

2

Att utgå från elevers kunnande

I detta kapitel diskuteras vad elever tänker om matematik och matematikundervisning och hur man som lärare kan ta reda på och bygga på deras kunskaper. Det gäller att få eleverna att tro på sina möjligheter och engagera sig.

Förkunskaper och erfarenheter

För att få en bild av elevernas kunskaper i matematik är det ganska vanligt att man använder någon form av diagnos när vid starten i gymnasieskolan. Svagheten med en skriftlig diagnos med traditionella uppgifter är att den mera pekar på eventuella brister – det är ju dessa som skall åtgärdas – än på den plattform av kunskaper som eleverna står på. Trots att avsikten är att hjälpa elever med behov av stöd, kan den upplevas som en form av ”prov”. Diagnosresultatet kan verka nedslående och bekräfta många elevers negativa syn på matematiken och på sina egna matematiska kunskaper.

Det är svårt att från ett diagnosresultat få en klar uppfattning om hur eleven löst en uppgift eller vilken tankeform eleven har använt. Genom att komplettera diagnosen med ett samtal (intervju) kan man få reda på hur eleven faktiskt tänkt. Vid sådana samtal finner man ofta att elevens svårigheter beror på missuppfattningar eller att eleven fastnat i alltför tidsödande tankeformer.

I stället för – eller som komplettering till – diagnoser av vanlig typ kan man be eleverna redogöra för sina kunskaper i matematik, muntligt eller skriftligt. På detta sätt kan eleverna få tillfälle att beskriva vad de kan, anser är viktigt i matematik och vad de tycker är svårt snarare än vad de inte kan. Det är viktigt för elevernas självförtroende och utveckling att deras kunnande respekteras och tas som utgångspunkt för undervisning.

Eleverna bör uppmanas att ge exempel på vad de minns inom olika områden såsom bråk, procent eller geometri. De kan ge exempel på vad de funnit lätt eller svårt, roligt eller tråkigt, nyttigt eller onödigt. De kan också (hemma eller i skolan) konstruera problem – lätta, lagom eller riktigt svåra – som visar vad de kan av matematiken från

grundskolan. Med hjälp av detta kan eleverna reflektera över vilka kunskaper de har och vad de uppfattar som matematik. Läraren kan därigenom få en god bild av elevernas uppfattningar och tänkande i matematik.

Ett förslag i samma riktning är att eleverna inte bara får ge exempel på matematik de minns, utan också beskriva sina upplevelser av och inställningar till ämnet.

En elevkommentar i samband med att en lärare prövade liknande former av utvärdering var: *Det är första gången någon matematiklärare frågat efter vad jag tänkt!*

Det förhållningssätt till eleverna som sådana övningar ger uttryck för borde kunna genomsyra hela kursen. I kapitel 4 *Varierad utvärdering* kan du läsa mer.

- Låt dina elever med hjälp av exempel beskriva eller demonstrera den matematik som de anser sig behärska bäst.
- Undersök dina elevers upplevelser och inställning till matematikämnet genom att t ex fråga dem om vad som är
 - lätt, svårt
 - roligt, tråkigt
 - bra att kunna, onödigt att lära sig
 - intressant/ointressant
- Hur skall man utforma en diagnos så att eleverna får visa vad de redan kan eller snabbt kan repetera utan att de behöver någon undervisning?
- Är det nödvändigt eller meningsfullt att sätta poäng på elevernas prestationer på en diagnos? För vem sätter man poäng? I vilket syfte? På vilka grunder sätts poäng? Vad används poängen till? Gäller dina kommentarer också prov som används som underlag för betygssättning?
- Utgå ifrån en diagnos som du givit dina elever och som du rättat. Be eleverna berätta vilka matematikkunskaper de anser sig ha inom det diagnostiserade området men som av någon anledning inte visar sig i diagnosresultatet.

Diagnosresultat

PRIM-gruppen i Stockholm publicerade 1990–91 resultaten av diagnoser gjorda i början av år 1 i gymnasieskolan. Oscarsson m fl (1990), Ljung m fl (1991). En del resultat är tankeväckande, och det kan vara mycket intressant att jämföra sin egen undervisningsgrupp med de elever som deltog i PRIMs diagnoser. Några elevuppgifter finns här som exempel.

