

7

Att utgå från problem

Ett av de viktigaste målen för undervisningen i matematik är att eleverna skall kunna lösa problem. De skall också kunna tolka och arbeta med matematiska modeller och tillämpa matematik i vardagsliv, andra ämnen och – i matematik. I detta kapitel behandlas också problem med en annan utgångspunkt – som medel att stimulera elevens intresse och tänkande. I anslutning till detta presenteras en Problemsamling som underlag för diskussion och olika aktiviteter.

Problemlösning som mål

Problemlösning, användning av matematiska modeller, kommunikation och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av ämnet matematik som skall belysas i undervisningen i gymnasieskolan:

Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer. Undervisningen skall utveckla elevernas nyfikenhet, öppenhet, analytiska förmåga, kreativitet och ihärdighet vid matematisk problemlösning samt förmåga att generalisera, abstrahera och estetiskt fullända lösningar och resultat.

Undervisningen skall sträva efter att eleverna skall få uppleva tillfredsställelsen i att behärska matematiska begrepp och metoder, i att upptäcka mönster och samband och i att lösa problem samt lära sig använda och inse värdet av matematikens symboler och uttryckssätt.

(s 146)

Många uppfattar felaktigt matematik som ett statiskt ämne dominerat av isolerade fakta, begränsande regler och formler. I själva verket är matematik ett skapande ämne som ständigt utvecklas. Att formulera, diskutera och lösa problem har varit en av de viktigaste drivkrafterna bakom denna utveckling. Tyvärr är de problem som sysselsätter dagens forskare inom disciplinen matematik med få undantag för svåra eller otillgängliga för att ens kunna diskuteras i skolmatematiken.

För att alla elever skall få chansen till stimulerande upplevelser av matematikens natur och karaktär (och för att vi som lärare skall få glädjen att ägna oss åt problemlösning) är det viktigt att vi löser problem tillsammans med eleverna.

Det är spännande och intressant att fortlöpande studera och analysera undervisning i problemlösning. Vi måste försöka följa forskning om problemlösning i matematik, men samtidigt komma ihåg att vetenskaplig kunskap endast uttalar sig om begränsade delar av skolans vardagsarbete. En lärares yrkesskicklighet kan inte härledas direkt eller uteslutande ur forskningsdiscipliner. Vi bör sträva efter en god balans mellan vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet. Att reflektera över, själv utveckla och utbyta erfarenheter med kollegor kring undervisning i problemlösning bör få ökat utrymme. I litteraturlistan finns ett antal förslag på några aktuella artiklar och böcker, se s 114. I Schoenfeld (1992) finns en översikt över internationell forskning kring området.

För att komma i stämning innan du läser vidare...

Vi föreslår nu att du studerar problemsamlingen på s 115 och löser några problem som du finner intressanta. Fundera också över problemlösningens natur och karaktär, vilka typer av problem som finns representerade och vilka kunskaper och strategier elever behöver för att lösa dem.

- Ge exempel på problem i matematik som du
 - a) tycker man måste klara av,
 - b) tycker är roliga att lösa,
 - c) inte tycker om. Motivera dina svar!
- Ge exempel på problem där du haft nytta och glädje av matematikkunskaper eller där arbete med problem gett nytt kunnande. Hur lång tid tog det för dig att lösa problemet om man inkluderar hela processen från det du formulerade problemet till att du använt eller utvärderat resultatet? På vilka delar av "problemlösningssprocessen", (t ex planering, ta fram data, beräkningar, rimlighetskontroll) la du ner mest tid?
- Hur lång tid brukar dina elever få på sig i skolan att lösa de problem som t ex ingår i en diagnos eller ett prov?
- Matematik **är** problemlösning, har någon sagt. Håller du med? Varför eller varför inte?

Olika typer av problem

För att arbetet med problem i matematik skall kunna varieras på ett sätt som passar olika elevers erfarenheter, intressen och förutsättningar är det angeläget att vi som lärare skaffar oss god kännedom om olika typer av problem och problemsituationer. Utan anspråk på att vara fullständiga nämner vi här några viktiga problemtyper

- från andra skolämnen, från vardagsliv och samhälle
- från olika delar av matematikämnet
 - med olika komplexa beräkningar som speglar t ex operationers innebörd och relationer, olika talområden och talmängder
 - med olika storheter som antal, vikt, volym, temperatur, längd, pris, hastighet, tid osv samt olika enheter som g, kg, ton, liter, dm, kr, år osv
- som kan lösas med hjälp av t ex miniräknare, formler eller ekvationer
- som kan lösas med hjälp av olika representationsformer som figurer, tabeller, diagram
- som kan lösas med olika metoder och strategier
- givna med olika språkliga formuleringar, olika lång text, muntligt, med eller utan bilder, autentiska texter med överflödig information eller där information saknas
- som ger mer än ett svar, som saknar svar
- som tar olika lång tid att lösa

Vi behöver reflektera över variationerna och låta eleverna möta olika problemtyper. Ett lämpligt urval från denna mångfald är viktig för att kunna individualisera undervisningen så bra som möjligt.

- Ge exempel på relevanta och intressanta problem av de slag vi försökt beskriva – eller andra. Diskutera elevernas tankar om och vid lösning av problemen.
- Kan vi öka variation, bredd och balans mellan olika typer av problem och problemlösningsaktiviteter som eleverna borde få möta? Hur ska det i så fall ske? Problembank på skolan?
- Hur kan användningen av miniräknare och datorer bäst bidra till att utveckla elevernas problemlösningsförmåga?

Undervisning om och i problemlösning

Alla människor har i alla tider strävat efter att kunna lösa problem. Det ligger i den mänskliga naturen. För att inte bli lurad i vardagsliv och samhälle, för att kunna förstå och påverka som fullvärdig medlem i demokratiska processer behöver man kunna kontrollera andras lösningar, formulera och lösa problem.

En del elever har tyvärr fått dåligt självförtroende och negativa erfarenheter genom misslyckanden. Därför är det viktigt att i början ta upp enkla problem, visa på olika strategier och olika sätt att lösa samma problem och lära oss värdera arbetet mer. Man kan behöva motverka fixeringen på facitsvar som läroboksräknande ofta leder till, och visa att det är processen och tänkandet som är det viktiga. Det får ta tid att lösa problem och man kan gärna arbeta i grupp.

Ett och samma problem kan användas i flera syften. De kan utformas och presenteras på olika sätt, beroende på situation och sammanhang. Ett övergripande syfte är att stimulera, intressera och ge upplevelser. Tänk om all matematik kunde uppfattas som om den handlade om intressanta problem!

Att sätta sig in i och lösa problem tar tid. Ett problem som är tänkt att ta 10 minuter i en klass kan ge upphov till nya problem och generaliseringar som motiverar att hela lektionen eller fler lektioner används.

Eleverna har olika erfarenheter av och kunskaper i problemlösning. Dessa är väsentliga att känna till för att kunna åstadkomma goda undervisningssituationer. Det gäller kunskaper i termer av rätt, fel, lösningsfrekvenser och i att lösa problem av olika svårighetsgrad. Men framförallt gäller det elevernas kvalitativa uppfattningar och sätt att tänka, när de arbetar med olika typer av problem och problemmiljöer – också utanför läroboken och klassrummet.

Som professionell lärare söker man hela tiden fördjupa sina kunskaper om hur eleverna tänker och reagerar och hur deras uppfattningar utvecklas. Sådana kunskaper är grundläggande för att kunna förstå och utveckla elevernas problemlösningsförmåga i matematik.

