egen inriktning sammansatt av kurser som ges på andra program. Programmet skiljer sig från den matematikspecialisering som finns inom F, dels för att fysikinslaget är mindre, dels för att matematiken kommer in tidigare, dels genom andra möjligheter till teknisk specialitet.

Rekryteringen är god och det verkar som om programmet attraherar nya grupper av studenter. Många av dem som nu går på programmet skulle inte valt matematikstudier utan gått till andra områden om de inte hade fastnat just för detta program enligt enkäter till nybörjarna.

Vi har valt att beskriva utbildningen ganska utförligt därför att den pekar på en förebild även för andra tekniska högskolor. Naturligtvis måste ett teknisk matematik-program se olika ut beroende på lokala förhållanden. Men ett tekniskt inriktat matematikerprogram kan hjälpa till att bredda rekryteringen och dra fler duktiga studenter till matematikinstitutionerna och borde enligt arbetsgruppens mening inrättas på fler orter.

### *Bolognaprocessen*

Bolognaprocessen är ett samarbete mellan europeiska stater och universitet med mål att införa en gemensam examensstruktur. Samarbetet har utvecklats under några år, bland annat i form av ett gemensamt kurssystem (ECTS-poäng, 60p/år). Syftet med hela processen är ökad mobilitet och jämförbarhet. Kvalitetsfrågorna har blivit allt viktigare.

Den föreslagna strukturen bygger på tre nivåer: kandidatexamen som omfattar tre år, masterexamen (eller magister) som är en påbyggnad och omfattar två år. Ett tredje steg är att införliva forskarutbildningen som då är tänkta att vara tre år. Modellen brukar betecknas 3+2+3 (ev 4).

Den svenska staten och de svenska universiteten har förhållit sig ganska passiva när det gäller omstruktureringen av examina. Just nu pågår dock en större utredning på departementet om just strukturen. Ett förslag kommer att läggas fram i februari.

En trolig utveckling är att Bolognaprocessen kommer att fortgå och att de svenska grundutbildningarna kommer att anpassas till systemet 3+2(+3/4) relativt snart, möjligen med undantag av vissa längre professionsutbildningar, exempelvis läkarutbildningen och civilingenjörutbildningen. Denna modell skulle rätt utnyttjad kunna ge en rad fördelar för matematikerutbildningar inom naturvetenskapliga fakulteter. I och med att utbildningen förlängs ett år, finns utrymme för ett mer kvalificerat magisterarbete (något som ingår i modellen) med ett eget självständigt arbete motsvarande ett års studier. Studenterna med en nya magisterexamen skulle passa bra på en arbetsmarknad där fler kvalificerade matematiker efterfrågas. Det finns en arbetsmarknad inom näringslivet. Det finns också en stor arbetsmarknad inom skolan, där magistrar med lärarexamen skulle bli en viktig resurs med uppgifter som t ex ämnesansvar och kontaktverksamhet med högskolan.

Magisterexamen blir också en god grund för forskarutbildning och studenterna skulle komma bättre förberedda till forskarutbildningen och ha en bättre uppfattning om vad forskarutbildningen innebär, genom att de kan genomföra ett forskningsinriktat projekt inom magisterutbildningen. För lärare som önskar gå vidare blir en magisterexamen en bra möjlighet, eventuellt ett första steg på vägen mot en forskarutbildning.

Inom de länder som samarbetar om Bolognaprocessen finns ett arbete på ämnesnivå - projektet *Tuning educational structures in Europe* - som drivs av universiteten. Inom detta projekt har matematiker från 105 universitet utvecklat en ram för målen för magisterexamen i matematik (Mathematics Subject Area Group, 2003). Dokumentet är intressant och bör kunna vara till hjälp för svenska universitet/högskolor som vill planera för den nya examen. I korta drag vill man inkludera vissa basområden i matematiken samt ge alla matematiker god kunskaper också i något ämnesområde utanför matematiken där matematiken tillämpas.

Vår slutsats och rekommendation är att de svenska matematikinstitutioner som idag har examensrätt för magisterexamen i matematik snarast bör planera för ett kandidat- och magisterprogram i enlighet med Bolognamodellen. Genom att ha god framförhållning ökar man chansen att få relevant mål och innehåll som är förankrat inom den egna fakulteten.

Inom teknisk fakultet blir anpassningsprocessen med säkerhet tyngre, eftersom strukturen i civilingenjörs utbildningarna är invecklad. Chalmers går före och inför Bologna-modellen redan hösten 2004 för alla studenter som skrivs in det året och framåt. En del av matematiken flyttas till högre år (inom magisterprogrammet) och det innebär omstruktureringar och förhandlingar om utrymme. På de flesta tekniska högskolor finns ett stort intresse från vissa program att stärka matematiken och en förlängning av utbildningen ger ju möjligheter. Men det är en viktig strategisk fråga att tidigt ta konstruktiva diskussioner med programmen och i samförstånd hitta bra kurser som passar studenternas intresse och de tillämpade ämnenas behov.

### *Mål och innehåll*

Som inledningen till denna rapport berättar är matematik ett brett ämne. Inte bara rymmer det ett mycket diversifierat innehåll utan ämnets drivkrafter spänner också ett brett spektrum. Det finns både inre drivkrafter – att söka svar på frågor om matematiken självt – samt yttre drivkrafter – att hitta metoder för att lösa problem inom andra områden. Matematik är också ett ämne med starka traditioner. Dessa starka traditioner leder kanske ibland till ett allt för traditionellt innehåll. Vidare visar forskning att ämnet ofta framställs som statiskt och ”färdigt” och att den starka roll som intuition har i matematisk problemlösning inte kommer fram.

För att på ett bra sätt kunna specificera mål och välja innehåll tror arbetsgruppen att diskussioner om detta både för program och specifika kurser skulle bli mer konstruktiva om en struktur som KOM-projektets kompetenser användes. En sådan modell kan tydliggöra vilken roll det specifika ämnesinnehållet har för en kurs eller ett program och därmed öppna för en friare diskussion om detta innehåll.

### *Kompetenser, speciellt modellering, kommunikation och datoranvändning*

Av de kompetenserna enligt KOM-projektet är det speciellt tre kompetenser som är svagt representerade i grundkurserna och som borde uppmärksammas mer. Den ena är förmågan att kommunicera, både muntligt och skriftligt. Den borde ingå för alla studenter i olika former, med presentationer inför kamrater, med skriftliga redovisningar och inlämningsuppgifter med feedback, med större skrivuppgifter i samband med fortsättningskurser och slutligen examensarbeten och uppsatser. Vid LTH har man startat en speciell kurs i matematisk kommunikation för första års studenter vid det nya Tekniska matematikprogrammet. I Växjö bedrevs för en del år sedan ett flerårigt projekt där studenter i grupper arbetade med bland annat matematisk kommunikation.

Den andra förmågan är modelleringskompetensen, som i allmänhet kommer in först mot slutet av utbildningen kanske i examensarbeten och för matematikerna, inte på alla program. Det finns exempel på att modelleringskurser ges också på grundläggande nivå (Karlstad, Luleå, Lund, Växjö). Modellering behöver enligt forskningen läras ut och kommer inte så att säga på köpet för att man lärt sig matematiken och färdiga modeller inom sitt tillämpningsområde.

Den tredje gäller hjälpmedelskompetensen. Datoranvändningen behöver utvecklas inom den grundläggande matematikutbildningen. Datorn är ett självklart hjälpmedel för professionella matematiker. Studenter kommer att utnyttja datorn som stöd och som instrument i sitt yrkesmässiga matematiska arbete i framtiden. Det blir då naturligt att parallellt med andra arbetssätt också arbeta med datorstöd redan i de grundläggande kurserna i matematik. Det kräver ett didaktiskt utvecklingsarbete, ekonomiska resurser och omprioriteringar. Arbetsgruppen menar att utvecklingen går alldeles för långsamt, även om det givetvis finns undantag. För förslag, analyser och en kritisk granskning se Högskoleverket (1999). Se vidare avsnittet om övergången mellan gymnasium och högskola.

Ett matematikprogram som i hög grad bygger på datoranvändning är det som drivits vid Chalmers tekniska högskolas kemiprogram sedan några år. Kurserna i analys och linjär algebra har givits ett nytt innehåll och de grundläggande begreppen i analys (gränsvärde, derivata och integral) definieras utifrån ett iterativt tänkande. Målet är att studenterna får modellera kemiska system med partiella differentialekvationer och behandla dessa med avancerade matematiska och numeriska metoder redan i de grundläggande kurserna.

Liknande synpunkter som arbetsgruppen fört fram om kompetenserna återfinns i Högskoleverkets rapport (2002).

### Varierad examination

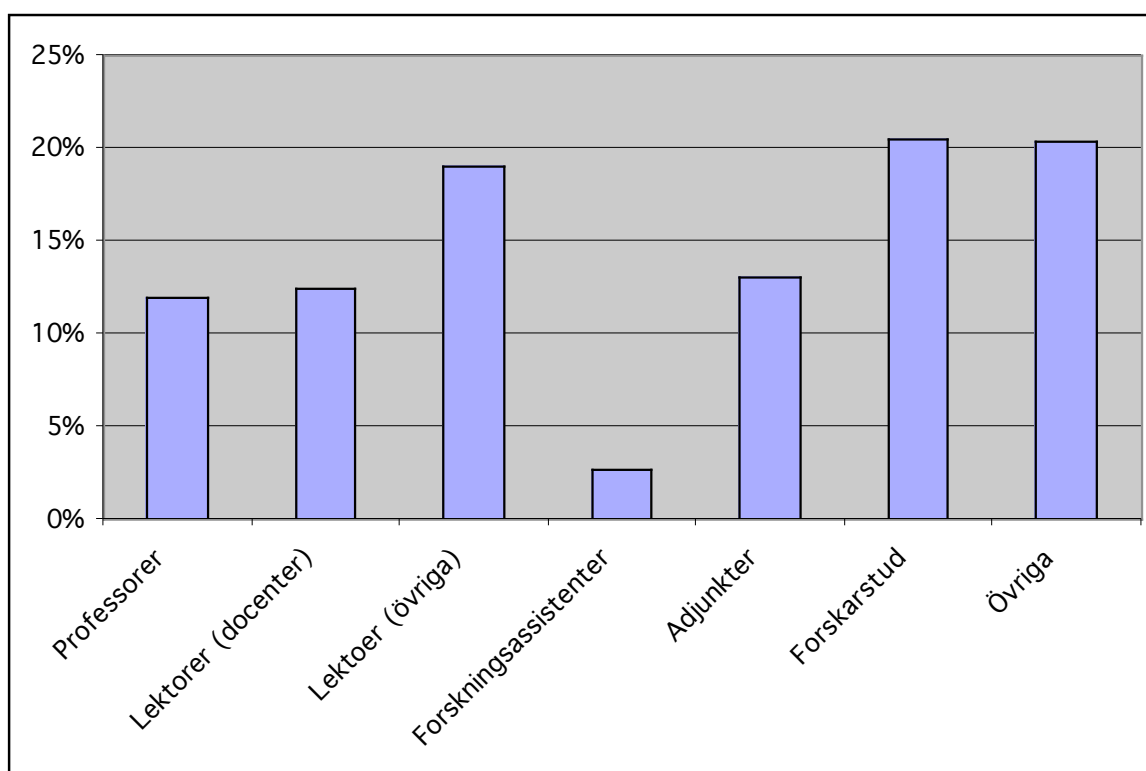
Examinationen är många gånger stereotyp. Allt det arbete och alla de resurser som läggs ner både av studenter och lärare kommer knappast studenterna tillgodo i form av lärande, utan blir ett rent kontrolltillfälle. En examination som följs upp och används i undervisningen vore

Kontinuerlig examination är en möjlighet som prövats med framgång i olika former (Luleå, Uppsala) och som ger möjlighet att utnyttja examinationen som ett tillfälle för lärande och ger lärarna goda möjligheter att följa sina studenters framsteg och ge individuell återkoppling. Det finns också exempel på examination via interaktivt datorstöd (Luleå), som kan förenkla och effektivisera delar av examinationen av mer grundläggande karaktär. Den kombineras med mer kvalificerad examination av andra delar.

### Lärarnas kompetens

Arbetsgruppen har låtit göra en sammanställning av undervisande personal vid matematiska institutioner efter en enkät till studierektorer. Frågorna ställdes på samma sätt som vid högskoleverkets utvärdering av matematiken (Högskoleverket, 2002). Fördelningen totalt på 26 matematikinstitutioner visas i figur 2. De olika grupperna är professorer, lektorer med docentkompetens, övriga lektorer, forskarassistenter, adjunkter, forskarstuderande och övriga. Den sista gruppen består ofta av äldre studenter som leder övningsgrupper.