Elevuppgifter

(Ursprungligt uppgiftsnummer och total lösningsfrekvens inom parentes)

- 1 Beräkna $5 + 3 \cdot 2$ (1, 55%)
- 2 Beräkna $0,3 \cdot 0,12$ (5, 56%)
- 3 Vad är hälften av $2/3$? (13, 39%)
- 4 Beräkna $2/3 + 1/6$ (14, 45%)
- 5 På en karta i skalan 1:100 000 är avståndet mellan två orter 12 cm. Hur stort är avståndet i verkligheten uttryckt i kilometer? (40, 23%)
- 6 En kartritare mäter upp avståndet 120 m mellan två föremål i naturen. Hur långt blir detta avstånd i millimeter på en karta i skalan 1:10 000? (41, 24%)
- 7 Beräkna värdet av uttrycket $x + 1/x$ då $x = 0,5$. (45, 18%)
- 8 Kalle har x kr. Pelle har 10 kr mer. Teckna ett uttryck som visar hur mycket de har tillsammans. Svara i enklaste form. (46, 15%)

- Prova uppgifterna ovan med dina elever, enskilt eller i grupp. Be dem lämna in fullständiga lösningar och förklara hur de tänkt, och vad de anser är lätt/svårt eller behöver repetera.
- Formulera om de fyra första uppgifterna till konkreta problem som kan lösas genom respektive beräkning. (Exempel: Du kastar fyra tärningar. Resultatet blir en femma och tre tvåor. Hur många "prickar" blir det?). Låt dina elever lösa de "nya" uppgifterna. Jämför resultaten med förra omgången och diskutera dem med dina elever.

Några frågor

Det finns många frågor man kan ställa sig när det gäller konstruktion, tolkning och uppföljning av diagnoser.

Stimuleras elever med goda kunskaper?

När elever får beskriva vad de kan och hur de ser på matematik, finner man att många elever har goda kunskaper. De tycker att uppgifterna i grundskolan varit för lätta, och de är utleda på t ex procent. Deras krafter och intressen har inte tagits tillvara som de önskat (17 % enligt NU-rapporten, s 24. Skolverket 1993).

Vad säger en poängsumma?

Poängsumman kommer oftast i blickpunkten på ett sätt som inte är avsett. Eleven tänker *Jag hade två poäng mer än Kalle!* Diagnosen uppfattas inte bara som ett test som visar vad jag kan eller inte kan, utan den säger också om jag är bra eller dålig, bättre eller sämre än andra. Om testet är bra konstruerat kan en hög poängsumma vara ett uttryck för bättre kunskaper än en låg. Men det man bör studera efter en diagnos är snarare delresultat som antingen visar kunskaper att utgå ifrån eller misstänkta brister, som man behöver samtala med eleven om.

Vilka kunskaper kommer inte fram?

En muntlig uppföljning ger fler dimensioner åt diagnosresultatet. En elev kan veta hur man beräknar arean av en rektangel eller en triangel, men kan bli osäker eftersom hon förutsätts mäta sidorna själv, vilket hon kanske inte är van vid eller inte tror är "tillåtet".

PRIM-testerna visar att många elever som deltar inte kan beräkna $\frac{3}{4} \cdot 12$ eller $\frac{2}{0,01}$. Beror det på att de helt saknar begrepp om bråk, decimalform och räkneoperationernas innebörd eller är det "de nakna siffrornas fenomen"? Eleven kanske inte kan associera till ett sammanhang eller till någon storhet. Eleven litar till räkneregler som dessvärre glöms bort, inte till vad hon vet och kan tänka ut. Skulle samma elev ha kunnat säga vad $\frac{3}{4}$ av 12 dm är eller hur många centimer det går på två meter?

I en test på vårdlinjen i Malmö, med elever i åldrarna 18 till 53 år, gavs bland annat uppgiften 1,20/0,60. Det var många som inte kunde lösa den. De uppfattade skolmatematiken som ett system av regler att följa. Läget blev ett annat om de tänkte på att köpa 60-öres frimärken för 1,20 kr.

Om en elev redan har ett tänkande, men i en annan ”klädedräkt”, är det lättare att inse att det man redan kan också kan utvecklas och användas här. Man behöver inte ”börja från noll”. Hur kan vi tillsammans med eleverna ta vara på det de redan kan?

Visar redovisade resultat på förståelse?

Det händer att elever svarar rätt på uppgifter i test men ändå saknar de kunskaper som uppgifterna har för avsikt att mäta. En elev kan t ex räkna ut en rektangelarea rätt utan att veta varför han multiplicerar längden med bredden.

Resultaten i PRIM-testerna på procent är jämförelsevis goda. Men hur har de tänkt? I en grupp elever i åk 1 kunde t ex 73% av eleverna beräkna 5% av 4 500, men bara 27% kunde säga vad fem hundradelar av 4 500 är.

Ett annat exempel ger berättelsen om Carina i åk 8, som löst bokens alla uppgifter rätt:

Jag fattar ingenting om procent. Jag tittar på de lösta uppgifterna och så skriver jag på samma sätt fast med andra siffror. Går det inte direkt provar jag med räknaren, för antingen är det gånger eller också är det delat med. Sen kollar jag med facit och så är det bara att skriva på samma sätt som i en färdiglöst uppgift.

Problemet med ytkunskaper och lotsning är välkänt i skolan. (Kilborn, 1979; Wyndhamn, 1988; Granström & Einarsson, 1995.)