I klassrummet strävar vi efter olika mönster av aktiviteter för våra elever som leder till att vi kan

- skapa ett positivt klassrumsklimat och ge eleverna självförtroende
- individualisera problemlösningen och stimulera eleverna genom val eller konstruktion av lämpliga problem och problemmiljöer i olika matematikmoment och i andra ämnen. Detta kan ske i samarbete med eleverna och utifrån deras intresse, förutsättningar, mögnad, språk, räknefärdigheter och i relation till olika lösningsmetoder och hjälpmedel.

- planera och organisera arbetsformer och aktiviteter som visat sig framgångsrika vid undervisning i problemlösning i matematik. Det gäller t ex grupparbete kring problem och problemmiljöer, användning av olika strategier som att
 - rita en bild eller figur,
 - gissa och pröva,
 - lösa ett enklare problem först,
 - göra upp en tabell eller diagram,
 - använda laborativa materiel eller modeller
 - arbeta baklänges,
 - ställa upp en ekvation eller ett uttryck.

Det gäller att finna övningar i problemformulering och samarbete med t ex lärare i andra ämnen för att öka elevernas kunskaper om och erfarenheter av olika problemmiljöer (jfr kapitel 6).

Vi behöver känna till olika metoder när vi skall hjälpa eleverna att få tilltro till sin förmåga, att kontrollera det egna tänkandet, diskutera fördelar och nackdelar med olika lösningar och strategier, studera problems struktur samt stimulera till generaliseringar (Lester, 1988).

- Diskutera olika sätt att skapa ett bra klassrumsklimat som kan ge eleverna ökat självförtroende.
- Hur fördelar sig elevernas arbetstid på olika arbetsformer när det gäller problemlösning i matematik? Hur skulle du vilja ha det? Möjligheter och hinder?
- Hur kan man arbeta med att utveckla elevernas kunskaper och känsla för de strategier som nämns i texten nedan?
- Vilka fördelar och nackdelar har den läroboksserie du använder med tanke på de typer av uppgifter, det kunnande och lärande om och i problemlösning, som vi berör i detta avsnitt?
- Hur kan vi stimulera till problemlösning utanför matematiklektioner? Vilka typer av aktiviteter kan man tänka sig?

Att utgå från problem

Problemlösning som medel

Problemlösning kan användas som medel för att nå olika mål i matematikundervisningen. Det gemensamma är då att vi vill intressera och stimulera elevers tänkande. I *Problemsamling* (s 115) har vi samlat ett antal problem i det syftet. De är uppdelade på aritmetik, aritmetik-algebra, algebra, geometri, statistik och funktioner. En del av problemen berör flera moment. Till problemen finns det kommentarer om hur de kan användas och vad man kan vänta sig om de används. Uppgifterna är ofta valda från kända texter, som vi hänvisar till och där man kan fortsätta leta efter bra problem.

Rika problem

Samma problem kan ibland användas i olika syften. De är på ett eller annat sätt "rika" och speglar matematikens natur och karaktär. Reflektionen kring problemet och lösningsprocessen frilägger då viktiga relationer och samband. En del sådana "rika" problem använder vi för att de kan lösas på olika sätt och därmed kan bidra till individualisering, att de ibland ger upphov till nya frågor och problem och att de kanske kan utvidgas eller till och med generaliseras.

Undervisningsmetodik

Det kan vara så att vi i vår undervisning syftar till att *repetera eller stärka grundläggande begrepp*. I stället för att ställa frågor om definitioner, metoder och regler kan vi ge ett problem som för lösningen kräver att man har grundbegreppen klara för sig. Eller att man med problem på ett mer stimulerande sätt kan *belysa och befästa rutinfärdigheter*.

Vi kanske vill *förbereda tankegångar* inför ett nytt avsnitt, ge en *gemensam erfarenhetsbakgrund* av upplevelser och intryck. För att kunna ta till sig ett nytt begrepp måste de flesta kunna anknyta det till något de "vet" eller kan bli påmind om. "Det var det där vi gjorde en gång" ger en annan startpunkt än "Vad är det här nu för nytt?". Ibland vill vi ha en *introduktionsuppgift* för att fånga intresset, för att fokusera på betydelsefulla poänger i ett nytt avsnitt.

Det finns problem som med enkla medel ger tillfälle till *matematiska resonemang* och till att dra slutsatser. Det kan gälla problem som ger *matematisk allmänbildning* och problem som kan ge *kunskap om sakinnehåll och idéhistoria*. Det kan t o m vara så att vi ibland tar till *annorlunda problem* för omväxlings skull.

Elever gör problem

Elever kan själva bidra med problem, formulera problem från karaktärsämnen eller från situationer och upplevelser de haft på fritiden. Det har vi tidigare visat på i kapitel 2. I samband med elevarbete i grupper har det betonats att det är bra om eleverna gör problem åt varandra (kapitel 5). De kan också studera och söka förbättra och förklara varandras formuleringar och lösningar. Matematiken är ju ett kommunikationsämne.

Låt t ex uppdraget att ta fram ett ”*Dagens problem*” eller ”*Veckans problem*” cirkulera bland eleverna! Låt det gärna ske i elevgrupper så att eleverna kan tala med varandra och säga ”vi föreslår” eller ”vi har det här problemet”. De skall veta att de kan göra korta ”Kommer du ihåg?” eller andra problem som tar längre tid och kanske kan lämnas till andra att fundera på. Varför inte använda Nämnarens teknik här också: Vi visar problemet i dag och ni visar lösningar nästa vecka?

Att presentera problem

Det finns många kreativa och produktiva sätt att presentera problem. Ett exempel är VDM, *Vår Dagliga Manipulation*, som Andrejs Dunkels utarbetat och beskrivit i olika sammanhang (se t ex Dunkels, 1985). En VDM-uppgift läggs utan kommentar på arbetsprojektorn. Eleverna får fundera några minuter och sedan diskuteras uppgiften och dess lösning – ett effektivt sätt att starta lektionen och komma in på aktuella problemställningar.

Ett sätt är att varje vecka anslå ”*Veckans problem*”. Det får inte vara överdrivet svåra eller knepiga problem. Problemens art kan anpassas till studieprogram och elevgrupp. Om uppgiften är för svår (eller t o m för lätt) så uppstår inte intresset. Men lämplig svårighetsgrad – och de flesta fångas av sin problemlösningslust. Det behöver inte vara så att alla elever skall fundera på problemen till en början. Det är tillräckligt om några gör det och om verksamheten ökar intresset bland potentiellt matematikintresserade. I litteraturlistan efter Problemsamling ges ytterligare förslag till lämpliga problem.

- Bläddra igenom Problemsamlingen (s 115) igen. Välj ut några problem och fundera över hur de kan användas i anslutning till de aktiviteter som beskrivs i texten. Fördelar, nackdelar jämfört med läroboken? Hur kan olika presentationssätt öka elevernas intresse och få dem att ägna mer tid till matematikstudier? När?

Tävlingsproblem kan ha en plats i sådana sammanhang. (Matematik-tävlingar associeras ibland med Svenska Dagbladets tävlingar eller Olympiadproblem, som endast är till för en handfull gymnasister.) Det behöver inte vara fråga om elittävlingar. Både i schack och idrott tävlas det ju på olika nivåer – varför inte i matematik? Den som anser att individuellt tävlande inte behöver något ytterligare understöd – snarare tvärtom – kan använda problemen utan tävlingsinslag. Danderyds gymnasium har t ex initierat tävlingar för högstadiet och problemen i dem är ofta bra som "Veckans problem" i gymnasiets första årskurs. "Dagens problem" ger ett ypperligt tillfälle till problemlösning för eleverna. Nästan alla kursmoment och nästan alla ovan beskrivna aspekter kan belysas utifrån elevförslag.

Elever är duktiga på att göra både ekvationer och problem som leder till ekvationssystem, bara de kommer i gång. Var inte rädd för att det blir för enkelt! Det brukar snarare bli tvärtom.