Fördelningen är inte alls likartat vid olika institutioner. Forskarstuderande förekommer vid 14 av de 26 institutionerna. Övrig personal i nämnvärd omfattning endast vid fyra institutioner, framförallt KTH, Linköpings universitet och Lunds universitet/LTH som alla har en stor civilingenjörsutbildning.



**Figur 2** Andel av olika lärarkategorier bland undervisande personal vid 26 matematikinstitutioner hösten 2003. Totalt 1102 personer.

Det framgår att det är en relativt stor andel av dem som undervisar som antingen är forskarstuderande eller "övriga". Gruppen adjunkter är också ganska stor och finns representerad på alla institutionerna. Volymen undervisning som de olika kategorierna svarar för är fördelad på annat sätt än enligt diagrammet. Doktorander och "övriga" undervisar mindre liksom professorer

som oftast har liten eller ingen undervisning i grundutbildningen. Det är emellertid anmärkningsvärt att så många som över hälften har inte forskarutbildningen klar och över 40% har inte anställning som lärare.

### *Undervisning och lärande*

Det är svårt att få en överblick över undervisningsformer och lärande och arbetsgruppen har inte kunnat skaffa sig en fullständig bild. I högskoleverkets utvärdering (Högskoleverket, 2002) sägs följande:

Trots vad som sagts inledningsvis om lärarnas engagemang framstår undervisningen som förhållandevis traditionell och ytterligare pedagogiskt utvecklingsarbete krävs liksom tid och stimulans för att genomföra detta. (sid 19)

Det finns intressanta och lovande utvecklingsprojekt som bedrivs på olika håll. Kunskapen om dem är ofta inte särskilt spridd, ibland inte ens inom den egna institutionen. Det finns ofta ingen tradition att dokumentera och utvärdera försök på ett systematiskt sätt. Vi föreslår längre fram (avsnittet om didaktik och pedagogiskt utvecklingsarbete) att man anordnar årliga konferenser för att öka erfarenhetsutbytet och stimulera till bättre dokumentation och utvärdering, samt kritisk reflektion kring undervisning och lärande på de matematiska institutionerna. Sådana konferenser arrangerades under två år via grundutbildningsrådet speciella referensgrupp för matematikutbildning 1998 och 1999.

Läroböckerna som används är de inledande kurserna vid högskolan är ofta amerikanska. På en del håll använder man fortfarande svensk litteratur som skrevs för över 25 år sedan och som inte har omarbetats grundligt. Vissa nyskrivna böcker ges ut på svenska förlag. Men ett bestämt intryck är att det saknas modern litteratur som är avpassad till dagens situation. Arbetsgruppen föreslår att man startar ett samverkansprojekt mellan flera institutioner för att ta fram helt nyskrivna böcker för de inledande kurserna och som inriktas på nya tillämpningar, kommunikation, modellering och datorintegration vid sidan av mer traditionella innehåll. Vikten av att lära studenterna svensk terminologi betyder att utländska böcker inte bör vara enda alternativet.

### *Organisation, ledning och utveckling på institutionsnivå*

Många av institutionerna för matematiska ämnen i Sverige har på senare tid fått känna av en hård ekonomisk verklighet. Vikande studentunderlag och andra förändrade yttre villkor har resulterat i minskade anslag och en allt högre arbetsbelastning för de undervisande lärarna.

Å andra sidan har de senaste årtiondena användningen av matematik i industri, inom andra vetenskaper och i samhälle i övrigt ökat kraftigt. Inom bank- och finansvärlden krävs matematiska modeller vid handel med finansiella instrument. I industrin baseras en betydande del av produktutvecklingen på kraftfulla datorer och beräkningsmatematik. I samhället i stort gör önskemål om snabb, säker och tillförlitliga kommunikation att effektiv kodning och kryptering är ett måste. Med tanke på alla dessa tillämpningar bör det finnas en potential för att både hitta nya grupper av studenter som skulle ha användning för matematikkunskaper och hitta program där en ökad matematikkompetens kan vara motiverat.

För att kunna utnyttja dessa möjligheter krävs det att matematikinstitutionerna kan ge en trovärdig bild av vad de kan tillföra dessa utbildningar. Det är ett liknande pedagogiskt problem som matematiken vid tekniska högskolor kan hamna i vid införandet av Bolognamodellen. För att framgångsrikt kunna föra dessa diskussioner är det troligt att matematikinstitutionerna bör vara flexibla i vilket matematikinnehåll som deras kurser representerar samt vilka faktiska kompetenser de kan ge studenterna. Arbetsgruppen menar att det krävs en omsorgsfull förberedelse inför dylika diskussioner.

Samtidigt som HSV:s utvärdering av matematikämnet 2002 visar på att matematikundervisningen på svenska högskolor håller en hög nivå så vittnar många studenter om stora problem. Dessa problem kopplas ibland till själva undervisningen, eller ämnet, men ibland också till attityder hos lärarna. Många studenter är redan inför starten av sina högskolestudier nervösa för matematiken, och att då mötas av negativa attityder från lärarna är mycket nedslående.

Att förändra attityder är inte lätt, men ledningen bör ta ansvar för att frågor om attityder från kursvärderingar och dylikt följs upp och tas upp till diskussion inom institutionen.

De flesta institutioner tillämpar vid nyanställning regler som förutom forskningsmeriter också värderar pedagogiska meriter. Många verkar också för att öka den pedagogiska och didaktiska kompetensen hos sina lärare genom att nyanställda lärare genomgår kurser i högskolepedagogik. På sikt är dessa åtgärder främjande för undervisningens kvalitet. För att i det långa loppet säkra en framgångsrik matematikundervisning är dock inte detta nog. Det måste vid varje institution finnas personer som på ett övergripande och framsynt sätt driver utveckling av existerande kurser, för en dialog med avnäm- och samarbetsämnen och också på en planerar för nya inriktningar inom institutionens utbildningsverksamhet. Att säkerställa att det finns personer som har förutsättningar och möjligheter att utföra detta arbete kräver att arbetet också värderas och premieras. Till exempel bör det för personer som visar stort intresse för undervisningsfrågor finnas möjlighet att avsätta tid för strategiskt arbete med sådana frågor.

Det saknas på de flesta matematikinstitutioner en tradition att publicera rapporter och artiklar om pedagogiskt utvecklingsarbete och att dokumentera vad som görs på ett systematiskt sätt. Lärare bör uppmuntras att göra detta i högre grad. Syftet är dubbelt. Andra lärare får för det första möjlighet ta del av erfarenheterna. Läraren själv kan dessutom utveckla sin förmåga att bedöma undervisning och lärande och meritera sig inom området, till exempel via en "pedagogisk portfölj".

Många institutioner står inför pensionsavgångar bland lärare med lång erfarenhet som gör en stor insats inom grundutbildningen. Yngre lärare/forskare med stark pedagogisk kompetens bör rekryteras till lektorstjänster, för att fylla det stora behovet inom grundutbildningen. I vissa fall bör man kunna prioritera detta framför forskningsmeriter.

### *Vad säger tidigare utvärderingar?*

Tidigare utredningar av kvaliteten i matematikutbildningen vid högskolan har givit en rad förslag till viktiga åtgärder och förbättringar, och vi upprepar inte alla här. I en bilaga har vi i punktform samlat en del av förslagen som vi menar är aktuella och viktiga. Här vill vi endast ta upp en fråga som diskuteras i utvärderingen om ingenjörsutbildningarna (Högskoleverket, 2003). Man varnar där för att vissa ingenjörsutbildningar förlorar kvalitet och tappar sin karaktär av ingenjörsutbildningar om inte matematikinnehållet ökar. Man rekommenderar mycket precist att den ska innehålla minst 10 poäng utöver matematik D i gymnasiet, respektive minst 15 poäng om det gäller elektro- och datautbildningar.

### *Förslag i punktform*

- Fler studenter måste intresseras för och erbjudas möjligheter att läsa mer matematik på högskolan. Kvinnorna utgör den största potentialen för ökad rekrytering.
- Förnyat system för behörighet och antagning vid högskolan som uppmuntrar eleverna att skaffa sig god matematisk kompetens innan de söker till högskolan
- Inför matematikerprogram vid naturvetenskapliga och tekniska fakulteter där sådana inte finns. Inslag av modellering, tillämpningar och beräkningsvetenskap bör vara starka och Bologna-modellen bör följas.
- Utbildningar till ettämnslärare för gymnasiet bör erbjudas studenterna i lärarutbildningen. Kombinationsutbildningar som civilingenjör och lärare bör utvecklas på fler håll.
- Matematikinstitutioner vid de tekniska högskolorna uppmanas att planera omstruktureringar motiverade av Bologna-processen. Detta måste ske i nära samarbete med programansvariga och andra ämnens representanter
- Utvecklingen av innehåll och didaktik i matematikkurser i alla typer av program måste göras fortlöpande i enlighet med nya krav/behov/möjligheter. Samarbete inom institutionen och samverkan utåt är nödvändigt för bra resultat.

- Modellerings- kommunikations- och hjälpmedelskompetensen måste ges större utrymme i utbildningen.
- Ledningen vid institutionerna bör finna modeller för att premiera didaktisk kompetens och strategiskt arbete med undervisningsfrågor och för att rekrytera skickliga lärare.
- Undervisningsprojekt bör i högre grad än idag utvärderas och dokumenteras. Lärare bör uppmuntras att publicera sig inom området.
- Moderna läroböcker för matematik på svenska för grundkurserna behöver tas fram.

## Kapitel 6 Övergången gymnasium – högskola

### *Förkunskapsproblematiken*

Diskussionen om brister i förkunskaperna i matematik bland nybörjarstudenterna i matematik har pågått länge och med särskilt hög intensitet sedan 1998, då högskolorna slog larm om försämringar. Dessa sattes i samband med det nya gymnasiets införande och förändringar i grundskolans matematikkurser. Diskussionen handlade i första hand om blivande civilingenjörer. Flera utredningar gjordes och framförallt rapporten *Räcker kunskaperna i matematik?* (Högskoleverket. Bedömningsgruppen 1999) fick stort genomslag.

Flera institutioner följer upp nybörjarnas kunskaper när de kommer till sin första matematikkurs, bland dem Umeå, KTH och Göteborg (Bylund & Boo, 2003, Brandell, 2003, Pettersson, 2003). Sammanfattningsvis har resultaten hos hela gruppen nybörjare har blivit sämre i dessa prov under de senaste fem åren och samtidigt varierar kunskaperna starkt mellan individerna. Bristerna i kunskaper kan enligt rapporterna från institutionerna sammanhånga med en breddad rekrytering, men försämringen kan troligen inte helt förklaras av ändringar i rekryteringen. En tendens både i KTH-s prov och i Umeås prov under perioden 1998-2003 är att männen försämrar sina resultat betydligt mer än kvinnorna.

Bedömargruppen i matematik som utvärderade matematik, matematisk statistik och numerisk analys vid 18 universitet och högskolor år 2001 konstaterar att det finns en *stor spridning* i kunskaperna och anser det inte acceptabelt att studenterna är osäkra på moment som tillhör grundskolans kurs (Högskoleverket, 2002). Bristerna anses resultera i avbrott och förlängning av studietiderna. Bedömargruppen för ingenjörsutbildningarna menar att det framförallt är kunskaper i matematik som brister bland nybörjarna (Högskoleverket, 2003). Man hänvisar till breddad rekrytering som en orsak.

Bristande förkunskaper i matematik har också kommit fram i andra utvärderingar som genomförts av Högskoleverket. I en sammanställning av förkunskapsproblem som baseras på dessa utvärderingar och som genomfördes på uppdrag av tillträdesutredningen visas att matematiken är ett problemämne också inom andra områden (Tillträdesutredningen, U 2003:04). Det gäller alltså inte specifikt matematikstudier utan studenter på program och kurser i andra ämnen. Bristande kunskaper i just matematik påpekas i en rad av dessa utvärderingar, förutom ovanstående också nationalekonomi, datavetenskap, lingvistik, företagsekonomi, yrkesutbildning till sjöingenjör, miljöteknik och kemi.

Av den kartläggning som arbetsgruppen genomfört hösten 2003 framgår det att samtliga tillfrågade studierektorer vid sex matematikinstitutioner framhåller bristerna i kunskaper hos många av nybörjarna som det största problemet i grundutbildningen. Den stora spridningen i kunskaperna framhålls av några som en sammanhängande svårighet.

### *Vilka kunskaper och kompetenser brister?*

Provet som ges till nybörjarna i Umeå och det som ges till nybörjarna vid KTH testar kunskaper som är av betydelse för högskolestudierna i matematik. Båda proven är samtidigt anpassade till nuvarande gymnasiet kurser och målsättning och de har hållits oförändrade under perioden 1998 – 2003 respektive 1997 - 2003. Enligt Umeås prov, så har studenterna brister i kunskaper som rör samtliga kurser A – E för gymnasiet och försämringen under perioden rör alla kurserna.