Elevuppgifter

Utför beräkningarna och beskriv hur du gör.

9 a) $320 \cdot 0,8$ b) $2/0,01$

c) $3/4 \cdot 12$ d) 3 dividerat med $1/2$

10a) Är $320 \cdot 0,8$ större eller mindre än 320? Hur vet man det?

b) Hur många centimeter går det på 2 m?

c) Hur mycket är $3/4$ av 12 dm?

d) Kan verkligen 3 dividerat med $1/2$ bli 6? Hur kan man inse det?

- Prova elevuppgifterna 9 a – d vid ett tillfälle och 10 a – d vid ett annat. Jämför och diskutera resultaten.

Hur kan eleven utveckla sin matematik?

Alla elever har matematikkunskaper som inte kommer fram i diagnoser eller under arbetet på lektionerna. Ofta klarar eleven av de vardagssituationer hon/han hamnar i och kan använda matematik i sin närmiljö. Skolmatematiken berör inte alltid elevens verklighet och sätts kanske inte in i ett sammanhang som är välbekant för eleven. Det kunskande som utvecklas i klassrummet kan bli svårt att utnyttja utanför skolan. Ur kursplanen i matematik, Lpf 94:

Matematik är ett nödvändigt verktyg såväl för andra ämnen inom den gymnasiala utbildningen som för ett flertal ämnesområden inom eftergymnasiala studier.

Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer.

Det är känt att gymnasister i ämnen som ekonomi och fysik kan stå handfallna inför beräkningar som borde vara välbekanta. Fenomenet har i alla tider beskrivits som "vattentäta skott mellan ämnena".

Om man låter eleven skriva eller berätta om vad han/hon kan i matematik, kan man passa på att också be eleven berätta om när och i vilka sammanhang, som han/hon brukar använda matematik och kanske skulle behöva använda matematik men inte kan eller vågar. Hur skall vi annars kunna bryta den isolering som elevernas "skolutvecklade" matematikkunskaper tycks befinna sig i?

- Hur tar ni emot eleverna på er skola när de börjar sina matematikstudier? Får de tillfälle att visa vad de kan eller vad de inte kan? Vad är bra och vad kan bli bättre?
- Varför sägs det ofta att matematiken är skolans mest isolerade ämne? Hur kan vi bryta denna isolering?
- Hur skall man kunna förhindra att elever utvecklar den typ av "färdighet" som Carina visar exempel på?

Hur tänkte jag?

Vid mötet med en ny skola är det tryggt om den nye läraren förstår och bryr sig om vad eleven gjort och varit med om tidigare. Det finns elever som tappar tråden när läraren skriver $0,06 \cdot 300$ kr på tavlan. Läraren i grundskolan tycker kanske det blir mer konkret om "kronor" används och inte bara $0,06 \cdot 300$. Men eleven undrar: "Vad då 0,06? Vad är det där? Förr räknade jag 1% först, det lärde vi oss på mellanstadiet och det förstod jag. Nu är allt mycket svårare."

Motsvarande frågor ställer elever i gymnasieskolan. De kan behöva frågor som "Kan man räkna det här på något annat sätt? Hur brukar du göra?" Får de inga frågor eller kommentarer i den riktningen kan de uppfatta sitt kunnande som värdelöst och läraren som likgiltig för vad eleverna lärt sig tidigare.

Det är inte heller ovanligt att eleverna förmodas förstå vad de egentligen aldrig förstått. Att 6% av 300 kr kan skrivas och beräknas som $0,06 \cdot 300$ kr är bara ett exempel av många.

Vad eleverna lär sig i matematik på grundskolan är viktig information för gymnasieläraren. Det gäller även elevernas tidigare erfarenheter av arbetssätt och arbetsformer. I grundskolan är det inte ovanligt att eleverna arbetar laborativt i mindre grupper. De konstruerar också egna uppgifter. Laborativt arbete – mäta, väga, klippa och klistra – förekommer också i grundskolan.

I kapitel 5 kan du läsa mer om detta. Där föreslås också att eleverna får konstruera egna uppgifter, något som ingen högstadielärare i NU-rapporten uppger att de låter eleverna göra.

I samma NU-rapport anger 50% av lärarna att eleverna arbetar parvis i stort sett varje lektion. Eleverna har erfarenheter som kan tas till vara, och det gäller att få dem att berätta, förklara, motivera och diskutera matematiken.

Matematikkursen skall befästa och utvidga elevernas begreppsvärld. Ett viktigt mål är att de skall utveckla sin förmåga att uttrycka sig. Ett sätt att börja är att eleverna i smågrupper får diskutera sig fram till hur de skall förklara innebörden i formler och regler som de använt. De kan ha använt formler och regler utan att tänka på *att* eller *hur* de kan förstås. Om eleverna reflekterar över "vad jag kan i matematik", och inte bara tänker "jag vet hur det är!", och detta leder fram till "vi kan förklara hur det är!" – är väl det en fin utveckling?