Litteratur

- Allwood, C. M. (1991). Rätt som det är blir det fel. *Nämnnaren* 18(3/4), 38-40.
- Dunkels, A. (1985). VDM – Vår Dagliga Manipulation. *Nämnnaren* 12(1), 32-35.
- Firsov, V. (1993). Schools for gifted children. *Nämnnaren* 20(2), *Nämnnaren*, 40-43.
- Laksov, D. (1993). Problemlösning eller matematiska idéer i undervisningen? *Nämnnaren* 20(4), 43-47.
- Lennerstad H. (1995). Om problemlösning och människans osynlighet. *Nämnnaren* 22(1) 42-45.
- Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnnaren* 15(3), 32-43.
- Mouwitz, L. (1995). Lokal kurs i problemlösning. *Nämnnaren* 22(2), 38-43.
- Munther, R. (1983). Veckans problem. *Nämnnaren* 9(4), 36-37.
- Nämnnaren*. (1983). Tema Problemlösning. 9(3).
- Silvén, S. (1995). Hur blev den intelligenta en "dum" elev. *Nämnnaren* (22)3, s 16-19.
- Silvén, S. (1995). Problemlösning för alla – eller för redan duktiga? *Nämnnaren* (22)4, s 35-37.
- Solvang, R. (1985). Problemlösning eller problemorienterte undervisningsopplegg. *Nämnnaren* 11(4), 14-17.
- Ulin, B. (1983). Problemlösning och tänkande. *Nämnnaren* 9(3), Tema Problemlösning, 34-38.
- Ulin, B. (1994). Problemlösning och teori i skolan. *Nämnnaren* 21(1), 38-41.
- Ulin, B. (1995). Generalisering är en dygd. *Nämnnaren* 22(1), 37-40.
- Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Fischer&Co.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red), (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Pettersson, A. (1995). *Hur löser elever uppgifter i matematik?* Skolverkets rapport 61. Stockholm: Liber Publikationstjänst.
- Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Ulin, B. (1991). Att upptäcka samband i matematik. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red.) (1991). *Problemlösning*. Lund Studentlitteratur.
- Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *NOMAD* 1(1), 40-54.
- Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *NOMAD* 1(1), 18-39.
- Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *NOMAD* 2(2), 6-35.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday & Company Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1990). *A source book for college mathematics teaching*. The Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D.A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. A project of the National Council of teachers of Mathematics, NCTM. New York: MacMillan.
- Wilson, P.S. (1993). *Research ideas for the Classroom: High school Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Problemsamling

Här finns ett antal problem fördelade på grundläggande matematikmoment i kurs A. I följande kommentarer ges upplysningar om varifrån de är hämtade med förslag till hur de kan användas eller med erfarenheter från hur de använts.

Tal och räkning

Lös följande uppgifter enskilt i huvudet. Bilda sedan grupper och berätta för varandra hur ni löst dem.

- 1 a) $6 \cdot 425$ b) $612 / 3$
c) Vilket tal är störst $5/6$ eller $7/8$?
- 2 Hur mycket kostar fyra CD-skivor om en skiva kostar 149 kr?
- 3 Vid en realisation sänks priset med 40 %. Vad kostar en jacka som kostat 950 kr?
- 4 Hur mycket är $56/0,9$ på ett ungefär? Hur mycket är $56/0,09$ på ett ungefär?
- 5 Här är fem siffror: 2, 9, 3, 5, 1. Gör ett tal av dessa som ligger så nära 20 000 som möjligt.
- 6 Hur hög är en flaggstång? Hur kan man bestämma höjden? (jfr Ek, 1988.)
- 7 Hur lång tid tar det att räkna till 1 miljon om man uttalar alla räkneorden?

Kommentar

Det är bra att kunna utföra beräkningar i huvudet både i skolan och livet. Det ger bättre taluppfattning och förenklar val av strategier vid problemlösning. Beroende på talens storlek och inbördes relationer använder man olika beräkningssätt. Ofta kan man vid gruppdiskussion lära sig nya sätt och byta upp sig till bättre lösningar än den man först använde (Claesson, 1991; Persson, 1991; MacIntosh, 1995).

Kommentar

I vardagsliv och karaktärsämnen är det viktigt med uppskattning och överslagsräkning. Man behöver skaffa sig referenspunkter för att jämföra och t ex avgöra "mindre än", "litet större än", "nära 1", "hälften så stor", "tio gånger mindre", "dubbelt så stor", (Reys m fl, 1995a, 1995b, 1995c).

- Claesson (1991), Persson (1991) och MacIntosh (1995) innehåller exempel på undervisning med uppgifter och strategier i huvudräkning. Diskutera metodik och uppgifter, välj ut eller konstruera egna för att använda i egen klass.
- I Reys m fl (1995a) ges förslag på taluppfattningsuppgifter för åk 8, med resultatredovisning (Reys m fl, 1995b). Fundera över vilka uppgifter som skulle vara lämpliga för dina elever och komplettera med lämpligare uppgifter till ett test med 40-50 uppgifter och pröva i din klass.

- 8 Bisar, 30 år, ser i en tidning att en löneförhöjning kan ge antingen 15% eller 530 kr, beroende på vilket som är mest. Han vill veta var brytpunkten ligger och vad den nya lönen blir. Den gamla lönen är 3 530 kr. Han gör anteckningar på en lapp. Förklara beräkningarna och hur han tänker.

Kommentar

Det kan vara intressant och givande att se hur olika personer räknar. Matematik är ju ett kommunikationsämne och ska användas för att redovisa resonemang. På komvux och i skolor med många invandrare kan man se stora variationer. Ovanstående är ett sådant exempel.

1% (kr)	15% (kr)	Kvar (kr)
10	150	
30	450	80
5	75	5
0,30	4,50	0,50
35,30		
Gammal lön:	3530 kr	
Ökning:	530 kr	
	3000 kr	
	1000 kr	
	60 kr	
	4060 kr	

- 9 Den 15 september 1989 fanns i gymnasieskolan sammanlagt 10 733 elever på humanistisk linje och 22 391 på naturvetenskaplig linje. Av det sammanlagda antalet elever på de två linjerna var 63 procent kvinnor. Hur många kvinnor fanns på den humanistiska linjen?

- (1) Andelen kvinnor på den naturvetenskapliga linjen var 51 procent.
 (2) Sammanlagt fanns 12 256 män på de två linjerna.

Tillräcklig information för lösning erhålls

- A i (1) men ej i (2)
 B i (2) men ej i (1)
 C i (1) tillsammans med (2)
 D i (1) och (2) var för sig
 E ej genom de båda påståendena

10 Att dela lön

Du har fått ett arbete som ska vara färdigt inom två veckor. Du ska utföra arbetet hemma och arbetet består i att packa små tvålar i askar som ska användas på olika hotell i landet. Du kommer att få 4 000 kr för arbetet, men du måste stå för transportkostnaden själv.

Du hämtar materialet måndagen den 4 juli. Du tar först buss till "tvålfirman" och sedan taxi hem med tvålar och askar. Bussresan kostar 20 kr och taxiresan

kostar 180 kr. Efter en vecka förstår du att du inte kommer att hinna bli klar till fredagen den 15 juli. Du ringer till Anna och ber henne hjälpa dig. Hon kan arbeta tisdag, onsdag och torsdag sammanlagt ungefär i 30 timmar.

När ni arbetar märker du att Anna arbetar fortare än du. Anna packar i genomsnitt 150 tvålar per timme och du 100 tvålar per timme.

Sent på torsdag kväll är ni klara och du och Anna tar en taxi på fredag morgon och lämnar de paketerade tvålarna. Taxi-resan kostar 200 kr. Ni åker buss hem och det kostar 20 kr/person.