Enligt Göteborgs prov som ges till nybörjare vid civilingenjörsutbildningarna och som har innehållit likartade uppgifter ända sedan 1973, har resultaten på uppgifter inom bråkräkning, algebra, ekvationslösning, trigonometri och derivering försvagats påtagligt under 1998 – 2003.

Bristerna i algebra är enligt bedömningsgruppen i matematik mest angelägna att reparera (Högskoleverket 2002). Många lärare vid högskolan uppfattar också bristerna i algebra och taluppfattning som de allvarligaste. Förståelse för funktionsbegreppet och begreppen derivata, kunskaper om elementära funktioner och trigonometri är också av stor betydelse för att kunna studera framgångsrikt vid högskolan. Allvarligast är det givetvis för de studenter som har brister i alla områden och vars kunskaper därför är vacklande och osammanhängande.



Utifrån kunskapsproven och sett ljuset av kompetenserna enligt KOM-projektet vågar vi påstå att många av nybörjarna skulle behöva utveckla följande kompetenser till en högre nivå för att lyckas genomföra studierna vid högskolan framgångsrikt:

- Tankegångskompetens
- Problembehandlingskompetens
- Resonemangskompetens
- Representationskompetens
- Symbol- och formalismkompetens
- Kommunikationskompetens

### *Högskolornas åtgärder för att möta problemen*

En rad förändringar har vidtagits vid flera av matematikinstitutionerna för att möta problemen. Det gäller omstrukturering av kurserna, införande av nya kurser, förändring av mål och innehåll och stödinsatser av olika slag. Alla institutioner har ännu inte genomfört förändringar. En orsak till det kan vara dålig framförhållning och ett allmänt trögrörigt system. I vissa fall anser man inte heller det motiverat att anpassa studierna vid högskolan, utan avvaktar en förbättring genom förändringar på gymnasienivå.

Ett exempel på nya initiativ är Umeå universitet som genomfört ett helt åtgärds paket. Ett viktigt inslag är en differentiering i val av kurs efter rådgivning utifrån resultaten på förkunskapstestet i matematik. Antingen läser studenten en kurs som stärker grunderna eller startar man med ordinarie programmet. Resultatet är alltså en differentiering av innehåll och i tid. Detta gäller studenterna som läser fristående kurser i matematik.

Ett exempel från Göteborgs universitet är en introduktionstermin innehållande enbart matematik, som riktar sig till studenter från NV-programmet, som känner sig osäkra och vill öka sina möjligheter att klara kurserna. Programmet har funnits sedan början av 90-talet och fungerar väl enligt utsago (muntlig ref). Den innehåller en kombination av fördjupad gymnasie matematik och introduktion till de ordinarie kurserna.

Stockholms universitet erbjuder en nätbaserad 5-poängskurs som rekommenderas som sommarkurs före studiernas början, men som även kan läsas parallellt med studierna under första året. Innehållet är inriktat på grundläggande matematiska begrepp, även sådant som tillhör grundskolan, men ur ett ”högre” perspektiv, till exempel taluppfattning och algebra.

Linköpings universitet har infört en introduktionskurs på alla ”långa” program (civilingenjör, matematikprogrammet och fysikprogrammet) som överbryggar från gymnasiekunskaperna.

Resultaten är positiva, åtminstone på vissa håll. Det kan vara svårt att mäta effekten.

Vid andra institutioner har man också infört stöd för att hjälpa studenterna med matematiken. Vid de flesta utbildningar i nationalekonomi (behörighetskrav oftast ma C från gymnasiet) finns frivillig eller obligatorisk stödundervisning. Vid exempelvis ekonomiprogrammet i Lund finns en poänggivande kurs i matematik för nybörjarna som införts för några år sedan. Resultatet är mycket positivt. Från andra håll rapporteras att vissa utbildningar anpassar sin nivå och avstår från inslag i kurser eller kurser som kräver litet mer matematik och statistik, t ex ekonometri. Det får som konsekvens att utbildningens kvalitet minskar i något avseende.

### *Gymnasiets åtgärder för att möta problemen*

I kursplaneöversynen år 2000 utökades poängtalet i matematik A-E från 300 till 400 poäng med ökningen koncentrerad till kurserna C och D. (Timalet ökades inte i motsvarande omfattning.) Samtidigt infördes en ny inriktning, matematik-data, med större innehåll av matematik. De första eleverna som lämnade gymnasiet med denna nya kursplan är de som slutade gymnasiet våren 2003. De studenterna har inte kommit till högskolan i någon större utsträckning ännu. Enligt den kartläggning som vi låtit göra är det en ganska liten del av 19-åringarna som påbörjat sina högskolestudier. I nybörjartestet från KTH syns dock ingen förbättring i 19-åringarnas resultat. Man får också hålla i minnet att man inte kan dra slutsatser från testen vid högskolan om resultaten i gymnasiet, eftersom populationen inte är densamma.

En del gymnasier erbjuder valbara kurser för elever som siktar på högskolestudier i matematik och som vill förbereda sig på bästa sätt. Vi har individuella berättelser om att sådana kurser fungerar bra som förberedelse för studenter med skiftande bakgrund. Av Umeås nybörjare år 2003 hade cirka 25% läst någon matematikkurs utöver matematik A-E t ex diskret matematik, matematik breddning eller Matematik F. Vi har inte kunnat undersöka om den andelen är representativ för hela gruppen nybörjare.

Dessa förstärkningar har sannolikt hjälpt många studenter till en bättre start vid högskolan.

### *Ett speciellt problem vid övergången – hjälpmedelskompetensen*

De tekniska hjälpmedel som används i gymnasiet och högskolans matematikutbildningar är miniräknare och datorer. Miniräknare finns med eller utan möjligheter till grafik. Symbolhanterande miniräknare finns numera också att tillgå. För datorer finns en rad program, dels sådana som utvecklas för undervisningsändamål (Derive, Geometer's Sketchpad, Cabri m fl), dels sådana som används professionellt av matematiker och andra (Maple, Matlab och Mathematica). Även kalkylprogrammet Excel kan användas i samband med matematisk modellering, med möjligheter att programmera in formler och att illustrera grafer. Naturligtvis finns också andra mer specialiserade program för avancerad professionell användning och mängder av speciella undervisningsprogram.

Kunskaperna i att använda ett elektroniskt verktyg innehåller två sidor. Det handlar dels om att lära sig behärska själva *verktyget*, dels om att utveckla verktyget till ett *instrument för lärande* i matematik. Steget från det första till det andra kallas i didaktisk litteratur för *instrumentalisering*. Målet med användningen är därmed tvåfaldigt, dels är det ett mål att kunna hantera tekniska hjälpmedel, dels innebär hjälpmedlet rätt använt en tillgång i lärandet av matematiken.

På gymnasiet och grundskolan har utvecklingen kommit längre än i högskolans grundkurser. Miniräknare av olika slag används systematiskt i skolan. Det är tydligt utsagt i styrdokumentet att eleverna ska lära sig arbeta *med och utan miniräknare*. Att användningen kan stärka lärandet och förståelsen för vissa begrepp visas i en undersökning av Thomas Bergqvist (2001). Men många elever använder hjälpmedlet på ett sätt som hindrar förståelsen. Använd på fel sätt kan miniräknare hindra begreppsförståelse och bidra till en osäker taluppfattning. Ett pedagogiskt och didaktiskt utvecklingsarbete pågår vid gymnasier för att rätta till detta, men fortfarande finns brister.

På högskolan möter man ofta attityden att hjälpmedlet försämrar lärandet och därför förbjuds de i de inledande kurserna för att komma till användning längre fram i fortsättningskurser och i forskning. Skepsisen från högskolan inför användning av miniräknare har en grund i att en del elever har lärt sig att använda räknaren på ett sätt som inte stöder lärandet. Eleverna använder miniräknaren som en ersättning och inte som stöd för begreppsbyggnaden.

För studenterna innebär denna inställning från högskolan ett stort problem, genom att de plötsligt inte längre får använda ett hjälpmedel som de vant sig vid att uppfatta som naturligt. Kurserna vid högskolan bör starta utifrån studenternas uppfattning och nivå, tillåta miniräknare och datorer i viss utsträckning och vänja studenterna att arbeta på ett effektivt och kritiskt sätt med miniräknare och dator som instrument för lärande.

Hjälpmedelskompetensen bör stärkas på ett sådant sätt att datorn (miniräknaren) blir ett instrument för lärande i matematik. Vid högskolan bör man inte helt förbjuda hjälpmedlet i den inledande undervisningen som nu ofta sker, utan istället utveckla en didaktiskt motiverad integration av dessa hjälpmedel i matematikutbildningen.

Enligt tidigare kapitel anser vi också att kurserna vid högskolan bör också i större grad innehålla hjälpmedelskompetensen (båda aspekterna) som ett mål. Detta är ett rimligt krav med tanke på den stora betydelse som de tekniska hjälpmedlen har för alla matematiker och tillämpare av matematik.

### *Samarbete gymnasium – högskola*

Ett ökat samarbete mellan gymnasier och högskola är under utveckling. Högskolor anordnar gymnasiedagar där matematiken syns, det finns samarbete omkring valbara kurser i gymnasiet, några lärare delar sin tjänst mellan gymnasium och högskola. Men många gymnasier har ingen kontakt med högskolans matematikinstitutioner och många institutioner prioriterar inte arbetet med gymnasiekontakter. Förstärkning av denna utveckling är nödvändig för en kontinuerlig anpassning

mellan gymnasium och högskola. Lärarorganisationer och matematikersamfundet har ett stort ansvar för att goda kontakter utvecklas mellan matematiklärare på olika nivåer.

### *Förslag*

Den strukturförändring av gymnasiets matematikkurser som vi föreslår är enligt vår bedömning det viktigaste förslaget som på lång sikt kommer att förbättra anpassningen mellan gymnasium och högskola (se tidigare avsnitt). Syftet med den omstruktureringen är att anpassa innehållet i gymnasiet till kraven vid fortsatta studier, och till varierande krav beroende på inriktning av studierna.

Många studenter upplever ett stort glapp mellan sina kunskaper och de som förväntas i studiestarten och får inget adekvat stöd. Vi föreslår därför fortsatta satsningar vid högskolans inledande matematikkurser i enlighet med tidigare utredningar: differentiering av studietakt och innehåll, speciella överbrygningskurser, terminslånga program enbart i matematik och olika former av stödprogram. Flera av dessa förslag är inte genomförda annat än vid vissa institutioner. Förslagen är av utomordentligt stor vikt på kort sikt, men enligt vår bedömning också nödvändiga på lång sikt. Inte ens med en reformerad gymnasieskola kan man i framtiden räkna med annat än stor variation i nybörjarnas kunskaper, deras attityder till studierna, deras motivation och deras studieteknik.

Vi föreslår att nätuniversitetet och universitet och högskolor i samverkan erbjuder ett väsentligt större utbud till studenterna att i flexibel form och på distans läsa kurser som förbereder för högskolestudier och stärker matematikkunskaperna från skolan.

### *Förslag i punktform*

- Förändring av *strukturen och innehållet i gymnasiets kurser* i matematik enligt kapitlet om gymnasiet
- Förnyat system för behörighet och antagning till högskolan som uppmuntrar eleverna att skaffa sig god matematisk kompetens innan de söker till högskolan (se tidigare avsnitt)
- Gymnasierna bör fortsätta erbjuda speciella valbara högskoleförberedande kurser i matematik eller starta sådana
- Flexibla *överbrygnadsprogram* i matematik vid högskolan för studenter som behöver stärka sin kompetens från gymnasiet och påbörja högskolestudier i lugn takt: från sommarkurser på fem poäng till terminslånga kurser. Sådana kurser bör riktas även till NV-studenter.
- Universitet och högskolor bör i samverkan med Nätuniversitetet och utveckla ett utbud av *distanskurser* av överbrygnadskaraktär
- Högskolorna bör införa *differentiering* i de inledande matematikkurserna i innehåll, omfång och/eller undervisningsformer för att anpassa kurserna till studenternas varierande förkunskaper.
- Ökad *samverkan mellan gymnasieskolan och högskolorna* för ökad kunskapsutbyte och samarbetsprojekt inom matematikutbildningen
- Utveckla *användningen av miniräknare och datorer* på ett didaktiskt motiverat och effektivt sätt i högskolans grundkurser och på gymnasiet. Miniräknare (och dator) måste användas på ett sätt som inte leder till försämrade begreppsförståelse
- Stödverksamhet av typen *matematiksupport/räknestugor* vid de institutioner som ger matematikkrävande kurser för nybörjare
- Ökad *samverkan mellan matematikinstitutioner och andra institutioner* för att stödja studenter med bristande matematikkunskaper

## Kapitel 7 Forskarutbildning i matematiska ämnen

### *Utvecklingen under de senaste åren*

Forskarutbildningen i matematiska ämnen<sup>1</sup> har under de senaste decennierna både breddats ämnesmässigt och vuxit i omfattning. Breddningen och den huvudsakliga expansionen har skett inom olika tillämpningar av matematik, t ex tillämpad matematik, matematisk statistik och nu de senaste 5 åren matematikdidaktik. Under en femårsperiod mellan 1996 och 2001 ökade t ex antalet aktiva doktorander från 330 till 395 (20% ökning), antalet nyregistrerade doktorander från 66 till 97 (47%), antalet doktorsexamina från 31 till 41 (32%). Under samma tid ökade även andelen kvinnliga doktorander från 16.8% till 24.3% (Källa: SCB, samtliga siffror).