En students syn

När studenter beskriver sin syn på matematik och sin egen förmåga ger det information om det förhållningssätt till matematik som de tillägnat sig. Några kommentarer från en lärarstuderande:

– *Bra att man kunde diskutera i gruppen hur man tänkte när man löste uppgiften. Det är ju det man lär sig på.*

– *Att man kan tänka matematik på så många olika sätt hade jag ej reflekterat över tidigare. Jag tänkte nog att de duktiga räknarna var sådana som löste uppgifter snabbt, tänkte snabbt och kom i håg vad man skulle göra snabbare.*

– *Främst har jag återvunnit intresset för matematiken. Jag tycker mig ha fått ett "större matematiskt självförtroende".*

Hur skall man undervisa så att sådana insikter kommer tidigare?

Meningen med matematik

Skolmatematiken som helhet uppfattas olika av lärare och elever. I NU-rapporten anger lärare i större utsträckning än elever problemlösning, överslagsräkning, förståelse och logiskt tänkande som viktigt. Ingen elev har nämnt de två sista områdena.

Matematiken uppfattas olika av lärare med olika utbildningsbakgrund och huvudintresse. En del ser i matematiken en samling (nyttiga) regler att använda, medan andra snarare ser idéer, mönster och relationer att utforska och diskutera.

Att lösa problem kan med det ena synsättet främst uppfattas som en tillämpning och som övning för att lära sig bärande regler och komma till önskat resultat. Med det andra synsättet kan problemlösning främst uppfattas som en inkörsport, ett medel eller motiv för att komma till insikt om och förståelse för olika sammanhang och företeelser. Båda synsätten förekommer naturligtvis parallellt och kan förenas. Se även kapitel 7.

Man lär sig förstå när man funderar själv och när man talar med andra. Sitt eget språk använder man för att befästa och utveckla sina begrepp. Men att växla mellan det egna språket och det matematiska språket kan vara problematiskt.

Om eleverna inte uppfattar motiv för och mening med symboler – siffror under tidigare skolår, bokstavssymboler för tal och andra symboliska beteckningar senare – så bidrar det till en klyfta mellan elevernas verklighet och skolmatematiken. Eleverna famlar mer eller mindre blint efter mönster och sammanhang bland symbolerna. Den vik-

tiga översättningen från eget språk till matematikspråk och omvänt går snett. Det är svårt att berätta, förklara och argumentera med hjälp av symboler som man inte förstår.

Senare års forskning om matematikinlärning har visat att bokstavs-symboler är lätta att använda, men svåra att förstå. Detta beror på att bokstäverna dels är som siffror, fast annorlunda, dels är som ord, fast annorlunda.

Alla måste bli medvetna om vikten av att man lär sig symbolerna samtidigt som man lär sig begreppen. Det borde därför vara fruktbart att använda det vanliga språket betydligt mer i matematikundervisningen.

Eleverna behöver träna på att formulera sina tankar utan att använda symboler innan de övergår till att skriva komplicerade sammanhang i den för matematiken karakteristiska, kortfattade formen. Enstaka tecken ger den invigde många associationer och begreppsbilder. För en oinvigd blir symbolspråket en börda om man först måste tränga igenom en svårforcerad mur för att förstå innebörden av själva tecknen. Det finns risk för att formler kommer att fungera som ersättning för tänkande.

Att arbeta tillsammans i grupper med 3–4 elever ger tillfälle att reda ut vad man menar och befästa sin uppfattning. Eleverna kan berätta med vanliga ord hur de tänker och vänta med symboler tills de behövs. För att kunna förklara för andra behöver man själv ha förstått eller tänkt igenom vad man inte förstått.

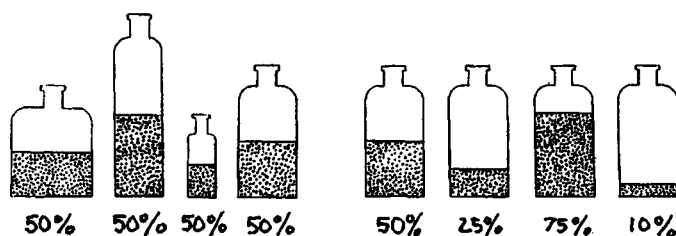
Det kan vara effektivt för eleverna att skriftligt beskriva hur de uppfattat en arbetsuppgift eller den senaste veckans arbete. "Dagbok" av typen "Vad jag lärt mig idag/den här veckan" används med framgång av många lärare. Man får se hur eleven uppfattat det arbete det är fråga om, och eleven får möjlighet att klargöra för sig själv vad hon/han tänkt och gjort.