Efter två veckor får du lönen 4 000 kr. Hur ska den delas upp mellan er?

Gör två olika kalkyler, som visar hur pengarna kan fördelas. Motivera varför du har fördelat pengarna som du gjort.

- 11 Av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, och 6 (var och en använd exakt en gång) ska man bilda två naturliga tal, som skiljer sig från varandra med mindre än 50. Det räcker att hitta ett sätt att göra det på.

Kommentar

Problem nr 9 är hämtat från ett högskoleprov och testar om man vet vilka uppgifter som behövs för att kunna svara på frågan. 10 är första uppgiften ur breddningsdelen i kurs A-

provet vt 95. 11 är problem 1913 ur Nämnaren 19(3), s 42. Det gavs vid en tävling i Lettland 1992. Lösning i 20(1), s 41.

Inledande algebra

- 12 Känner du till hur man i huvudet kan beräkna kvadraten på tal som slutar på 5?

$$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1\,225$$

$$65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 4\,225$$

Ser du någon regel eller något mönster? Pröva din förmodan med ett annat tal. Stämmer det? Kontrollera gärna med miniräknaren. Formulera regeln i ord. Kan du förklara varför den är riktig eller bevisa att den stämmer?

- 13 Hur är det med produkten av två tal som ligger symmetriskt kring ett tal som slutar på 5?

$$87 \cdot 83 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 7 \cdot 3 = 7\,221$$

Ser du någon likhet med förra uppgiften? Kan du hitta en regel och bevisa att den gäller?

Kommentar

"Kan du förklara (bevisa)?" leder ofta till räkning med bokstäver. Det är kanske lätt för några men absolut inte för alla. Man kan se 13 som en fortsättning på 12.

- 14 En person "förkortar" $16/64 = 1/4$ genom att stryka sexorna. Stämmer det?

Finns det andra tal där denna säregna metod också ger rätt svar? Jfr $56/64 \neq 5/4$! Öka på antalet sexor och förkorta $166/664$, $1666/6664$... Kontrollera om det stämmer. Vad kan det i så fall bero på?

- 15 Talen ovan kan skrivas

$$(15a + 1)/(60a + 4)$$

för olika val av a . Förklara hur.

Hur kan uttrycket $(15a + 1)/(60a + 4)$ förkortas till $1/4$ oberoende av värdet på a ?

- 16 Det tar tre timmar för Kalle att måla en vägg. För Lisa skulle det ta 6 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det om de målar väggen tillsammans, samtidigt?

Kommentar

Uppgift 16 visar hur eleverna kan tänka på flera olika sätt. Genom att ordna deras arbete så att alla lösningar blir redovisade, når man också att lösningarna så småningom generaliseras.

Detta problem passar särskilt bra att ge när det är fem minuter kvar av lektionen. Då säger någon elev innan det hunnit ringa "fyra och en halv timme". Men från annat håll hörs "Det kan det inte bli, för då kan Kalle göra det själv i stället".

Nästa gång har nästan alla elever löst uppgiften och fått svaret 2 timmar. De tycker att svaret är rimligt, men flera av dem säger att de inte kan skriva ner sin lösning. En av dem säger att han förstår hur kompisens tänkt, när kompisens beskriver sin lösning. Han kan ändå inte beskriva sin egen lösning.

Eleverna kan först bilda par för att hjälpas åt att beskriva sina lösningar. Sedan vänder de sig parvis så att naturliga fyra-grupper bildas. Eftersom grupperna arbetar i olika takt finns andra uppgifter med samma struktur men andra siffror (och annan svårighetsgrad) i beredskap. Eleverna i grupperna får nu välja om de vill arbeta tillsammans alla fyra, två och två eller enskilt. När alla fyra i gruppen är färdiga visar de "diskussionen" och lösningarna för läraren. I uppgifterna som finns i beredskap ändras Kalles och Lisas tider:

16a Kalle 2 timmar, Lisa 4 timmar

16b Kalle 2 timmar, Lisa 6 timmar

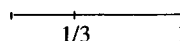
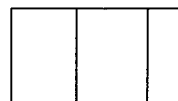
16c Kalle 1 timme, Lisa 4 timmar

16d Kalle 45 minuter, Lisa 1 timme

Det är intressant att följa diskussionen i grupperna. Eleverna tänker på olika sätt.

En del vill helst rita en rektangel (väggen) och med ett streck ange hur långt målaren hinner på en timme. Den andra målar från andra hållet. Från denna konkreta modell för tankandet till att beskriva den i symboler är det en lång väg. Att sedan tänka i symboler när lösningen skrivs ner är ytterligare ett steg.

Några elever har svårt för att "tänka i bit". De vill hellre se pro-



blemet som ett hastighetsproblem. De ritar ofta en tidslinje, egentligen en sträcka, där de markerar t ex att den ena målaren målar dubbelt så fort som den andra. Det betyder att om båda målar $1/3$ av den tid det skulle ta för den långsammare Lisa, så stämmer det – Lisa får ju hjälp av en som på samma tid målar dubbelt så mycket. (På motsvarande sätt kan man finna den gemensamma tiden som $2/3$ av den tid den snabbare Kalle skulle behövt ensam). I de andra uppgifterna tänker eleverna på samma sätt. Här kan det vara lika svårt – eller svårare – att beskriva hur man tänkt. Sannolikt har eleverna i tanken snabbt växlat mellan hastighet och målad yta. Inga elever använde vid försöket ekvationslösning som metod att lösa uppgiften.

De elever som har börjat "tänka i bit" har svårigheter att förstå de lösningar som bygger på förhållande (hastighet). Av intresse är också att se om eleverna byter metod när de får andra siffror att räkna med. Att byta siffror kan ju sägas vara att ta några steg på generaliseringens väg – blir det "likadant" eller inte? Så är vi framme vid att generalisera.

Ordet "generalisera" innebär här helt enkelt att från enskilda uppgifter med tal komma fram till att det inte spelar någon roll vilka talen är, man har en "struktur" på problemet och kan behandla det med bokstavssymboler för tal.

- 17 Det tar T_1 timmar för Kalle att måla en vägg. För Lisa skulle det ta T_2 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det om de samtidigt målar väggen tillsammans?

Kommentar forts

Elever som tänker i bit får $1/T_1 + 1/T_2 = 1/T$ medan de andra får $T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = T$. På båda sätten kan eleverna se att det uttryck de funnit täcker alla de fall de tidigare räknat på. Om de kan beskriva lösningen förstår de sannolikt också att sambanden gäller vilka tider T_1 och T_2 än representerar. I sammanfattning ser olika lösningar ut så här:

Uppg	Tänka i bit	I förhållande	Tid
16	$1/3 + 1/6 = 1/2$	$(1/3) \cdot 6 = 2$	2
16a	$1/2 + 1/4 = 3/4$	$(1/3) \cdot 4 = 4/3$	4/3
16b	$1/2 + 1/6 = 2/3$	$(1/4) \cdot 6 = 3/2$	3/2
16c	$1 + 1/4 = 5/4$	$(1/5) \cdot 4 = 4/5$	4/5
16d	$4/3 + 1 = 7/3$	$(3/7) \cdot 1 = 3/7$	3/7
	$1/T_1 + 1/T_2 = 1/T$	$T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = T$	T

En "abstraktion" som eleverna inte gjorde, men som en ekvationsvan lärare kan finna naturlig, är att kalla den gemensamma, sökta tiden T eller x (timmar) när de "tänkte i bit". I den första uppgiften får man då ekvationen $x(1/3) + x(1/6) = 1$. Men ekvationstänkandet mognar för många elever först senare under gymnasietiden.

Många gånger generaliserar elever utan att tänka på det. Den som t ex i ett sifferexempel sett hur man multiplicerar eller dividerar bråk tänker utan vidare att så kan hon/han räkna med alla bråk.