Finansieringen av utökningen av forskarutbildningen under perioden beror till största delen på en växande extern finansiering och inte genom ökade anslag från fakulteterna. Ett växande antal samarbeten med industrifinansierade doktorander pågår och till detta kan läggas de två forskarskolorna "Matematik och beräkningsvetenskap" och "Matematik med ämnesdidaktisk inriktning" vilka tillsammans förklarar varför andelen externfinansierade doktorander vuxit. Även strategiska forskningsstiftelsen stöder genom nätverket för tillämpad matematik (NTM) doktorander. En ögonblicksbild gjord genom utskick till de stora högskolornas prefekter vid matematiska institutioner visar att bland dem som disputerade året 2002 (46 till antalet) var hela 24 (52%) finansierade med externa medel.

Genomströmningen är svårare att belysa med befintlig statistik, men om man, för att minska fluktuationerna tittar på dem som nyregistrerades under en treårsperiod och som haft möjlighet att doktorera på idealtid (5 år) senast under läsåret 01/02 finner man följande. Antalet som nyregistrerades 94/95-96/97 var 195. Antalet som disputerade under perioden fem år senare 99/00-01/02 (alltså inte nödvändigtvis bland dessa 195) var 121 (vilket är 62% av 195). En dylik jämförelse innehåller förstås mycket osäkerhet men ger nog ändå en ungefärlig bild av genomströmningen. Tydligt är hur som helst att det finns ett icke oväsentligt frånfall. Av dessa avlägger dock en stor del licentiatexamen och slutar därefter, något som inte skall ses som ett misslyckande.

Att ämnet har breddats är svårare att belysa i siffror. I takt med att antalet industrifinansierade doktorandanställningar tilltar växer dock antalet doktorander i de tillämpade delarna av ämnet (bl a tillämpad matematik, finansiell matematik, bioinformatik och matematisk statistik). Ämnet matematikdidaktik har dessutom tillkommit som forskarutbildningsämne.

### *Vad gör en forskarutbildad matematiker?*

Traditionellt har en stor andel av disputerade i matematiska ämnen stannat inom högskolan. Tidigare utgjorde även gymnasier en stor arbetsmarknad genom lektorstjänster, men dessa anställningar har i praktiken upphört sedan över ett decennium. Inom näringsliv och myndigheter har den teknologiska industrin anställt disputerade matematiker, liksom militär och försvarsindustri, telekom-industrin, banker, försäkringsbolag och läkemedelsindustrin. I takt med att antalet disputerade ökat det senaste decenniet har andelen disputerade som hamnar utanför högskolorna också ökat. En ögonblicksbild som belyser denna frågeställning är att bland de 46 personer som disputerade i matematiska ämnen vid de stora högskolorna under 2002 jobbade redan 21 (46%) utanför högskolan. Internationellt är disputerade matematiker mycket attraktiva på arbetsmarknaden varför en fortsatt trend mot att allt fler disputerade väljer att arbeta utanför högskolan kan förväntas.

### *Brister inom forskarutbildningen enligt olika utredningar*

Forskarutbildningen i matematiska ämnen i Sverige har bl.a. utretts av Högskoleverket (Utvärdering av matematikutbildningar vid svenska universitet och högskolor, 2002) och från ett

<sup>1</sup> I Högskoleverkets databas ingår i de matematiska ämnena följande: Matematik: Algebra, geometri och analys m fl, Tillämpad matematik: Matematisk statistik, Numerisk analys, Optimeringslära, Teoretisk datalogi m fl, Övrig matematik

doktorandperspektiv i Doktorandspegeln (Högskoleverket, 2003). Forskarutbildningen ges ett i huvudsak gott betyg. De brister som nämns och förslag på åtgärder som föreslås kan grovt indelas i två huvudområden. Det ena är att utbildningens innehåll måste breddas. Moment som muntlig och skriftlig träning, beräkningar med datorer, projektarbeten, vetenskapsteori, undervisningspedagogik, träning i att söka anslag m.m. bör ges ett ökat utrymme. Det andra området är att alltför stor del av forskarstudierna består av enskilt arbete. Man föreslår i stället att arbete i grupp skall bli vanligare, såväl mellan doktorander, ökade kontakter med handledare, att bihandledare införs som regel, och att forskarlag bildas. Högskoleverket påpekar även att styrdokumentet "Individuell studieplan" bör utvecklas och användas i väsentligt utökad grad för att utvärdera rätta till eventuella problem under forskarutbildningens gång. Liknande synpunkter fördes även fram när arbetsgruppen (11-H) genomförde gruppdiskussioner med ett 30-tal doktorander vid matematikersamfundets höstmöte 2003.

Kritiken som framförs blir än mer relevant i takt med att andelen som arbetar utanför högskolan efter disputation förväntas öka. Denna trend gör även att själva matematikinnehållet bör förändras inom delar av den matematiska forskarutbildningen. Forskarutbildning (eller "doktorsutbildning" som Forskarutbildningsutredningen väljer att kalla den) som speciellt vänder sig till stora yrkesgrupper så som gymnasielektorer, men kanske även matematiker inom myndigheter och företag med samhällsvetenskaplig profil, bör inrättas på sikt.

### *Jämställdhet*

Trots att andelen kvinnliga doktorander ökat från 16.7% till 24.3 % mellan 1996 och 2001 är denna andel fortfarande på tok för låg. I Doktorandspegeln indelning i 11 huvudämnesområden är matematik i själva verket det ämne med minst andel kvinnor (tillsammans med Teknikvetenskap). Det lite grova mått på genomströmning som omnämns kapitlets utvecklingsavsnitt visar även här på skillnader. Under perioden 94/95-96/97 nyregistrerades 195 doktorander varav 34 kvinnor. Antalet som disputerade 5-årsperioden senare var 121 men av dessa var endast 13 kvinnor. Antalet som disputerade 5-årsperioden senare var således bara 38.2% medan motsvarande siffra för männen var 67.1%. Detta tyder på att andelen kvinnliga som slutar före disputation är klart större än för män. Förklaringar till detta kan säkert variera, men Doktorandspegeln ger vid handen att kvinnliga matematikdoktorander tenderar att trivas sämre på sina arbetsplatser och känner sig oftare särbehandlade. Att skapa en bättre social miljö för kvinnor är därför av största vikt för att andelen kvinnor som disputerar i matematiska ämnen skall öka, något som också påpekas i Doktorandspegeln.

### *Goda exempel*

Forskarutbildningen i Sverige håller generellt hög kvalitet. Olika institutioner har lite olika profil och denna pluralitet är av godo. Det är förstås svårt att framhålla enskilda institutioner, men i högskoleverkets utredning framhålls Luleå Tekniska högskola för dess speciella strukturering med forskarlag. Utöver forskningsledaren består denna av fler disputerade och en grupp doktorander i olika stadier.Handledningen sker mellan alla nivåer vilket även ger träning i handledning. Man har i Luleå också ett uttalat önskemål att doktoranden skall vistas del av sin doktorandtid vid annat lärosäte, oftast utomlands. Liknande forskarlag finns vid andra lärosäten men kanske inte lika genomgående.

### *Handledning*

Doktorandspegeln, liksom arbetsgruppens möte med ett 30-tal doktorander vid matematikersamfundets höstmöte, ger vid handen att doktoranderna på det hela taget är positiva till handledningssituationen. Likväl anser en del att de får för lite handledning och att det kan kännas utlämnande att ha en handledare. Att bihandledare införs som regel, och att mer forskarlagsliknande verksamhet införs kan till viss del råda bot på dessa problem. Att flertalet handledare saknar utbildning i att handleda bör heller inte bortses ifrån. Det är först under de senaste åren som handledarutbildningar införts på bred front vid svenska lärosäten och att

handledare bereds plats och ges möjligheter att delta i denna viktiga kompetensutveckling är viktigt.

### *Framtida behov*

Det kommande 10-15 åren kommer högskolorna i Sverige ha ett mycket stort behov av att nyanställa lektorer/professorer. Mängden nydisputerade täcker inte detta behov ens om man räknar optimistiskt med en fördubblad volym på forskarutbildningen (Källa: Högskoleverket, "Det framtida behovet av lärare vid universitet och högskolor", 2003). Självklart kan, och bör, en del av detta underskott täckas av personer med examen från andra länder, men omvänt kommer ju även svenska disputerade också söka arbete i andra länder. På lite längre sikt kan Sverige inte förlita sig på att fylla behovet av lärare/forskare vid svenska högskolor med ett stort nettointflöde av disputerade matematiker. Andelen disputerade som söker jobb utanför högskolan förväntas också öka framgent. Slutligen anser Matematikdelegationen att gymnasierna bör börja anställa lektorer med forskarutbildning igen.

### *Bolognaprocessen*

Bolognaprocessens förslag med utbildningsnivåer på 3 år (motsvarande nuvarande kandidatnivå) följt av 2 år till internationell magisterexamen och därefter en 3 årig forskarutbildning till doktorstitel ändrar till viss mån strukturen på nuvarande forskarutbildning. Troligen försvinner lic-examen medan kraven för magisterexamen höjs, bl a med en mer omfattande uppsats. Syftet med Bolognaprocessen är bl.a. att underlätta för studenter att studera olika nivåer i olika länder.

### *Förslag på åtgärder*

Den enskilt viktigaste åtgärden är att forskarutbildningen i matematik måste öka kraftigt och detta snarast. Detta motiveras av att behovet av lärare/forskare vid högskolor ökar kraftigt, att skolorna bör anställa fler gymnasielektorer i matematik och den fortsatta trenden att disputerade matematiker blir alltmer efterfrågade i arbetslivet utanför högskolan. Denna volymökning förutsätter förstås att statsmakterna väsentligt ökar stödet till doktorandanställningar i matematik. En specifik sådan insats är att forskarskolan Matematik med ämnesdidaktisk inriktning permanentas. Disputerade från denna forskarskola ger bl.a. ett viktigt tillskott med potentiella gymnasielektorer och matematiklärare vid lärarhögskolor. En positiv effekt av forskarskolan i Matematik med ämnesdidaktisk inriktning är också att samarbetet mellan matematikinstitutioner och lärarutbildningsinstitutioner ökar, något som i sig är mycket viktigt.

Parallellt med att volymen på forskarutbildningen ökar är det viktigt att forskarutbildningen breddas och differentieras. Forskarutbildningen bör innehålla mer arbete i grupp och ge mer träning i andra färdigheter så som muntlig och skriftlig kommunikation, projektarbeten m.m. En motsvarande utveckling kan förutses i andra länder, till exempel USA enligt Chan (2003).

Ett mål för matematikutbildningarna vid svenska högskolor bör vara att snabbt förbereda sig för Bolognaprocessen. Ett viktigt mål där bör vara att starta attraktiva magisterutbildningar som levererar goda matematiker till näringsliv och myndigheter men även utgör en god rekryteringsbas för forskarutbildningen.

### *Förslag i punktform*

- En väsentligt ökad finansiering av forskarutbildningen från statsmakterna
- En breddning av forskarutbildningen (mer professionsträning och fler inriktningar)
- Ökad rekrytering av kvinnliga doktorander och förbättrad social miljö för dessa
- Forskarskolan i matematikdidaktik får fortsätta (med statlig finansiering)
- Obligatorisk handledarutbildning för handledare
- Lärarutbildningsinstitutioner och matematikinstitutioner samarbetar om att utveckla matematikdidaktisk forskarutbildning

## Kapitel 8 Kompetensutveckling

Nationella och internationella undersökningar rörande skolan är överens om att följande faktorer kan betraktas som centrala för att främja lusten att lära matematik hos eleverna och därmed förutsättningarna för dem att utveckla sin kompetens i matematik:

- Förståelse för matematiska begrepp och samband
- Tilltro till den egna förmågan
- Matematiken sedd i ett sammanhang
- Varierad undervisning
- Delaktighet och påverkan i undervisningen
- Varierad och relevant återkoppling från läraren
- Tid och arbetsro under lektioner och för hemarbete

Olika undersökningar visar att läraren är den enskilt viktigaste tillgången för att skapa de goda förutsättningarna enligt ovan. I Skolverkets (Skolverket, 2003) rapport skriver man

Lärarens engagemang och förmåga att motivera, inspirera och kunna förmedla att kunskap är en glädje i sig är central.