- Välj ut några formler eller regler som innehåller symboler och nyligen behandlats. Låt eleverna diskutera i grupper varför man ställt upp formlerna och vad de egentligen säger för en invigd och för en oinvigd. Diskutera svårigheter att förstå och hur man skall gå tillväga för att förstå bättre.
- Välj en eller ett par olika arbetsuppgifter som behandlats den senaste veckan. Låt eleverna skriftligt beskriva hur de uppfattat uppgiften, hur de löst den och vad de lärt sig av uppgiften. Be dem konstruera en annan uppgift som de anser är mera intressant.
- Diskutera utfallet av uppgifterna ovan med dina kollegor.

Procent – ett av flera nyckelbegrepp

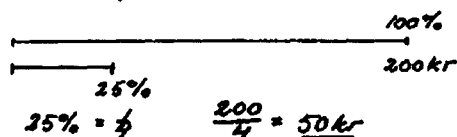
Diagnosresultat på procent kan vara rätt goda, men den bakomliggande förståelsen kan ändå vara bräcklig. Det står klart för alla att god förståelse för proportionalitet och procent är viktig. Vad kan man göra för de elever som trots allt inte tillägnat sig begreppen? Här följer några förslag:

- att man gör "en förändring i taget" när man börjar med procent.
- att man arbetar med begreppet "del av" och med förhållandet mellan olika storheter i olika sammanhang.
- att eleverna ritar schematiska bilder med markering av delen och helheten. Bilderna underlättar förståelsen av beräkningarna.

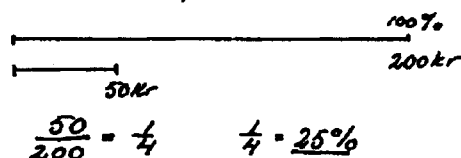


- att procentbegreppet belyses samtidigt från olika sidor. Hur mycket är 20% av 200 kr? Hur många procent är 40 kr av 200 kr?
- att övergången från att räkna via 1% till decimalform särskilt beaktas.

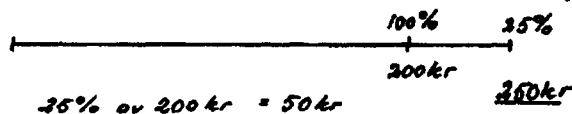
1. Hur mycket är 25% av 200kr?



2. Hur många procent är 50kr av 200kr?



3. Priset 200kr ökar med 25%. Nya priset?



I samband med det sista förslaget kan man reflektera över om det kanske är bra att eleverna tänker via 1% (eller 10%) i många sammanhang. Kan övergången till annat tanke- och skrivsätt skjutas upp till en senare tidpunkt för en del elever? För att räkna med förändringsfaktor behöver man decimalformen. Men en del elever kan ha behov av mer närliggande mål. Den nämnda överslagsräkningen räcker vid många av vardagens procentproblem.

Åsikterna bland lärare går isär när det gäller användandet av bråkform respektive decimalform i samband med procenträkning. En del lärare anser att $(3/100) \cdot 600$ kr förefaller mer "påtagligt" för eleverna än $0,03 \cdot 600$ kr. Många kan inte se "tre hundra delar" bakom 0,03, medan det är något klart och suggestivt i divisionen med heltalet 100.

$$\frac{3}{100} \cdot 600 \text{ kr} = \frac{3 \cdot 600}{100} \text{ kr}$$

Beräkningen 3% av 600 kr ligger också närmare beräkningen via 1%. Vidare framhåller de som föredrar bråkformen att den är bättre om man skall räkna med p procent.

Målet att eleven skall kunna berätta, förklara och argumentera innebär att man måste kunna förstå och förklara för sig själv och andra inte bara hur man räknar via 1% utan också hur man räknar både i decimalform och i bråkform?

Som alltid, har man som lärare att försöka möta spridningen i elevernas kunskaper och intresse. Här ges ett förslag till hur man kan arbeta på olika nivåer med procenträkning. Idén är hämtad från den amerikanska lärarföreningens underlag till kursplan i matematik från förskola till åk 12, *Standards*. Det bearbetade exemplet är hämtat från Emanuelsson m fl, (1992).

Observera den stegvisa ändringen av beteckningssätt, övergången till mer generella metoder och användningen av ett undersökande arbetssätt med räknare och datorer.

- Formulera ett procentproblem med hjälp av en tidning, och diskutera med eleverna olika sätt att lösa det, med hjälp av en figur, i bråk- och decimalform, genom att först räkna ut vad 1 % är, med förändringsfaktor osv på olika sätt som beskrivs i kapitlet. Vilka reaktioner får du från eleverna? Diskutera utfallet med dina kollegor.
- Hur tycker du att man kan förbättra utbytet av undervisningen kring procent?

Olika nivåer i procenträkning

En elev sätter in 1000 kr på ett bankkonto med 6% ränta. Hur mycket pengar finns det på kontot efter 10 år?

På den första nivån kan alla elever bestämma beloppets storlek vid slutet av varje år genom att successivt använda sambandet:

Beloppet vid årets slut = Beloppet vid årets början + $0,06 \cdot$ (beloppet vid årets början).