Algebra

- 18 Ge exempel på en formel du använt sedan grundskolan. Varför gäller den?

- 19 Stämmer det att man får

$$(mv)^2/m^2v = m$$

om man förenklar uttrycket? Förklara varför det är rätt eller – varför det är fel!

- 20 Förenkla uttrycket $(x/3 - 1/3)/(1 - x)$. Förklara hur du tänker.

- 21 Vi vill beräkna h då $V = a^2 h/3$

Kan man göra som beskrivs nedan? Vilket sätt är bäst? Varför?

- a) Lös ut h och sätt in siffervärden.
b) Sätt in siffervärden och lös ekvationen.

- 22 Ta två på varandra följande udda tal. Lägg ihop dem och dela summan med 2. Prova med olika startvärden. Vad upptäcker du?

- 23 Be en elev tänka på två tal – t ex positiva heltal – och nämna ett samband mellan dem. Be de andra ta reda på vilka tal hon tänker på. Det kommer fram många förslag som stämmer. Vilket är det rätta? Den första eleven får nämna ett samband till, osv.

Kommentar

Uppgifter av typ 18 kan komma upp naturligt och ofta.

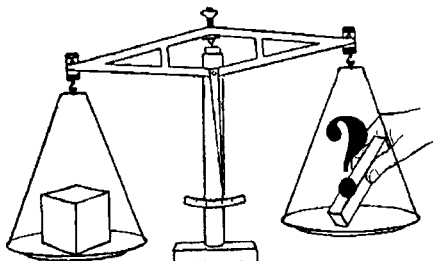
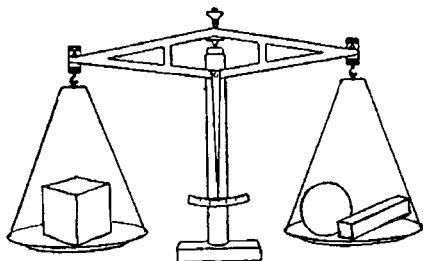
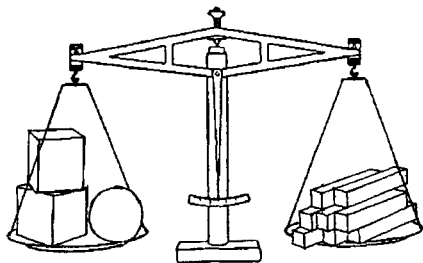
Fler problem liknande 19 och 20 för reflektion kring grundläggande algebra finns i Ekenstam, 1991.

21 kan göras enklare genom att också ange värden på ingående storheter – utom på h .

22 kan följas upp genom att man tittar på det allmänna fallet med talen $2n - 1$ och $2n + 1$. Halva summan blir $2n$, som alltid är ett jämnt tal. Följdfrågor som kan dyka upp är "Hur blir det om man har två på varandra följande jämna?" eller "Om man har tre på varandra följande udda tal?"

Om man gör som i 23, då och då, har man ganska trevligt i elevgrupper med dåliga förkunskaper även i grundskolan. Man kan räkna med att många elever har flera minnen av hur man gör än av vad det gäller. Några problem av denna typ – de behöver inte ta mer än 10 minuter per gång – gör att "söka två tal" blir naturligt.

23 Tolka följande figur och lös problemet.



24 Hildur i telefon till Sven: "Du Svenne jag har tröttnat på dig. Nu tar jag en cykeltur till Sune."

Svenne: "Men Hildur då, så kan du inte göra". Sven tar bilen för att köra ikapp Hildur innan hon kommer fram till Sune. När och var träffas Svenne och Hildur, eller är det Hildur och Sune som träffas?

Kommentar

Det avbildade problemet i 23 är lätt att uppfatta och kan leda till ekvationssystem. Problemet presenteras i Nämnaren 3, 1984/85, och där ges inte mindre än tio lösningsmetoder.

24 kan användas för introduktion till ekvationssystem. Vilka uppgifter behövs? Efter några fantasifulla förslag kom eleverna fram till att avståndet mellan Sventorp och Hildeberg är 10 km. Hildur cyklar 20 km/h. Sven kör 50 km/h. Sune bor i Sunne, 2 mil från Hildeberg.

	10 km	20 km
Sventorp		
Hildeberg		
Sunne		

Eleverna kan sätta sig i grupper och lösa problemet på så många olika sätt som möjligt. De har tidigare löst problem genom att

Gissa och pröva, Göra tabell, Hitta mönster, Utföra problemet, Resonera logiskt, Använda grafisk lösning, Använda ekvationer

Lösningarna som kommer fram i grupperna är skiftande från det konkreta att göra ett mönster, gissa och pröva till det logiska resonemanget om relativ tid. En flicka som "tjuvläst" i förväg klarade den traditionella lösningen med ekvationssystem.

När eleverna uppmanades att hitta en algebraisk lösning med hjälp av $s = vt$, som de använt förr, kom de fram till uppställningen:

	Hildur	Sven
Sträcka	?	?
Hastighet	20 km/h	50 km/h
Tid	?	?

Därefter var det dags för introduktionen av ekvationssystem (Widell, 1991). Lärobokens metod att på en halv sida beskriva hur man löser ekvationssystem skulle vara snabbare och effektivare? Men är det lika roligt och ger det samma kunskande på lång sikt?

- 25 Undersök med hjälp av miniräknare om det finns tal x så att

$$5 = 10^x \quad 50 = 10^x$$

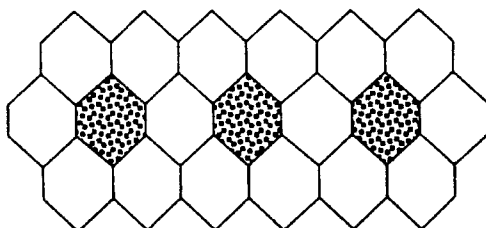
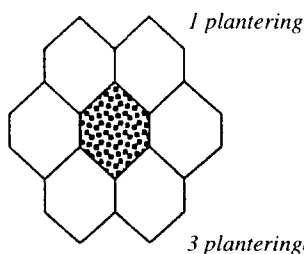
$$500 = 10^x \quad 5000 = 10^x$$

Ser du något mönster? Hur fortsätter det? Kan du förklara varför det blir så?

- 26 Man vill ha blomplanteringar i en dekorativ rad. Varje plantering har formen av en sexhörning och omges av kantstenar som har samma form. I figurerna är de mörka områdena planteringar, de ljusa kantstenar.

a) Ange ett uttryck för hur många kantstenar som behövs om man har n planteringar i en rad.

b) Hur många planteringar får man om man använder 166 st kantstenar?



Kommentar

25 är väl ett klassiskt sätt att förbereda introduktionen av logaritmer. En sådan förberedelse kan ju självfallet också göras omedelbart innan man inleder avsnittet. Men det är bra om upplevelsen fått tid att smälta in i erfarenhetsmassan.

26 är hämtat från kurs A-provet maj 1995.

Geometri

- 27 Ta två ståltrådar som båda är 24 cm. Låt dem bilda två olika rektanglar. Har de samma area?

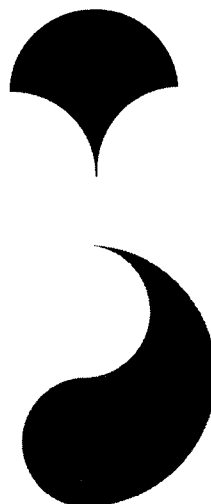
- 28 Vilken av alla rektanglar som kan bildas av en tråd som är 24 cm lång har störst area? Finns det något område som har tråden till omkrets och ännu större area?