I en annan kunskapsöversikt från Skolverket framhålls att lärarkompetensen, såväl lärarens ämneskompetens och pedagogiska kompetens, är den enskilda resurs som har störst betydelse för elevers resultat. Att minska antalet elever per lärare ledde enligt denna rapport till mindre förbättring av resultaten än resursinsatser i form av utbildning av lärare, lärarerfarenhet och lärarlön (Skolverket, 2002). Grundtanken är att höjd lärarkompetens kommer att höja elevernas resultat.

### *Lärarkompetens*

Lärarkompetens är inte någon enkel eller väldefinierad företeelse. Den är snarare ett samspel mellan följande självständiga kompetenser:

- ämneskompetens
- pedagogisk och didaktisk kompetens
- kompetens i bedömning av elever

Ingen av dessa faktorer är ensam avgörande för att uppfylla kraven på en meningsfull inlärningsmiljö eller för att elever ska bli motiverade att lära sig matematik. Det krävs att läraren besitter alla kompetenserna.

### *Kompetensutvecklingsprogram för lärare*

Tidigare utredningar och forskning visar att kompetensutveckling måste uppfylla vissa kriterier för att ge effekt i lärarnas undervisning. Ett exempel är följande kriterielista från ett stort amerikanskt program (Jones et al, 1994):

- Lärare måste involveras i planerandet och utförandet av programmet.
- Program måste pågå i flera år och inkludera både sommar- och läsårsaktiviteter, samt fokusera både på ämnesinnehåll och metoder.
- För att försäkra sig om att ny kunskap integreras med undervisningspraktik, måste delar av programmet vara skolbaserat.
- En verklig förändring måste bygga på att lärare reflekterar och utvärderar sig själva.
- Erfarna lärare med potential att bli bra ledare bör få speciella ledarskapsuppgifter

I arbetsgruppen ser vi också möjligheter att arbeta delvis annorlunda. Vi anser till exempel att kurser i matematik kan vara motiverade utan att knytas direkt till undervisningspraktiken. Men avgörande är att lärarna själva är med och styr programmet. Det finns goda svenska exempel på kompetensutvecklingsprogram som lärare uppskattar och som får många deltagare. Ett sådant exempel är de kurser vid Högskolan i Kristianstad där kommuner i regionen samarbetat med högskolan för att ge lärare möjligheter att delta i poänggivande högskolekurser i matematikdidaktik med lyckat resultat och stort deltagande.

### *Högskolans ansvar*

I rapporten *Lärarytelse* (Grevholm, 2002) argumenterar författaren till rapporten, som ingår i projektet *Hög tid för matematik*, för att högskolan bör ta ansvar för att utveckla kurser och organisera lärarnas kompetensutveckling. Hon skriver under rubriken *Varför bör universitet och högskolor vara anordnare av kompetensutveckling?* följande:

Kurser på universitet och högskolor kan förväntas hålla hög akademisk kvalitet och ges av specialister. För de deltagande lärarna resulterar kursen, förutom i kunskaper som kan användas i undervisningen, i en dokumenterad kompetensutveckling i form av akademiska poäng som kan vara till nytta både i löneförhandlingar och vid fortsatt meritering.

...

Lärarytelsen ska bygga på en vetenskaplig grund och behovet av att stärka forskningsanknytningen har debatterats sedan 1988. Självklart måste då även kompetensutvecklingen av lärare vara forskningsanknuten och hålla åtminstone samma kvalitet som den grundläggande lärarytelsen. (sid 29)

Arbetsgruppen instämmer i att kompetensutvecklingsprogram i första hand bör erbjudas i form av högskolekurser.

### *Lärarkompetens, kartläggningar*

Arbetsgruppen har låtit genomföra tre undersökningar för att kartlägga den aktuella kompetensen och önskemålen om kompetensutveckling bland matematiklärare på gymnasiet och vid högskolan. När det gäller gymnasiet har kartläggningen skett i samarbete med arbetsgruppen för lärarytelse. SCB har genomfört en enkätundersökning bland gymnasielärare (bilaga 4, 5 och 6). När det gäller högskolan så har arbetsgruppen uppdaterat en undersökning som gjordes av högskoleverkets bedömargrupp. Uppdateringen skedde med hjälp av en förfrågan till studierektorerna. Dessutom har vi låtit genomföra en mindre enkät till enskilda högskolelärare, genom förmedling av studierektorerna på några utvalda institutioner. Nedan finns en kort sammanfattning av resultaten i de tre undersökningarna. Utförligare sammanställningar återfinns i bilagor.

### *Kompetensutveckling, gymnasiet*

Lärarna fick i kartläggningen fråga om vilken kompetensutveckling de helst önskar och fick välja ett av fyra alternativ. Alla områden prioriteras högst, ämnesteorin av 21% av de hela gruppen, ämnesdidaktik av 31% och integrerade kurser/program med både ämnesteorin och ämnesdidaktik av 32%. 15% av lärarna prioriterade andra alternativ. Slutsatsen blir att lärare bör erbjudas kompetensutveckling av olika slag, beroende på individuella behov och på skolans och kommunens behov. Program bör som idag erbjudas av högskolornas institutioner för lärarytelse och för matematik och av regionala kompetenscentra. Ett samordnat program bör utvecklas, så att alla skolor får tillgång till erbjudanden om kurser och kortare program på nära håll eller som distansutbildning.

Behovet är stort räknat i antal personer. Antalet lärare som i gymnasiet undervisar i matematik kan enligt enkäten uppskattas till cirka 4700. Av dem saknar en tredjedel den grundläggande utbildningen. Den gruppens behov är i första hand mer omfattande utbildning för att skaffa sig en grundläggande kompetens. Hela den övriga (de "behöriga" lärarna) bör erbjudas systematisk och långsiktigt kompetensutveckling inom matematik och matematikdidaktik.

### *Forskarutbildning*

Det är ytterst intressant att många lärare enligt enkätsvaren är intresserade av en forskarutbildning. Så många som 68 svarande bland enkätens cirka drygt 300 svarande är intresserad av den möjligheten. Cirka 40% är intresserade av matematikdidaktik som forskningsområde, cirka 15 % av matematik och resten av ett annat ämne. Generaliserat till hela populationen skulle det motsvara drygt 20 %, eller över 1000 gymnasielärare. Hur seriöst intresset är kan vara svårt att bedöma och man skulle behöva komplettera med en intervjuundersökning för att få bättre förståelse för vilka



villkor som är förknippade med denna önskan. Något fler tänker sig en licentiatexamen än de som uppger doktorsexamen som målet.

Högskolorna bör utveckla forskarutbildning inom områden som intresserar lärare, förutom matematik och matematikdidaktik kan tillämpad matematik och matematikhistoria vara angelägna. Licentiat- och magisterprogram (enligt Bolognamodellen) bör erbjudas vid sidan av fullständig forskarutbildning som siktar till doktorsexamen.

Mot bakgrund av det stora intresset för forskarutbildning bör fler möjligheter öppnas för lärare att på deltid och med stöd från kommunen genomgå forskarutbildning, åtminstone till licentiatexamen.

### *Kompetensutvecklings, högskolan*

Liksom vid gymnasiet så borde det vara en självklarhet att lärare vid högskolan får ta del av kompetensutveckling på ett systematiskt och långsiktigt sätt. För lärarna vid högskolan består kompetensutvecklingen till en del av deras egen forskning, och alla forskarutbildade lärare bör ha möjlighet till viss del forskning i sin tjänst. Så är det enligt nu gällande avtal, men alla lärare får inte den möjligheten. Utöver detta måste det finnas utrymme för pedagogisk och didaktisk kompetensutveckling. Den delen gäller naturligtvis alla lärare, och borde också gälla dem med tidsbegränsad anställning eller timanställning.

Numera sägs i högskoleförordningen att alla lärare ska ha en grundläggande pedagogisk utbildning med inriktning mot högskolan. Det är den grund man kan förutsätta för de fast anställda lärarna. Också doktorander kommer troligen i hög utsträckning genomgå pedagogisk utbildning inom ramen för sin utbildning.

Institutionerna bör ta initiativ till att även matematikdidaktiken kommer med i den grundläggande utbildningen för adjunkter, lektorer och doktorander. Tidpunkten är lämplig eftersom universitetet just är i färd med att utveckla dessa kurser.

Enligt den enkät som arbetsgruppen låtit genomföra bland lärare vid matematikinstitutionerna finns ett intresse för att delta i kompetensutveckling. Även om undersökningen är liten, och inte kan generaliseras tyder den på att intresset är relativt stort. 60% önskade kompetensutveckling och av dem är en tredjedel intresserade av matematikdidaktik. Resten anger matematik eller tillämpad matematik och kan eventuellt avse egen forskning. Intresset finns alltså för didaktiken, men det är en relativt liten andel som prioriterar det området. Bland dem som är verksamma i forskarutbildningen är det endast 25% som önskar delta i handledarutbildning.

Intresset för kompetensutveckling inom matematikdidaktik finns alltså, men det är anmärkningsvärt lågt med tanke på dels att undervisning är en huvuduppgift för dem som svarar på enkäten, dels att man kämpar med stora svårigheter i grundutbildningen. Ett rationellt förhållningssätt kunde ju då vara att man önskade skaffa sig en större repertoar och en större förståelse för hur svårigheterna uppkommer och kan mötas.

Arbetsgruppen föreslår att lärarna erbjuds kompetensutvecklingsprogram inom matematikdidaktik, med speciellt fokus på frågor om lärande, undervisning, examination, kompetensbegreppet, innehållsfrågor och samverkan med gymnasiet.

### *Förslag i punktform*

- *Kompetensutvecklingsprogram* ska erbjudas lärare vid *gymnasieskolan*
- Programmen bör vara *långsiktiga* och planerade utifrån den lokala situationen och utformas utifrån ett bottom-up-perspektiv.
- NCM bör prioritera en utveckling av ett *regionalt kontaktnät*, via en fungerande organisation t ex med hjälp av RUC (regionala utvecklingscentra) eller lärarutbildningsinstitutioner. Uppbyggnaden bör ske i samverkan med myndigheten för skolutveckling och skolverket.
- En reformerad gymnasieutbildning enligt arbetsgruppens förslag måste åtföljas av ett omfattande kompetensutvecklingsprogram med inriktning på nya kurser och arbetsätt

- Högskolorna bör utveckla *fler kurser inriktade på kompetensutveckling* och livslångt lärande riktade till lärare i skolan och andra. Kompetensutvecklingen ska erbjudas gymnasielärare i både *matematik och matematikdidaktik*, gärna i form av integrerade kurser
- Högskolorna bör erbjuda doktors- och licentiat- alternativt magisterprogram (enligt Bologna-modellen) inom matematikdidaktik och andra matematiska ämnen riktade till lärare i gymnasiet.
- *Kompetensutvecklingsprogram* i matematikdidaktik bör utvecklas för lärare och doktorander vid *högskolan*. Alla lärare bör ges utrymme för kontinuerlig kompetensutveckling, både ämnesmässigt och i matematikdidaktik.

## Kapitel 9 Jämställdhet och mångfald

Kapitlet kommer framförallt att handla om jämställdhet mellan kvinnor och män. Frågorna om mångfald berör vi kort i inledningen.

Rekrytering av studenter med icke-svensk bakgrund belyses av den kartläggning som delegationen beställt (Brandell, bilaga 3). Andelen studenter med utländsk bakgrund<sup>2</sup> som studerar matematik är lika stor som andelen av de svenska studenterna som väljer matematik. Det innebär att en eventuell underrepresentation av studenter med utländsk bakgrund som är bosatta i Sverige är ett generellt fenomen, och inte speciellt framträdande för matematikens del. Vi har inte kartlagt om det finns skillnader i studiemönster i övrigt, vilket mycket väl kan tänkas.

När det gäller lärare och forskare vid högskolan har vi skäl att anta att gruppen med utländsk bakgrund är betydande just vid de matematiska institutionerna. Det förklaras av att man ofta rekryterar internationellt till forskartjänster i matematik och att intresset för arbete i Sverige varit stort från matematiker från många länder med framstående forskningstraditioner inom matematik under de senaste 10 – 15 åren.

### *Vår vision: Matematik – ett jämställt ämne*

Det talas ofta om behovet av ”fler kvinnor inom matematiken”. Önskan om ett jämställt matematikämne har i själva verket två tydliga mål. För det första ett kvantitativt mål: att fler kvinnor söker sig till och stannar kvar inom matematikområdet. Här tar vår arbetsgrupp sin utgångspunkt i riksdagens målsättning, att båda könen ska uppgå till minst 40 %. Det andra målet är inte lika konkret till sin natur men förstås lika viktigt att uppnå: kvinnorna ska betraktas, och även betrakta sig själva, som självklara och fullvärdiga matematiker.