Med miniräknare kan man beräkna:

År 1: Beloppet vid årets slut:
 $1000 + 0,06 \cdot 1000 = 1060$

År 2: Beloppet vid årets slut:
 $1060 + 0,06 \cdot 1060 \approx 1123,6$

År 3: Beloppet vid årets slut:
 $1123,6 + 0,06 \cdot 1060 \approx 1191$

...

År 10: Beloppet vid årets slut:
 $1689,5 + 0,06 \cdot 1689,5 \approx 1790,8$

Man kan också använda ett annat skrivsätt för att söka ett mönster:

År 1: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^1$

År 2: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^2$

.....

År 10: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^{10}$

Mönstret kan verifieras genom en jämförelse med de värden man fick tidigare. Man kan se hur kraftfull metoden med tillväxtfaktor är, genom att studera alternativa frågeställningar:

- Vad händer om tiden ändras till 20 år?
- Vad händer om startbeloppet ändras till 2000 kr?
- Vad sker om årsräntan ökas till 12%?

Ett kalkylprogram är en naturlig förlängning och ett kraftfullt hjälpmedel för vidare undersökningar.

På nivå 2 kan eleverna generalisera sina enskilda beräkningar för varje år och använda mera ändamålsenliga beteckningar:

$$A_0 = 1000$$

$$A_1 = 1000 + 1000(0,06)$$

eller

$$A_1 = A_0 + A_0(0,06) = A_0(1,06) \text{ och}$$

$$A_2 = A_1 + A_1(0,06) = A_1(1,06)$$

....

$$A_{10} = A_9(1,06)$$

Utveckling och insättning ger:

$$A_1 = A_0(1,06)$$

$$A_2 = A_1(1,06) = A_0(1,06)^2$$

.....

$$A_n = A_0(1,06)^n, \text{ där } n \text{ är antalet år}$$

och ett steg till i generaliseringen ger

$$A_n = A_0(1+r)^n$$

Efter nivå 2 kan eleverna fortsätta att generalisera det senaste sambandet så att r tolkas som ränta per investeringsperiod och n är antalet investeringsperioder. Man kan då behandla problem där räntan beräknas per halvår, kvartal, månad osv – till omedelbar kapitalisering och exponentialfunktioner.

På olika nivåer kan eleverna med hjälp av räknare och datorer diskutera problem såsom:

- När fördubblas värdet om
 - a) räntan fördubblas?
 - b) tidsperioden fördubblas?
- Vilka är fördubblingsperioderna om räntesatsen är 7%, 10% eller 20%?
- Man kan använda sambandet $d = 72/p$ för att uppskatta fördubblingstiden d , när räntan är p %.
- Testa sambandet för olika räntesatser och pröva dess tillförlitlighet.
- Hur mycket måste du sätta in i dag för att spara ihop till 200 000 kr på 20 år?

Symbolspråk och förståelse

Formler

För många är en formel inte någonting man kan tänka sig att förstå. Den bara finns. För en del är en formel to m avskräckande. Man *kan*, eller man *kan inte*, räkna med den. Man tänker sig inte att man skulle kunna tänka ut hur den har uppkommit eller hur man kan kontrollera att den är riktig.

Hur möter eleverna formler i grundskolan och i gymnasieskolan? Vad förväntas de förstå och göra?

I många tekniska sammanhang behöver eleverna kunna räkna med en formel. De byter ut bokstavssymbolerna i formeln mot givna numeriska värden i t ex $s = v \cdot t$ eller $U = R \cdot I$. Sammanhanget gör det meningsfullt, men det kan finnas en ingrediens av mekanisk obegrip- lighet i arbetet.

Eleverna kan bearbeta sin uppfattning av formler genom att berä- ta, förklara och argumentera kring de enkla formler eller regler de mött tidigt i grundskolan, t ex vid enhetsbyten eller area- och volym- beräkning. Diskussionen kan sedan utvecklas till andra formler som eleverna behandlat senare. Hur har man kommit fram till uttrycket för cirkelarean eller formeln $s = v \cdot t$? Hur kan man förstå och använ- da sambandet mellan Celsius- och Fahrenheitgrader?

Kontrollera formler kan eleverna också göra. Formeln för voly- men av ett klot kan vara svår att resonera sig fram till, men den går att kontrollera i en modell med mätglas och vatten.

Det kan också vara en upplevelse att konstruera en egen formel. Då eleverna gjort en formel själva, kan det vara lättare att acceptera formler som andra gjort.

Ekvationer

Man kan tycka att något underligt sker under grundskoletiden. En elev som tidigare utan vidare svarat på frågan ”Med vilket tal skall man dividera 12 för att få resultatet 4?” kan senare inte lösa ekvatio- nen $12/x = 4$. Hur kan detta komma sig?