Kommentar

Alltid finns det några som säger: "Javisst, det är ju samma tråd" – när det gäller 27.

Då är det inte så bra att direkt ta fram ett motexempel – eller att genast låta någon annan elev göra det. Låt vara att elevens förmodan inte bottnar i någon grundlig tanke eller i någon tanke alls. Eleven har gjort en fråga om hans synpunkt rimlig förmodan och den förtjänar att bemötas väl. "Är du säker ... kan du förklara... Hur ska du övertyga Maria, som inte tror..." Nu kommer extremfallet "ingen area" sannolikt fram, kanske som argument från Maria, och reaktionen "Ja det kunde jag ju förstått" uppstår förvisso. Det finns goda skäl att ta allt i positiv anda.

- 29 Hur beräknar man enklast areorna av figurerna nedan? (Se även Grevholm, 1991.)



- 30 Av ett A-4 papper kan man göra två olika cylindrar. Kommer de att ha samma volym?

Kommentar

När det gäller omkrets och area, respektive area och volym kan det vara givande att fråga om en för eleverna välkänd "sats" kan utvidgas från två till tre dimensioner.

Jämför uppgift 30 med 27. Uppgift 30 provas i åk 1 på en tvåårig gymnasielinje med "måttligt intresserade elever". Nästan alla elever tänker sig att cylindrarna har samma volym. "Det är ju samma papper". Här är frestelsen att genast avvisa denna tanke inte så stor som vid omkrets och area. Undersökningar görs, nästan alla får olika resultat. De flesta blir överraskade, (se vidare Larsson, 1992).

Men en av eleverna är övertygad om att volymerna är olika därför att cylindrarna saknar botten och lock. Lärarstudenten gör ett nytt problem:

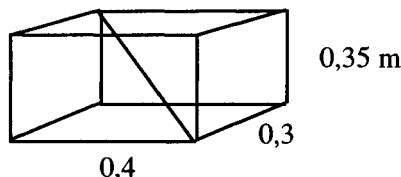
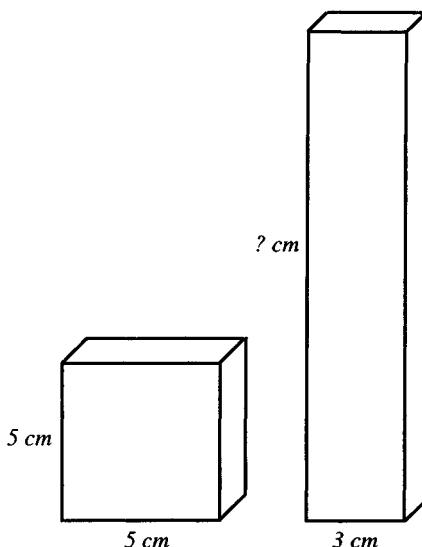
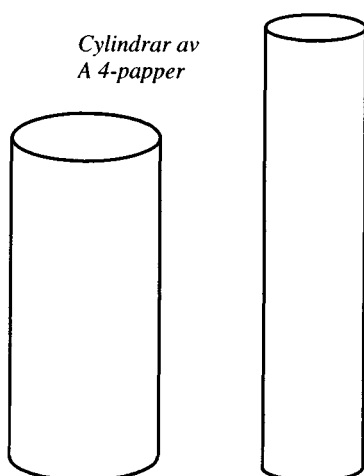
- 31 Låt oss tänka oss botten och lock och att begränsningareorna är lika stora. Får vi då lika stora volymer?

Kommentar forts

Lektionen är slut, och eleverna får som hemuppgift att fundera på saken. Nästa lektion övergår man klokt nog till rätblock. Man jämför en kub och ett rätblock med kvadratisk botten som anges i figuren. Pappmodeller används.

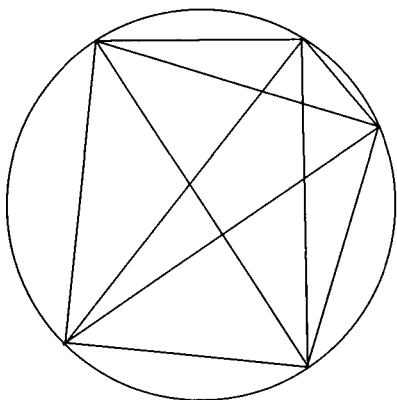
Klassen har besvär med att beräkna rätblockets höjd. Men så småningom går det, och volymerna kan beräknas. De flesta blir överraskade igen. Dels kan man förkasta tanken att botten och lock spelar någon roll. Men framför allt – samma area, och tänk att det kan bli så stor volymskillnad!

Någon säger, att tanken "samma begränsningare, samma volym" förefaller lite rimligare än "samma omkrets, samma area". Det är lättare att tänka i två dimensioner än i tre. Men antag nu att man ställt cylinder-rätblocksproblemet i en klass med "matematikvana" elever. Då hade man efteråt kunnat säga: Tänk om vi "förenklat" och tagit motsvarande problem i två dimensioner först! Tanken "det blir samma volym" hade inte framstått riktigt i samma ljus och överraskningen hade inte blivit riktigt lika stor. En undersökning hade förstås varit nödvändig – det kanske inte är likadant i tre dimensioner som i två. Men man kan lära av att förenkla



- 32 I figuren är en låda avbildad.

Får en 0,6 m lång stång plats i lådan? Formulera en regel eller sats som ger längden av rymddiagonalen i ett rätblock. (Pythagoras' sats i rymden).



- 33** Välj 2, 3, 4, 5 osv punkter på en cirkels omkrets och sammanbind varje punkt med alla andra. I hur många områden delas cirkelområdet? Ser du hur antalet områden ökar?

34 Trianglar

Din uppgift är att undersöka trianglar. Alla trianglar som du undersöker ska ha en sida som är 6,0 cm och höjden mot denna ska vara 4,0 cm.

- Rita en spetsvinklig, en rätvinklig och en trubbvinklig triangel med dessa mått.
- Mät sidorna och beräkna dina trianglars omkrets och area. Vilka slutsatser drar du utifrån dina beräkningar?
- Rita och bestäm sidornas längd i den triangel som har minsta möjliga omkrets. Hur lång är denna omkrets? Motivera också varför du valt denna triangel.
- Finns det ett största möjliga värde på omkretsen av en triangel med ovanstående mått? Hur ser i så fall en sådan triangel ut?

Vid bedömningen av ditt arbete tar läraren hänsyn till följande:

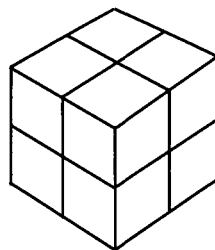
Hur korrekt och tydligt du ritar dina figurer. Om du gör korrekta mätningar och beräkningar. Hur väl du redovisar dina beräkningar och metoder. Hur väl du motiverar dina slutsatser.

Kommentar

Vanligen är problem valda så att det mönster, den regel eller det samband man funnit kan utvidgas och håller i t ex flera dimensioner. Eleverna kan också behöva se exempel på att det inte går som de tänkt. Mången elev som fått fram sviten 2, 4, 8, 16... i uppgift 33 hörs, om de fortsätter, stöna: "Jag har räknat fel...det måste bli 32..." Ges inte sambandet mellan antalet punkter p och antalet områden N av formeln $N = 2^{p-1}$? Det är "en rimlig förmodan" att det går bra. Men 6 punkter på periferin som sammanbinds på angivet sätt delar cirkelområdet i 31 delar... Antalet delområden tycks man få ur Pascals triangel, om man i var rad adderar de första fem talen (och struntar i övriga om det finns fler, och nöjer sig med färre än fem i rader där det finns mindre än fem tal). Varför är det så?

Uppgift 34 är hämtad från breddningsdelen på kurs A-provet i maj, 1995 och lämpar sig väl för grupparbete.