Våra förslag syftar till att undanröja hinder och uppmuntra kvinnor att läsa matematik på lika villkor och i lika hög utsträckning som män. Målet är att skapa en bra matematikutbildning för både kvinnor och män.

### *Andelen kvinnor inom matematisk forskning och utbildning*

I regeringens jämställdhetsproposition 1994/95:164 [1] konstateras det att utvecklingen mot ett jämställt utbildnings- och forsknings väsende går utomordentligt långsamt. Därefter föreslås en rad åtgärder för att påskynda processen. Propositionen ligger bland annat till grund för de så kallade Tham-professorerna. Denna engångsåtgärd har förbättrat siffrorna för universitetens högsta nivå, vilket i sin tur ska underlätta de långsiktiga insatserna för att nå slutmålet: ”en jämn könsfördelning på alla nivåer inom lärarkåren inom högskolans alla ämnesområden”.

Fortfarande sjunker dock andelen kvinnor snabbt när man rör sig uppåt inom Sveriges utbildningsväsen. År 2002 gällde att andelen minskar från cirka 50 % kvinnor på gymnasiet matematik C-kurs, till ca 30 % på universitetens grundutbildningar, 20 % inom forskarstudier i matematik, något lägre andel av de anställda vid matematikinstitutionerna när vi bottennoteringen med under 5 % kvinnor bland matematikprofessorerna.

### *Kvinnors och mäns deltagande och prestationer i gymnasiet*

Dagens gymnasieutbud innehåller, tvärt emot intentionerna då programgymnasiet infördes i början av 1990-talet, tydliga pojk- och flickutbildningar. Detta gäller främst för de mer yrkesinriktade programmen. På programmen Teknik och Naturvetenskap var andelen flickor i oktober 2001 knappt 10 % respektive drygt 40 % (Skolverkets rapport 218). Naturvetenskapsprogrammet är ett jämställt program och har varit så under hela 90-talet.

Statistiken visar tydligt hur kvinnors deltagande i matematiken avtar successivt från gymnasiet inledande matematikkurs (A-kursen) till de senare kurserna (E- och F-kurserna), se tabell I. Kvinnornas val beror inte på att de presterar dåligt i matematik, betygsskillnaderna är små och det finns ingen entydig bild. Betygsfördelningen i kurserna Matematik A, B, C, D och E hos de elever som fått slutbetyg från gymnasiet återfinns i bilaga 16. För exempelvis kurs A gäller att något

---

<sup>2</sup> Med utländsk bakgrund menas personer som är födda utrikes eller vars båda föräldrar är födda utrikes.

högre andel av pojkarna har IG och MVG. Betygsskillnaderna är små mellan könen för A, B och C-kurserna. På D- och E-kurserna har flickorna bättre betyg, men där gäller samtidigt att färre flickor har valt att läsa kursen.

**Tabell I.** Mäns och kvinnors deltagande i gymnasiets matematikkurser. Procenten anger andelen män/kvinnor födda 1982 med (minst) betyget godkänt på respektive kurs vid 20 års ålder. Siffrorna som ligger till grund för tabellen finns i referens [4] tabell 6.

Ma-kurs	Andel av alla	Andel av kvinnorna	Andel av männen
A	69 %	73 %	66 %
B	51 %	56 %	46 %
C	38 %	39 %	36 %
D	19 %	16 %	22 %
E	13 %	10 %	17 %

Två frågor infinner sig omedelbart: Varför försvinner kvinnorna (även de som har lätt för matematik)? Vad motiverar männen att fortsätta (även de som har lite svårare för matematik)?

I den rikhaltiga internationella forskningen om dessa frågor – till viss del även svensk – finns flera faktorer belysta, som klassrumsklimatet, läroböckernas och kursernas innehåll, lärarnas olika förväntningar på flickor och pojkar, pedagogiken och betydelsen av förebilder. Det är inte klart vilka av dessa faktorer som skulle kunna spela stor roll i Sverige idag. Troligen är alla av viss betydelse. Attityder till ämnet har undersökts i en nyligen genomförd studie.

### *Matematik i gymnasieskolan - ett könsneutralt ämne?*

En möjlig förklaring till kvinnors och mäns olika val när det gäller matematik är ämnets traditionellt manliga karaktär. I en ny enkätstudie inom projektet Kön och matematik [2] har man undersökt gymnasieelevers föreställningar om matematik som ett könsneutralt alternativt manligt eller kvinnligt område. I undersökningen ingick 550 gymnasieelever i år två vid NV och SP programmen. En majoritet av eleverna svarar att matematiken är könsneutral. Men en relativt stor minoritet (20–50 %) ger uttryck för könsrelaterade skillnader på flera av frågorna.

En betydande minoritet av *såväl män som kvinnor* anser till exempel att följande påståenden stämmer bättre på män än på kvinnor: ”Tycker om utmanande matematikproblem, Har matematik som favorit ämne, Tycker att matematik är lätt.” Båda könen uppfattar också kvinnor som flitigare på lektionerna, men samtidigt mindre matematikbegåvade än män. Den klassiska bilden av ”flickor som pluggar utan att skaffa sig riktig förståelse” lever alltså kvar både hos män och hos kvinnor i dagens gymnasieskola.

En betydande andel *kvinnor (men inte män)* svarar att kvinnor är mer oroliga för att inte klara sig i matematik, och (svag tendens) att de ger upp lättare än män.

*Män (men inte kvinnor)* svarar i högre utsträckning att det gäller för män att: ”Föräldrar tycker att det är viktigt att deras dotter/son lär sig matematik.”

Män och kvinnor svarar att läraren uppmuntrar båda könen i lika hög utsträckning.

I samband med enkätundersökningen intervjuades även ett antal elever. Intervjuanalyserna är ännu inte klara, men den aktuella rapporten ger flera intressanta exempel på uttalanden:

”När jag gjorde den där (enkäten) så tänkte jag nog inte riktigt på klassen jag tror jag tänkte mera på fördomarna. Det man tänker generellt. Vem är mest seriös? Tjejer. Killar driver mest runt.” (Man)

”Ibland tycker jag det är löjligt att någon snackar så mycket om jämställdhet för det är ju skillnad på tjejer och killar. Det är bara att inse det, alltså.” (Kvinna)

” Jag har alltid haft den bilden sedan jag började skolan att vi killar har tyckt det varit roligare med matte. Tjejer har tyckt det varit jättekul att sitta och skriva bokstäver och skriva snyggt och så har vi alltid varit lite matte och så här, kul att ligga först där.” (Man)

” Så kanske man hör ofta om vissa killar som är så här jätteduktiga på matte. Man hör kanske inte så där ofta att det finns någon speciell tjej som är så där superduktig på matte. .... Man tänker inte riktigt en kvinnlig matematiker. Tänker man matematiker så tänker i varje fall jag på en man.” (Kvinna)

När det gäller kön och matematik finns även en intressant amerikansk studie [4], där man undersökt hur föreställningar om könstereotyper påverkar elevers *beteenden* (som ju inte alltid överensstämmer med elevernas verbala beteenden). Studien visade att i kontrollgruppen, som skrev ett matematikprov under normala förhållanden, var kvinnorna sämre på att formulera strategier för matematisk problemlösning än männen. De studenter som ingick i försöksgruppen fick en extra rad i instruktionerna om att (det identiska!) provet var könsneutralt, och där presterade kvinnorna lika bra som männen! (Försöksledaren visste inte vilka elever som fick vilket instruktionsblad.) I kontrollgruppen försämrades alltså kvinnornas prestationer av en negativ stereotyp om kvinnor och matematik.

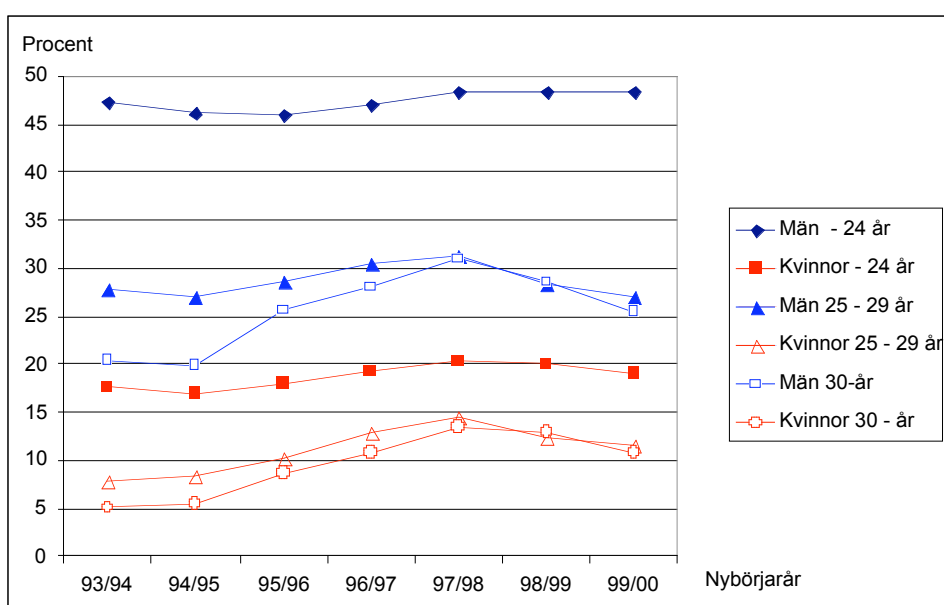
### Gymnasiekommitténs betänkande våren 2002

Gymnasiekommittén lämnade in sitt slutbetänkande till regeringen under våren 2002. De vill komma åt problemen med traditionella val genom att skapa bredare gymnasieingångar som ska intressera båda könen. Breda ingångar ska också ge en jämnare fördelning av elever med olika etnisk och social bakgrund. Den nya gymnasieskolans successiva val ska också öppna möjligheter för mer otraditionella kombinationer. I slutbetänkandet (s. 190) står bland annat ”Gymnasiekommittén har ambitionen att alla elever – oberoende av bakgrund – skall välja utbildning efter intresse och få det stöd de behöver för att framgångsrikt fullfölja sina studier.” Detta generella uttalande innefattar förstås också matematik och matematikintensiva ämnen.

### Jämställdhetsarbete vid svenska matematikinstitutioner

I en nygjord statistikstudie [4] beställd av matematikdelegationen, framkommer att den stora utbildningsreserven inom matematik finns bland landets kvinnor. Andelen kvinnor bland högskolestuderande som läst någon matematikkurs är cirka 20% medan motsvarande värde för männen är knappt 50%. De yngsta studenterna läser i högre utsträckning matematik, men ökningen under första hälften av 90-talet var starkast bland kvinnorna över 25 år.

**Diagram 1:** Andelen av högskolenybjörjarna ett visst läsår som läst minst en kurs i matematik inom tre år efter studiestarten.



Under våren 2002 presenterade Högscoleverket en utvärdering [5] av tjugo matematikutbildningar vid svenska högskolor och universitet. (Matematik inom ingenjörsk- och civilingenjörsutbildningarna ingick endast undantagsvis i utvärderingen.) I bedömningen togs viss hänsyn till institutionernas jämställdhetsarbete, och man konstaterar i den sammanfattande inledningen att fler bra förebilder samt stöd och uppmuntran krävs för att öka andelen kvinnor inom matematikämnet. En kort redogörelse följer.

Enligt utvärderingen är andelen kvinnor vid de matematiska grundutbildningarna är ca 30 % på A- och B-nivå, en siffra som sjunker på C- och D-nivå. Det finns dock exempel på motsatsen, inom matematisk statistik vid Chalmers/GU är andelen kvinnor hela 67 % vid de högre kurserna. Könsfördelningen hos de undervisande lärarna vid institutionerna beskrivs som pyramidformad, med en bas av kvinnliga adjunkter och en topp av manliga professorer.

Några institutioner påpekar att de jobbar aktivt för att öka antalet kvinnliga studenter.

*Blekinge tekniska högskola:* Kvinnliga lärare reser runt i närliggande gymnasieskolor för att försöka öka antalet kvinnliga studenter. Dock görs inga särskilda satsningar för att rekrytera fler kvinnliga lärare.

*Göteborgs universitet/Chalmers tekniska högskola:* Bjuder in kvinnliga föreläsare. Anställer fler kvinnliga forskningsassistenter.

*KTH/SU Nada:* Har som uttalat mål att öka andelen kvinnor såväl vid grundutbildningen som bland forskarstuderande och lärare.

*Luleå tekniska högskola* lyfts fram som ett gott exempel på hur pedagogisk förnyelse inom forskarutbildningen upplevts som positivt av både män och kvinnor. Matematikinstitutionen har utarbetat en ny form av handledning där de forskarstuderande ingår som del i ett forskningslag. Denna form har visat sig framgångsrik för att rekrytera och behålla kvinnor i forskarutbildningen. Modellen får dock viss kritik för att vara uppbyggd kring en professor. En spridning av huvudhandledningen skulle minska systemets sårbarhet. Institutionen hoppas kunna internrekrytera fler kvinnor till lärarkåren på sikt.