Och hur kan det komma sig att en elev av fem i början av de tidiga- re treåriga linjerna inte kan lösa ekvationen $12 - 3x = 6$, även om eleven har läst särskild kurs tidigare? Betyder uttrycket $12 - 3x = 6$ just ingenting?

Man arbetar i allmänhet ganska mycket med ekvationslösning i grundskolan. Det är däremot mindre vanligt att eleverna konstruerar egna uppgifter, eller gör uppgifter till varandra – något som skulle kunna understödja deras begreppsbyggnad. Lärare som provat detta

berättar att om elever får be sina kompisar "ta reda på mitt tal", så kan de konstruera mycket "livgivande" ekvationer, och även ekvationssystem.

Kopplingen mellan ekvationsavsnittet och andra moment i kurserna bör observeras. I samband med formler finns det många problem som naturligt leder till ekvationer. Här kan eleven hämmas av traditionen att formler i första hand skall behandlas så, att man byter bokstäverna på ena sidan likhetstecknet mot siffror. Detta leder ibland till en viss oflekterad monoton i elevens arbete.

Procent är ett moment som kan tas upp i samband med ekvationslösning. Se på uppgiften: Hur många procent är 70 kr av 350 kr?

Vilket är lättast, att muntligt (eller skriftligt) beskriva och förklara,

$$\frac{70}{350} = 0,20 = 20\%$$

eller

$$70 = \frac{x}{100} \cdot 350?$$

- Prova någon av följande uppgifter med dina elever. Diskutera resultaten med dem och med dina kollegor.

- Välj en formel som du känner till, t. ex.

$$s = v \cdot t \quad \text{eller} \quad U = R \cdot I$$

Beskriv vad formeln innebär. Var används den, av vem och hur? Hur tror du att man kommit fram till den? Varför har man formler?

- Ta en tråd (t.ex. 48 cm) och forma den till rektanglar med olika bredd. Hur stora areor har rektanglarna?
Gör en värdetabell och ett diagram som visar hur rektangelns area beror av rektangelns bredd. Försök ta fram en formel som beskriver din värdetabell och ditt diagram.
Om du skriver in formeln på en dator eller en räknare kan du se om den ger samma resultat som du fått.
- Hur lång är den längsta stång, som får plats i en låda?
Uttryck stångens längd med hjälp av lådans kantlängder, så att ditt uttryck kommer att likna Pythagoras' sats.

Elevuppgifter

- 11 Vad betyder ekvationen $12 - 3x = 6$? Vad ska $3x$ vara för att likheten ska gälla? Lös ekvationen med olika metoder och jämför.
 - 12 Sambandet mellan Celsius och Fahrenheitgrader ges av sambandet $9C = 5 \cdot (F - 32)$.
 - a) Förklara för en besökande amerikan hur varmt det är när det är 37°C .
 - b) Hur många grader Celsius är 40°F ?
 - 13 a) Lös ekvationen $300 = 5x$.
 - b) Stina kör 300 km på 5 timmar. Vad har hon för medelfart? ($s = v \cdot t$). Vad finns det för likheter mellan denna uppgift och ekvationen i a) ovan?
 - 14 Hur många procent är 70 kr av 350 kr? Aziz löste problemet med hjälp av ekvationen $70 = \frac{x}{100} \cdot 350$. Hur tänkte han?
- Låt eleverna lösa uppgifterna.
Diskutera resultatet med dina elever och kollegor.

Litteratur

- af Ekenstam, A. (1982). Geometrin genom skolan. *Nämnnaren* 8(3), 10-21.
- af Ekenstam, A. (1991). Dubbel algebra. *Nämnnaren* 18(3/4), 130-134.
- Ahlström, R. (1994). Kan vi nå bättre resultat på högstadiet? *Nämnnaren* 21(4), 13-15.
- Brekke, G. & Støren, H. (1995). Kvalitet i matematikundervisningen. *Nämnnaren* 22(3), 10-14 och 26-27.
- Brekke, G. (1995). Opfatninger av desimaltall. *Nämnnaren* 22(4), 27-36.
- Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Nämnnaren* 22(2), 15-22.
- Emanuelsson, G. (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnnaren* 22(2), 2-3.
- Firsov, V. (1995). Algebra i olika former. *Nämnnaren* 22(3), 31-33.
- Grevholm, B. (1993). Vem ägnar sig åt matematik? *Nämnnaren* 20(4), 16-19.
- Grevholm, B. (1994). Ett centralt uttalande om flickor och matematik. *Nämnnaren* 21(3), 18-25.
- Gunnarsson, B. (1988). Metodikuppgift för livet? *Nämnnaren* 15(4), 11-14.
- Lerman, S. (1989). Att göra matematik. *Nämnnaren* 16(2), 6-12.
- Löwing, M. (1986). Vardagsdiagnostik. *Nämnnaren* 13(2-3), 104-105.
- Moberg, J. (1987). Hur kommer det att gå för Torvar? *Nämnnaren* 14(2), 20 - 21.
- Nämnnaren, Tema Diagnos och utvärdering. (1984). *Nämnnaren* 10(4).
- Rosén, B. & Svartborn, B. (1986). ELAM - Elev- och linjeanpassad matematik. *Nämnnaren* 13(2-3), 107-108.
- Ryding, R. (1984). Hur diagnostiserar man AMU-elever? *Nämnnaren* 10(4), 27-28.
- Silvén, S. (1995). Hur blev den intelligenta en "dum" elev. *Nämnnaren* 22(3), 16-19.