- 35** Skaffa dig eller tänk dig en målad kub med kantlängden 2 cm, där sidoytorna är indelade i kvadrater med sidan 1 cm. Tänk dig att den sågas i småkuber med kantlängden 1 cm. Hur många småkuber blir det och hur kommer de att vara målade?



Tänk dig sedan kuber med kantlängden 3, 4, 5, 6, 7, ... cm som sågas isär på liknande sätt. Hur många småkuber blir det och hur kommer de att vara målade? Hur många småkuber har 0, 1, 2, 3, ... målade sidoytor? Ser du något mönster?

Hur ser det ut om vi sågar itu en kub med kantlängden n cm?

Kommentar

Uppgift 35 utvecklar rumsuppfattning, att se mönster, att konstruera och kontrollera en formel och är lämpad för grupparbete. Några elevkommentarer: "Vi lärde oss mycket och upptäckte en del som vi aldrig tänkt på. Roligare ju svårare det blev. Bra, man lärde sig tänka tredimensionellt. Skitroligt, man fick använda hjärnan. Bra som omväxling till boken, som inte är rolig".

Eleverna kan få ledtråden att sätta upp en tabell för att systematisera arbetet. Om man anser att man behöver leda / styra arbetet mera, så kan man visa tabellen härintill.

Statistik

36 Sjukt om könsskillnader

Tabellen härintill visar antal anställda män och kvinnor samt sjukfrånvaron 1995 för en stor koncern.

Uppgifterna ovan baseras på totalundersökning och vi kan i det följande även utgå ifrån att inga mät- eller bearbetningsfel föreligger. Graviditetsfrånvaro är frånräknad (planerad frånvaro såsom tjänstledighet för graviditet - och militärtjänst - anses inte medföra några större produktionsstörningar).

Chefen för koncernen gjorde med anledning av frånvarouppgifterna i tabellen ungefär följande uttalande:

Att man i offentlig förvaltning inte gör någon åtskillnad mellan män och kvinnor vid tjänstetillsättningar är en sund och riktig princip, som man bör värna om. Inom näringslivet ställer sig dock saken något annorlunda. Som företagsledare har man ansvar för de anställda och aktieägarna och för företagets fortbestånd. Särskilt i kärva tider måste därför den ansvarsfulle företagsledaren vara ytterst noga med vilken personal han anlitar. Frånvarosiffrorna i tabellen visar klart att, om det finns manlig arbetskraft att tillgå, så bör man i första hand anställa män. Det går ju inte att folk är borta från jobbet hur som helst om man

Kubens kantlängd	Antal målade sidoytor					Antal småkuber
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
20						
<i>n</i>						

	Män	Kvinnor	Samtliga
Antal anställda	11 000	9 000	20 000
Antal sjukdgr genomsnitt	17,0	20,8	18,7

vill uppnå och bibehålla den höga produktionsnivå, som är nödvändig för företagets fortbestånd i nuvarande ytterst hårda konkurrensläge.

Vad anser du om uttalandet? Kan det vara så att skillnaden i medelvärden beror på annat än skillnad i kön?

Kommentar

Uppgifterna förefaller kanske bestickande men det är faktiskt inte alls klart att antalet sjukdagar skulle minska om man enbart anställde män. Det som skiljer de 11 000 i vänstra kolumnen från de 9 000 i mittenkolumnen behöver inte enbart vara faktorn kön. Det kan föreligga skillnader också beträffande andra faktorer som man tror har betydelse för sjukfrånvaron, t ex åldern och typ av arbete. Låt oss studera sjukfrånvaron för de 20 000 i koncernen efter en grovuppdelning av arbetena i tre grupper:

	Män sjkdgr	Kvinnor sjkdgr
Chefsbefattningar	4,5	5,0
Övr. "intressanta" befattningar	6,3	6,8
Löpande band o dyl	23,3	22,6

Kan uppgifterna i den senare tabellen verkligen överensstämja med de uppgivna totalmedelvärdena 17,0 och 20,8? Kan det vara så att differensen mellan totalmedelvärdena kan uppstå även om könsfaktorn inte alls har någon betydelse för sjukfrånvaron? (För vidare referenser och liknande problem se Andersson, 1991, s 140.)

37 Statistik om utbildning

Skoltidningen har fått nedanstående tabell från SCB och behöver några diagram till en artikel om framtidsutsikterna för olika utbildningsgrupper. Rita diagram som klart visar vad som kommer att hända med de olika utbildningsgrupperna. Rita gärna olika typer av diagram. Beskriv vad du vill visa med varje diagram. Vilka slutsatser kan man dra av tabellen och dina diagram.

Beräknad tillgång och efterfrågan av arbetskraft per utbildningsgrupp, 1995-2015. 1 000 tal.

Utbildningsgrupp	Tillgång			Efterfrågan		
	1995	2005	2015	1995	2005	2015
Industri och hantverks- utbildning (t. ex industri, bygg- och anläggning)	572	664	748	556	648	698
Naturbruk (t ex lantbruk, fiske)	64	77	90	60	65	64
Teknik	144	228	298	140	228	327
Vård t ex läkare, tand- läkare, sjuksköterskor)	195	230	232	192	226	248
Undervisning (t ex förskollärare, lärare)	262	292	281	268	297	297

Källa: SCB, Naturmiljön i siffror. 1990.

Funktionslära

38 Ali håller choklad med temperaturen 87°C i en termos. Han ställer sedan termosen utomhus där temperaturen är noll grader. För att beskriva hur temperaturen $y^{\circ}\text{C}$ hos chokladen förändras med tiden x timmar undersöker han två olika modeller.

Modell A: $y = 87 - 5x$

Modell B: $y = 87 \cdot 0,95^x$

- Beräkna chokladens temperatur efter 5 timmar enligt de båda modellerna A och B.
- Skriv med egna ord vad modell A respektive modell B innebär.
- Kommentera det resultat du får om du beräknar chokladens temperatur efter 20 timmar enligt de båda modellerna.

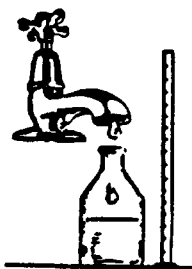
Kommentar

Uppgift 37 är hämtad från breddningsdelen i det nationella kurs A-provet, maj 1995. Problem 38 är ännu en uppgift från det första nationella kurs A-provet.

39 Filling Bottles

In order to calibrate a bottle so that it may be used to measure liquids, it is necessary to know how the height of the liquid in the bottle depends upon the volume in the bottle.

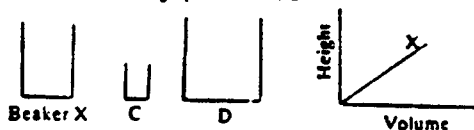
The graph (to the right) shows how the height of liquid in beaker X varies as water is steadily dripped into it. Copy the graph, and on the same diagram, show the height-volume relationship for beakers A and B.



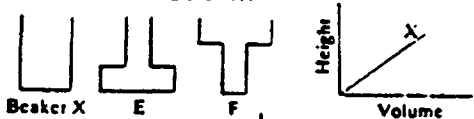
Figur till problem 39



Sketch two more graphs for C and D...



And two more for E and F...



40 Bottles and graphs

Here are 6 bottles and 9 graphs. Choose the correct graph for each bottle among the graphs to the right.

Explain your reasoning clearly. For the remaining 3 graphs, sketch what the bottles should look like.