*Mälardalens högskola:* Åtgärder för att rekrytera och behålla kvinnliga studenter. Mentorsystem för kvinnor i teknisk fysik och seminarier om jämställdhet inom naturvetenskaplig/teknisk utbildning. Ny kombinationen matematik/ekonomi som intresserar kvinnor.

*Umeå universitet (ma):* Stort antal aktiviteter för att öka trivseln bland de få kvinnor som finns i utbildningen, ex information om matematisk forskning och arbetsmöjligheter för matematiker. Männerna vid utbildningen känner sig nästan övergivna med anledning av detta och skulle också vilja ta del av sådan information.

*Umeå universitet (mat stat):* Kvinnliga lärare och studenter går ut aktivt för att inspirera kvinnor till matematikstudier. Bland annat i form av "tjejträffar". Detta har lett till en förhållandevis hög andel kvinnor bland studenterna. Man hoppas få fler kvinnor till lärarkåren genom intern rekrytering.

*Uppsala universitet (TDB):* Kvinnliga lärare och doktorander undervisar vid program med mansdominans. Har under senare år varit framgångsrika i att anställa kvinnliga doktorander. Deltar i det nybildade nationella Centrum för kvinnliga forskare i beräkningsvetenskap. Detta sker med medel från Uppsala universitets jämställdhetskommitté.

*Uppsala universitet:* Institutionen anser att en jämnare könsfördelning måste börja på grundutbildningen. Ny kombinationen matematik/ekonomi som intresserar kvinnor.

**Tabell II.** En sammanställning av könsfördelningen vid svenska matematikinstitutioner vid tiden för Högskoleverkets utvärdering, grundad på Tengstrands utvärdering [5]. Här ingår endast de institutioner där rapporten lämnar tillräckliga uppgifter om könsfördelningen på alla nivåer. Procenttalen anger andelen kvinnor.

	Fo.stud 2000/2001 (Tabell 5)				Antal lärare inkl professorer				Antal professorer			
	k	m	tot	Andel kv (%)	k	m	tot	Andel kv(%)	k	m	tot	Andel kv(%)
CTH & GU Ma	6	54	60	10%	5	28	33	15%	0	9	9	0%
CTH & GU Mat Stat	8	22	30	27%	4	8	12	33%	0	6	6	0%
KAU	2	2	4	50%	3	17	20	15%	0	1	1	0%
KTH Ma	3	27	30	10%	4	49	53	8%	0	11	11	0%
KTH/SU Nada	4	17	21	19%	5	12	17	29%	0	4	4	0%
LiU	6	32	38	16%	11	52	63	17%	0	10	10	0%
LTU	6	9	15	40%	7	41	48	15%	1	4	5	20%
LU Ma	4	22	26	15%	6	33	39	15%	0	6	6	0%
LU Mat Stat	5	16	21	24%	4	12	16	25%	1	6	7	14%
LU Num analys	1	1	2	50%	0	5	5	0%	0	2	2	0%
MdH	0	4	4	0%	6	22	28	21%	0	3	3	0%
UmU Mat Stat	3	3	6	50%	2	7	9	22%	0	1	1	0%
UU Ma + Ma Stat	12	22	34	35%	6	36	42	14%	1	7	8	13%
UU TDB	5	19	24	21%	4	19	23	17%	0	3	3	0%
<b>TOTALT</b>	<b>65</b>	<b>250</b>	<b>315</b>	<b>21%</b>	<b>67</b>	<b>341</b>	<b>408</b>	<b>16%</b>	<b>3</b>	<b>73</b>	<b>76</b>	<b>4%</b>

Sammanfattningsvis kan det konstateras att många matematikinstitutioner önskar sig en jämnare könsfördelning. Det talas ofta om att man vill locka till sig fler kvinnliga studenter, men få konkreta åtgärder nämns. Ett fåtal institutioner har dock arbetat aktivt med att uppmärksamma och förändra de egna attityderna för att bana väg för en mer jämställd arbetsplats.

Vid två lärosäten (där frågan verkar ha kommit på tal under intervjun) säger studenterna att de inte upplever den skeva könsfördelningen som något problem.

### *Intervjuer med ett fåtal studierektorer vid matematik institutioner*

Arbetsgruppen har genomfört intervjuer med studierektorer för matematiska institutionen vid ett litet antal universitet och högskolor. Inte heller här lades fokus på jämställdhetsfrågor. Några svar berör ändå rekrytering av kvinnor och kan utgöra ett intressant komplement till utvärderingsresultaten refererade ovan.

Vid *Umeå universitet* anser man sig ha för få kvinnor vid matematikutbildningarna.

*Luleå tekniska högskola* lyfter fram sin Datatekniska ingång för tjejer samt att man nu har uppnått 50 % kvinnliga forskarstuderande vilket ger bra signaler. De har även en kvinnlig gästprofessur.

*KTH* har inte någon speciell handlingsplan för grundutbildningen, men ska nog ta fram en. De kommer då att titta särskilt på de rekommendationer som fastlogs i Tengstrands utvärdering [5] I den listan ingår att KTH bör genomföra en satsning för att öka antalet kvinnor bland såväl lärare som studenter. Dessvärre leder kvinnorna den negativa trenden när det gäller intresset för civilingenjörsutbildningarna. Andelen kvinnor som söker har minskat de senare åren efter att tidigare ha ökat för varje år. Andelen kvinnor som söker sig till forskarutbildningen är fortfarande liten.

Vid *KTH/SU, institutionen för ingenjörsvetenskap, Kista* har andelen kvinnor som söker utbildningen minskat drastiskt. För tre år sedan var andelen kvinnliga studenter 40 %. I höstas var endast 4 % av nybörjarstudenterna kvinnor! Även här har minskningen skett i samband med att det allmänna intresset för utbildningarna sjunkit. (För tre år sedan hade man 3-4 sökanden per plats, men i höstas fick man ställa in en av fyra tänkta klasser.)

*Linköpings universitet* anser sig ha för få kvinnliga sökanden till matematikprogrammet.  
*Uppsala universitet* och *Växjö universitet* nämner inget om rekrytering av kvinnor i intervju svaren.

### *En jämställd forskarutbildning i matematik*

I Tengstrands utvärdering av svenska matematikutbildningar [5] redovisas antalet forskarstuderande 2000/2001, samt antalet licentiat- och doktorsexamina under perioden 1997-2000 vid de berörda institutionerna. I samtliga tre fall ligger andelen kvinnor kring endast 20 %. Från samma rapport kan utläsas att andelen kvinnliga lärare vid institutionen, och därmed möjliga handledare till de forskarstuderande, inte kommer upp i 20 %.

Teknisk-naturvetenskapliga fakulteten vid Uppsala universitet tillämpar en beräkningsmodell för tilldelning av studiestöd där man ger högre poäng för doktors- och licentiatexamina avlagda av det underrepresenterade könet. Man har dock inte sett några tydliga indikationer på att ett viktat studiestöd främjar jämställdheten, och för tillfället diskuteras om systemet ska behållas eller ersättas med något effektivare. Flera sektorer som av tradition har jämn könsfördelning bland sina forskarstuderande driver på ett avskaffande av viktat studiestöd. De missgynnas av systemet eftersom inga nya pengar skjuts till, utan viktningen svarar mot en omfördelning av befintliga medel.

### *Slutsatser*

När det gäller matematik finns en stor utbildningsreserv bland landets kvinnor. Våra matematikinstitutioner skulle därför kunna arbeta mycket mer aktivt för att locka till sig fler kvinnor såväl från gymnasiet till grundutbildningen, som från grundutbildningen till forskarutbildningen. Ibland framhålls det dock från institutionerna att förändringen måste komma i gymnasiet först, så att man får en bredare bas av kvinnor att rekrytera från.

Hos kvinnorna själva och hos männen verkar föreställningar om ”begåvade män” och ”flitiga (men inte särskilt begåvade) kvinnor” leva kvar i alltför stor utsträckning när det handlar om matematik. Ett bra sätt att motarbeta den bilden verkar vara att visa upp många kvinnliga matematiker. Detta kräver förstås att det finns fler kvinnliga matematiker. Matematikinstitutionerna borde därför, i rent egenintresse, engagera och fånga upp fler kvinnor.

En annan viktig slutsats är att pedagogisk förnyelse tilltalar både män och kvinnor, vilket bland annat framgår i Luleå tekniska högskolas modell med forskarlag. Ofta framhålls det att kvinnor föredrar att arbeta i grupp, men enbart samarbete räcker inte som lösning. Flera studier visar att grupparbete både hjälper och hämmar kvinnor, beroende på hur det genomförs, se exempelvis ref. [1].

Ett möjligt sätt att stimulera institutionerna till att på allvar börja rekrytera kvinnor är att sprida information om lyckade insatser mellan universiteten. En institution som skaffar sig många bra doktorander genom ett framgångsrikt jämställdhetsarbete kommer få efterföljare.

### *Goda exempel*

I *NOT projektet* har jämställdhetsfrågorna varit mycket centrala. Projektets ledningsgrupp har hela tiden haft en kvinnlig majoritet. Själva angreppssättet för att uppnå jämställdhet är också intressant. Skolprojekten har vänt sig till alla elever, såväl pojkar som flickor, men utövarna har ofta varit kvinnor. På så sätt har man velat förändra förhärskande attityder och fördomar. I en utvärdering av NOT projektet [ii] konstateras det att andelen kvinnor inom naturvetenskap och teknik har ökat från 18 % till 22 % under 1993 till 1997, medan trenden varit negativ i många andra länder. Hur mycket av detta som kan tillskrivas NOT projektet är förstås oklart. Det vore önskvärt att matematiken införlivades i en eventuell nästa fas av NOT. Alternativet är att starta ett eget, liknande matematik projekt.

Den pedagogiska förnyelsen inom forskarutbildningen vid *Luleå tekniska högskola* har upplevts som positivt av både män och kvinnor, se ovan.



Vid några universitet har kvinnorna skapat lokala nätverk bland kvinnliga lärare och doktorander som exempelvis kan ha regelbundna träffar. Vid Stockholms universitet stödde matematiska institutionen nätverket på olika sätt under KIM-projektet.

### *Förslag i punktform*

- Jämställdheten som en central del i ingår i ett övergripande MAT-projekt ("NOT projekt" för matematik) – se vidare kap 11
- Gör en uppföljning av Högskoleverkets undersökning för att kartlägga institutionernas jämställdhetsarbete som omfattar både rekrytering av kvinnor och deras vidare karriärer.
- Sammanställ information om goda sätt att rekrytera kvinnor till grund- och forskar utbildningen i matematik i samarbete med nätverket Kvinnor och matematik
- Fakulteter bör kunna använda ekonomiska styrmedel i jämställdhetsarbetet.
- Institutionerna bör uppmuntra och stödja lokala nätverk för kvinnliga matematiker.

### *Referenslista*

- [1] Regerings proposition 1994/95:164 Jämställdhet mellan män och kvinnor inom utbildningsområdet
- [2] Gerd Brandell, Peter Nyström och Else-Marie Staberg, *Matematik i gymnasieskolan – könsneutralt ämne eller inte?*, Projektet GeMa, delrapport 3 (2003)
- [3] Diane M. Quinn, Steven J. Spencer, *The Interference of Stereotype Threat With Women's Generation of Mathematical Problem-Solving Strategies*, *Journal of Social Issues*, **57**, 55-71, (2001)
- [4] Lars Brandell, *Matematik för fortsatta studier En kvantitativ undersökning gjord på uppdrag av matematikdelegationen* (2004), bilaga 3 till denna rapport
- [5] Utvärdering av matematikutbildningar vid svenska universitet och högskolor, Högskoleverkets rapportserie 2002:5 R, ordförande i bedömningsgruppen Anders Tengstrand
- [6] Calle Jacobsson och Ylva Elvin-Nowak, *Kvinnor i matematiken – ett trevligt inslag eller på lika villkor? (KIM)*, Högskolans grundutbildningsråd (1994)
- [7] Svein Sjøberg, *NOT prosjektet – sett utenfra*, (1998)

## Kapitel 10 Matematikdidaktisk forskning och pedagogiskt utvecklingsarbete

Matematikdidaktik som forskningsområde är relativt nytt i Sverige om man tänker på speciella forskartjänster och forskarutbildning. Däremot har Sverige en lång tradition av forskning med inriktning på matematikutbildning och lärande inom matematik, som bedrivits framförallt inom ramen för pedagogikämnet. Ett trettiotal avhandlingar som kan sägas höra till området har lagts fram. De flesta har inriktats på yngre barns lärande.