- Strandenes, B. J. K. (1989). Er undervisningsopp-
legget årsak til at mange elever har matematik-
kvanster? *Nämnaren* 16(1), 28-32.
- Wistedt, I. (1993). Matematiska samtal. *Nämnaren*
20(4), 21-23.
- Anderberg, B. (1992). *Matematikmetodik i grund-
skolan del 1 & 2*. Stockholm: Bengt Anderberg
läromedel.
- Anderberg, B. & Söderström, U. (1988). *Täljaren:
Bokstäver att räkna med*. Kristianstad: Utbild-
ningsförlaget.
- Björkqvist, Ole: Social konstruktivism som grund
för matematikundervisning. *NOMAD* 1(1), 8-17.
- Brandell, G. m fl (1994). *Kvinnor och matematik*.
Rapport från konferens i Luleå 13-16 juni 1993.
Högskolan i Luleå.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommen-
tarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bi-
drag till Sveriges matematiklärarförenings som-
markurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T.
(Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i inter-
nationell belysning*. Göteborgs universitet, Insti-
tutionen för ämnesdidaktik.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red)
(1992). *Geometri och Statistik*. Lund: Student-
litteratur.
- Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning
om liv och arbete i svenska klassrum*. Stock-
holm: Skolverket.
- Johansson, B. (1993). *Nordisk matematikdidaktisk
forskning i dag. En kartläggning mot en histo-
risk bakgrund*. Göteborgs universitet, Institutio-
nen för ämnesdidaktik.
- Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet – bakgrund
och erfarenheter*. Skolöverstyrelsens Utbild-
ningsforskning FoU-rapport 37. Stockholm: Li-
ber Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1979). *Ämnesmetodiska processana-
lyser i matematik inom KomVux*. Rapport 8:1979.
Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
- Kilborn, W. (1991). *Didaktisk ämnesteor i mate-
matik. Del 2. Rationella och irrationella tal*.
Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteor i mate-
matik. Del 3. Mätning, geometri, funktioner,
sannolikhetslära och statistik*. Malmö: Almqvist
& Wiksell, Hermods.
- Kupari, P. (1993). Matematiken i den finska grund-
skolan. Attityder och kunskaper. *NOMAD* 1(2),
30-58.
- Ljung, B-O., Oscarsson, E. & Rosén, B. (1991).
*Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten
på treåriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-
gruppen, HLS.
- Nilsson, M. (1993). *Matematikundervisning i gym-
nasieskolan. Del I – III*. Lärarhögskolan i Malmö.
- Oscarsson, E., Rosén, B. & Ljung, B-O. (1990).
*Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten
på tvååriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-
gruppen, HLS.
- Stake, S. (1989). *Täljaren: Del av en helhet*. Kris-
tianstad: Utbildningsförlaget.
- Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994).
Lära matematik. Lund: Studentlitteratur.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problem-
miljö. Skolan som kontext för tänkande i elemen-
tär matematik*. SIC 26, 1988. University of Lin-
köping: Studies in Communication.
- Askew, M. & Wiliam, D. (1995). *Recent Research
in Mathematics Education 5–16*. London:
HMSO.
- Biehler, R. et al (Eds.) (1994). *Didactics of mathe-
matics as a scientific discipline*. Dordrecht:
Kluwer.
- Christiansen, I. M. (1994). "Informal activity" in
mathematics instruction. *NOMAD* 2(3/4), 7-30.
- Grevholm, B. & Hanna, G. (Eds.) (1995). *Gender
and Mathematics Education*. Lund: Lund Uni-
versity Press.
- McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys R.E. (1992). A
proposed framework for examining basic number
sense. *For the Learning of Mathematics* 12: 2-8,
44.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1990). *Teaching and Learning Mathematics in
the 1990s. NCTM Yearbook 1990*. Reston, Va.:
Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1991). *Professional Standards for Teaching
Mathematics*. Reston, Va.: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1994). *Professional Development for Teachers
of Mathematics. NCTM Yearbook 1994*. Reston,
Va.: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1991). *Grades 9-12 Addenda Series: Algebra in
a technologicaal world. Connecting mathematics.
A core curriculum: Making mathematics count
for everyone. Data analysis and statistics across
the curriculum. Geometry from multiple perspec-
tives*. Reston, Va.: Author.