Ink bottle



Conical flask



Evaporating flask



Bucket

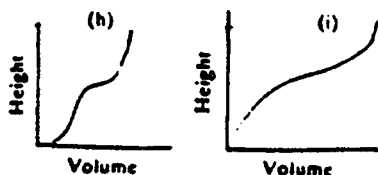
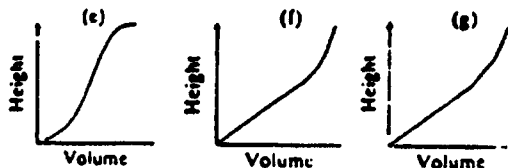
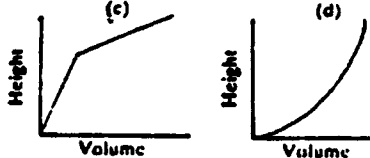
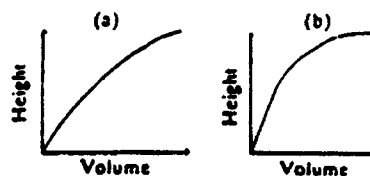


Vase



Plugged funnel

Figur med 9 grafer till problem 40



- 41 Det är lätt att skriva 100 och 1000 som potenser, 10^2 och 10^3 . Kan man skriva 500 som en tiopotens? För vilket tal är

$500 = 10^{(?)}$? Prova!

Hur kan 50 skrivas? $50 = 10^{(?)}$?

Går det med 5? $5 = 10^{(?)}$?

Rita linjen $y = 10x$.

Hur kan $y = 10^x$ se ut?

42 Folkmängden i ett område i Afrika växer med 3,5 % per år. Hur lång tid tar det tills folkmängden fördubblats? Rita en kurva som beskriver tillväxten med hjälp av din räknare.

Kommentar

Det är viktigt att träna förmågan att förstå och avläsa grafer. Många behöver erfarenheter för att undvika missförstånd. Att tolka och konstruera grafer är också stimulerande och be-
greppsstärkande.

Problem 39 och 40 kommer från Shell Centre of Mathematical Education i Nottingham. I

"The red Box" från samma ställe finns många fler exempel, (se Shell centre ..., 1985). Jämför uppgift 42 med uppgift 25. Uppgift 42 kan lösas på olika sätt. Jämför med beskrivningen i kapitel 2. Intressant kan också vara att prova med olika tillväxtprocent: 1%, 2% och 3% per år. Hur långa blir fördubblingstiderna?

Många olika problem som rör exponentiell tillväxt eller exponentiellt avtagande kan tas upp utan att man behöver nämna ordet logaritm. Att det finns elever som lär sig att man får talet i rutan genom att trycka på lg-knappen är bara bra. Då har man ju också vunnit något. Framför allt tycker eleverna inte att logaritmer är något konstigt när de dyker upp på allvar. Begreppet får tid att mogna.

Litteratur

- Amundsson, J. (1983). Problem genom tiderna. *Nämnnaren* 9(3), Tema Problemlösning, 65-69.
- Andersson, G. (1991). Nämnnaren och statistiken. *Nämnnaren* 18(3-4), 140-141.
- Bergstén, P. (1995). Drakar, vatten, eld och väderkvarnar. *Nämnnaren* 22(3), 46-48.
- Claesson, P. (1991). Huvudräkningsknep. *Nämnnaren* 18(3-4), 88-91.
- Dunkels, A. (1991). Problemlösning på geobräde. *Nämnnaren* 18(3/4), 96-100.
- Dunkels, A. (1992). Olympiadproblem från Lettland. *Nämnnaren* 19(3), 42-44. Lösningar i 20(1), 41-43.
- Ek, G. (1988). Om en flaggstång. *Nämnnaren* 15(4), 29-30.
- Emanuelsson, G. (1983). Hur räknar man harar? *Nämnnaren* 9(4), 51.
- Emanuelsson, G. & Munther, R. (1983). Samma födelsedag. *Nämnnaren* 9(4), 52-53.
- Fransén, J. & Gustavsson, H. (1980). Ett rikare föreningsliv. *Nämnnaren* 7(2), 49-54.
- Fransén, J. (1981). Matematik för kapitalister. *Nämnnaren* 7 (3), 39-43.
- Holm, S. (195). Den vanliga ovanligheten. *Nämnnaren* 11(3), 45-47.
- Hägghmark, P. (1983). Ett bi-problem. *Nämnnaren* 9(3), 56-59.
- Hägghmark, P. (1985). Skolmatematik för hundra år sedan. *Nämnnaren* 11(3), 6-7.
- Hägghmark, P. (1993). Cirkelns kvadratur. *Nämnnaren* 20(4), 48-49.
- Klefsjö, B. (1985). Lagar Findus Sveriges godaste köttbullar? *Nämnnaren* 12(2), 40-43.
- Kongsted, J. (1984). 1984 – ett anmärkningsvärt år. *Nämnnaren* 11(1), 52-54.
- Kvammen, P.I. (1986). Matematikk, natur og samfunn. *Nämnnaren* 12(3), 14-17.
- Larsson, S. (1992). Man lär så länge man har elever. *Nämnnaren* 19(3), 34-35.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnnaren* 22(3), 23-25.
- Munther, R. (1981). Hur mycket är en miljard? *Nämnnaren* 8 (1), 48-50.
- Munther, R. (1983). Ofantliga problem. *Nämnnaren* 9 (3), 54-55.
- Nämnnarens matematiktävling. Problemmuppgifter i *Nämnnaren* 20(1), 20(3), 21(1), 21(3), 22(1), 22(3) med lösningar i 20(2), 20(4), 21(2), 21(4), 22(2) resp. 22(4)..
- Persson, I. O. (1991). Huvudräkningsspelet Plump. *Nämnnaren* 18(3-4), 87
- Problemafdelningen. I varje nummer av *Nämnnaren* (25-50 problem i varje årgång).
- Reys, B. m fl (1995a). Vad är god taluppfattning? *Nämnnaren* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemafdelningen 51.
- Reys, B.m fl (1995b) Svenska elevers taluppfattning. *Nämnnaren* 22(3), 34-40.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995c). Meningsfulla tal. *Nämnnaren* 22(4), 8-12.
- Selander, T. (1981). Resemontörens problem. *Nämnnaren* 7(4), 53-56.

- Stephens, M. (1994). Undersökande arbete som utvärdering. *Nämnan* 21(4), 16-25.
- Tvete, K. (1987). Geometri – Jordmåling. *Nämnan* 14(2), 34-39.
- Widell, E. (1991). Ett problem som introduktion till ekvationssystem. *Nämnan* 18(1), 30-31.
-
- Andersson, G. (1989). *Lögn och sanning i statistik*. Stockholm: Liber.
- Dahl, K. & Nordquist S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.
- Elementa. Problemhäften. Centrala prov i gymnasieskolan i matematik, fysik och kemi. *Elementa*. Tidskrift för matematik, fysik och kemi.
- Elementas problemavdelning. *Elementa*. Tidskrift för matematik, fysik och kemi.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (1988). *Utmaningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1989). *Lilla utmaningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1991). Problem för lärare. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red), (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Riesel, H. (1968). *En bok om primtal*. Odense: Studentlitteratur.
- Strandberg, L. (1991). *Problemboken*. Malmö: Liber.
- Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Vaderlind, P. (1989). *Matematiska tankenötter*. Stockholm: Svenska Dagbladet.
-
- NCTM. Calender problems. *Mathematics Teacher*. Reston, Va..Author. (I varje nummer av denna tidskrift presenteras en kalender med ett problem för var och en av månadens dagar. Lösningar i samma nummer.)
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work*. Volume 1 & Volume 2. Australian Academy of Science. Canberra.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work*. Volume 1 & 2. Teachers guide to volume 1 & volume 2. Australian Academy of Science. Canberra.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Manchester; University of Nottingham.
- von Essen, E. & Winther Petersen, A. (red) (1994). *Utraditionelle matematikoppgaver*. København: Matematiklærerforeningen.