Den matematikdidaktiska forskningen behandlar frågor om lärande i matematik, med eleven, ämnet och läraren i fokus. Men forskningen behandlar också frågor om det utbildningssystem inom vilket elever och läraren arbetar. Frågor om styrsystem, utvärdering, läromedel, lärarutbildning mm behandlas, allt med fokus på matematiken. Likaså studeras frågor om matematikutbildningens roll inom den demokratiska processen i samhället och ämnets relevans och berättigande. Internationellt har området utvecklats kraftigt de senaste 30 åren. Många länder har utvecklat en forskningstradition inom fältet och en mängd internationella forskningstidskrifter publiceras numera. Ett exempel på resultatet av sådan forskning är begreppet matematisk kompetens som vi kort beskrivit till i ett tidigare avsnitt.

Betydelsen av forskningen hänger samman med att matematiken är ett stort ämne i skolan (det näst största) och vid högskolan, att man i alla länder stöter på stora och likartade problem i matematikutbildningen, samtidigt som kraven växer på elevernas resultat och deltagande och att matematisk förmåga är en grundläggande kompetens av vital betydelse för alla samhällsmedborgare.

Sverige har hittills endast en professur i matematikdidaktik, vid Luleå tekniska universitet, institutionen för matematik, och en deltidsprofessor vid Högskolan, Kristianstad. Vid ett par högskolor finns professurer i ämnesdidaktik med inriktning mot naturvetenskap alternativt matematik, som har tillsatts med naturvetare. Det är anmärkningsvärt att så få professurer i finns i Sverige med tanke på utvecklingen i andra länder, bland annat våra nordiska grannländer.

Bland matematiska institutioner har institutionen i Umeå gjort en pionjärinsats genom att starta en forskargrupp inom ämnet och forskarutbildning i matematik med ämnesdidaktisk inriktning redan 1995. Sedan 2001 pågår en stor satsning via Riksbankens Jubileumsfond som finansierar en forskarskola med tjugo doktorander i matematik med ämnesdidaktisk inriktning. Institutionerna i Umeå, Luleå och Kristianstad deltar i denna liksom ett tiotal andra matematiska institutioner runt om i landet.Handledningen bedrivs i samarbete mellan matematiker, matematikdidaktiker och pedagoger, både i Sverige och utomlands. Forskarskolan stöds även av Vetenskapsrådet. Anslaget från RJ är ett engångsanslag, forskarskolan tar inte in nya doktorander längre och dess fortsättning efter de fem åren – år 2006 – är därmed osäker. Verksamheten är än så länge framgångsrik, några få studenter har hoppat av medan ett par nya tillkommit, och studenterna följer sin planering. Fyra har nyligen avlagt sin licentiatexamen och flera kommer att göra det längre fram i år. En del går direkt på doktorsexamen.

Forskarskolan har ett mål utöver att utbilda forskare, nämligen att medverka till en framväxt av matematikdidaktiken som forskningsområde i Sverige, vid de matematiska institutionerna. Detta är i linje med intentionerna bakom satsningen på utbildningsvetenskaplig forskning de senaste åren, där statsmakterna uppmanar ämnesinstitutionerna att engagera sig i den ämnesdidaktiska forskningen.

De som genomgår forskarutbildning inom matematikdidaktik kommer att ha en kompetens som gör dem lämpade att arbeta som lektorer inom gymnasiet och inom lärarutbildningen. Inom båda dessa områden är bristen stor på forskarutbildade lärare. Av svaren på den enkät till gymnasielärare som delegationen beställt från SCB framgår att en betydande andel (över 20%) av gymnasielärarna i matematik är intresserade av att genomgå forskarutbildning och att matematikdidaktik var det främsta intresset.

Det finns alltså många skäl att stödja och utveckla matematikdidaktiken som forskningsområde och det finns anledning att hoppas att en sådan satsning kommer matematikutbildningen tillgodo dels direkt genom forskningsresultat som ligger nära praktiken i skolan, dels indirekt genom att bidra till försörjningen av kvalificerade lärare inom gymnasier och lärarutbildning.

Pedagogiskt utvecklingsarbete har en nära relation till den didaktiska forskningen. Vid institutioner med en forskning inom området kommer att finnas stöd för lärare som önskar bedriva

pedagogiskt utvecklingsarbete och på ett systematiskt sätt dokumentera och utvärdera sitt arbete. Detta har betydelse för verksamheten, men också för läraren, som får ett stöd för sin egen utveckling och en meritering i form av ett bidrag till den ”pedagogiska portföljen”.

Det finns stort behov av mer systematiskt pedagogiskt utvecklingsarbete vid de matematiska institutionerna. Det finns enligt arbetsgruppens uppfattning baserat bland annat på kontakter med studierektorer många erfarenheter av pedagogiskt utvecklingsarbete med goda resultat. Men mycket av detta arbete dokumenteras inte eller knapphändigt och ofta utvärderas inte kurserna och försöken kontinuerligt. Fortsatt utveckling försvåras därmed. Lärarna bör uppmuntras och ges möjlighet att utvärdera och dokumentera arbetet, att aktivt delta i konferenser och att publicera sig inom området.

Erfarenhetsutbytet mellan institutionerna är också begränsat. Det borde ligga ett stort intresse i ökat utbyte av erfarenheter. Arbetsgruppen föreslår därför årliga konferenser för matematikutbildningen vid högskolorna, med inriktning på teman som innehåll, mål, lärande, samverkan med avnämare, undervisning, organisation, rekrytering, samverkan med gymnasiet bör anordnas.

### *Förslag i punktform*

- Matematiska eller andra institutioner som har ansvar för lärarutbildningen i matematik bör genom sina fakulteter bygga upp en forskningsorganisation för matematikdidaktik med forskartjänster, forskarutbildning och anslag från fakultetsmedel
- Fortsätt stödet till forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning via statliga medel
- Årliga nationella konferenser om matematikutbildningen på högskolan med teman som handlar om innehåll, mål, lärande, samverkan med avnämare, undervisning, organisation och rekrytering bör anordnas.
- Undervisningsprojekt bör i högre grad än idag utvärderas och dokumenteras. Lärare bör uppmuntras att publicera sig inom området.

## Kapitel 11 Ett övergripande matematikprojekt

Matematikämnet inom skola och högskola står inför stora utmaningar. Det krävs insatser av många entusiastiska och kunniga lärare för att nå förändringar. Ett kraftfullt stöd för lokal utveckling via projekt som når eleverna är nödvändigt för att driva fram förändringar.

Som framgått tidigare visar rekryteringen till matematik tecken på att minska. Vi ser det som allvarligt och menar att man måste vända den trenden tidigt. Matematiken är ett oumbärligt inslag i många utbildningar och inom allt fler yrkesområden. (Se tidigare avsnitt).

Vi föreslår efter modell av NOT-projektet som drivits framgångsrikt under 10 år ett liknande projekt för matematiken under en kommande femårsperiod. Projektet ska gälla matematiken både i grundskolan och gymnasiet. Det övergripande målet ska vara ökad rekrytering och förbättrade attityder till ämnet. Jämställdhetsaspekter måste få en central plats i projektet och ökad rekrytering av kvinnor till matematik ett viktigt mål. Mer positiva attityder till matematik bland elever och studenter är ett annat mål.

Projektet bör ledas av myndigheten för skolutveckling, skolverket och högskoleverket gemensamt.

Stommen i ett MAT-projekt ska vara lokala och regionala projekt för bättre matematikutbildning och ökad rekrytering, framförallt av flickor och kvinnor. Exempel kan vara "röda tråden"-projekt där lärare från olika nivåer samverkar med varandra och utvecklar undervisningen inom ett visst tema. Man bör ta vara på erfarenheterna från NOT-projektet.

Många av de förslag som vi framfört tidigare kan ingå i ett MAT-projekt. Det gäller till exempel det kompetensutvecklingsprogram som bör åtfölja en reform av gymnasiets matematik. Det gäller också de årliga nationella konferenser vi föreslår för högskolans matematikutbildning.

Projektet utvärderas efter fem år och kan sedan eventuellt fortsättas.

### FÖRSLAG

- Ett övergripande nationellt projekt – MAT-projektet – drivs under fem år. Målet är ökad rekrytering till matematik inom gymnasiet och högskolan, framförallt av flickor och kvinnor. Målet är också mer positiva attityder till matematik bland eleverna. Projektet leds i samverkan mellan myndigheten för skolutveckling, skolverket och högskoleverket.
- Grundvalen för projektet är lokala och regionala projekt. Projekt för samverkan F-12-högskolan (alternativt mellan två skolformer) uppmuntras.

## Källor och referenser

- Bergqvist, Thomas (2001). *To Explore and Verify in Mathematics*. Umeå University. Department of Mathematics. Doctoral Thesis No 21, 2001.
- Brandell, Lars (2003). *Matematikkunskaperna 2003 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH*. Stockholm.
- Bylund, Per & (2003). Studenternas förkunskaper. *Nämnan* 30 (3) och (4).
- Chan, Yony F. (2003). The Mathematics Doctorate: A time for a Change? *Notices of the AMS*. Vol 50 (8).
- Grevholm Barbro (2002). Lärarutbildning. NCM-rapport 2002:1
- Högskoleverket (1999). *Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning?* Högskoleverkets skriftserie 1999:4 S
- Högskoleverket. Bedömningsgruppen för studenternas förkunskaper i matematik (1999). *Räcker kunskaperna i matematik?* Högskoleverket.
- Högskoleverket (2002). *Utvärdering av matematikutbildningar vid svenska universitet och högskolor*. Högskoleverkets rapportserie 2002:5 R
- Högskoleverket (2003). *Utvärdering av högskoleingenjörutbildning, ingenjörutbildning samt brandingenjörutbildning vid svenska universitet och högskolor*. Del 1. Högskoleverkets rapportserie 2002:20 R.
- Kilpatrick, Jeremy, Swafford, Jane and Findell, Bradford (eds) (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press. Washington DC
- Mathematics Subject Area Group within "Tuning educational structures in Europe" (2003). *Towards a Common Framework for Mathematics degrees in Europe*. (Finns tillgängligt på nätet).
- Nationellt Centrum för Matematikutbildning (2001). *Hög tid för matematik*. NCM-rapport 2001:1
- Niss, Mogens & Højgaard Jensen, Tomas (red) (2002). *Kompetencer och matematiklärning. Ideer och inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahafteserie nr. 18 – 2002. Undervisningsministeriet
- Pettersson, Rolf (2003). *Resultat av Diagnostiska prov i Matematik för nyantagna teknologer vid civilingenjörslinjerna Chalmers, 1973 – 2003*. Opublicerat material.
- Skolverket, Enheten för resultatbedömning (2003). *Det nationella provsystemet – vad, varför och varthän?* Bilaga till Skolverkets svar på ett regeringsuppdrag (U2003/2060/S). Skolverket: Dnr 01-2003-2038
- Tillträdesutredningen (2003). *Hur bedömer lärosätena studenternas förkunskaper?* Promemoria 2:1. Statens offentliga utredningar.
- Universitetskanslern (1995). *Nationell utvärdering av grundutbildningen i matematik*. Kanslersämbetets rapport 1995:5.
- Westlund, Elvy (2001). *Undervisnings- och utbildningsplanering – för vem?* En studie av ingenjörutbildningen vid en svensk högskola. Acta Universitatis Upsaliensis. Uppsala Studies in education 96. Uppsala 2001

**Bilagor** (Denna lista kan komma att kompletteras. )

1. Delegationens uppdrag
2. Arbetsgruppernas uppdrag
3. Lars Brandell, *Matematik för fortsatta studier*
4. Enkät, gymnasielärare och ämnesansvariga
5. Enkät, gymnasielärare, rapport SCB (Anders Karlsson)
6. Enkätundersökning, gymnasielärare om kompetens och kompetensutveckling, sammanställning av svaren (Anders Tengstrand)
- 6a. Analys av svaren utifrån kompetens, uppdelning i fyra grupper
7. Enkätundersökning, ämnesansvariga vid gymnasier, sammanställning av svaren (Attila Szabo)
8. Enkät, högskolelärare vid matematikinstitutioner
9. Intervjuunderlag, studierektorer vid matematikinstitutioner
10. Sammanställning av enkätsvar och intervjusvar, högskolan (Leif Abrahamsson)
11. Lusten att lära – sammanfattning av lektionsobservationer, gymnasiet (Ola Helenius)
12. Bolognaprocessen, matematik och Chalmers (Ola Helenius)
13. Goda exempel (Ola Helenius)
14. Lista över insända artiklar och övrigt material till arbetsgruppen
15. Betygsfördelning på gymnasiets matematikkurser, uppdelat på kön.
16. Sammanställning av antal lärare vid högskolans matematikinstitutioner (Ola Helenius)
17. Sammanställning av förslag från tidigare utredningar
18. Body & Soul - Ett genomgripande undervisningsprojekt i matematik (Ola Helenius)

Bilagorna finns på

<http://ncm1.ncm.chalmers.se/madel11h>

---