913a

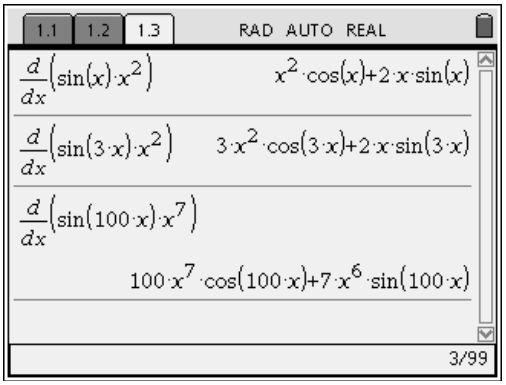
Symbolhanterande Räknare

Jonas Sjunnesson är lärare i matematik och fysik vid Balderskolan i Skellefteå. Han har under tre år deltagit i ett pilotprojekt som syftat till att undersöka hur symbolhanterande räknare kan påverka både undervisningen och provsituationen.

Inledning

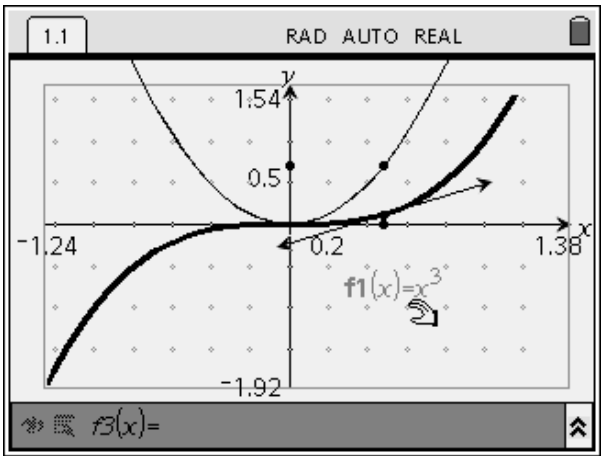
De symbolhanterande räknarna är ett hjälpmedel som rymmer en otrolig potential. Som jag ser det är en av de stora fördelarna med detta hjälpmedel att du som lärare har möjlighet att så att säga ”vända ordningen” i undervisningen. Vad jag menar med detta är att det finns goda möjligheter att låta eleverna själva undersöka och upptäcka samband! Jag kommer i min presentation att ge flera konkreta exempel på situationer där jag tycker att detta hjälpmedel verkligen tillfört något! Här kommer några av dessa exempel.

Hitta produktregeln



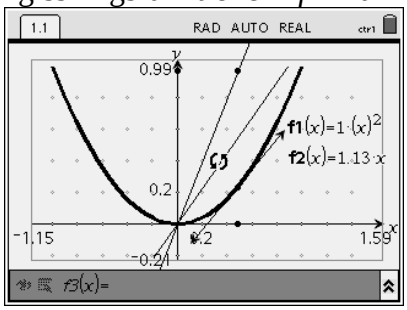
Här gjorde jag så att jag skrev upp ca 5 produkter på tavlan som de sedan fick derivera med hjälp av räknaren. Jag hade också skrivit upp $y(x) = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow y'(x) =$????? på tavlan. Uppgiften var alltså att försöka hitta ett mönster och utifrån detta formulera en trolig deriveringsregel. De fick också testa sin regel med ytterligare ett par produkter. Själv gick jag runt och hjälpte och ”sparkade” på de som inte själva direkt såg mönstret. Efter ca 20 min hade samtliga 28 elever produktregeln formulerad i sina block. Jag tycker detta var en bra början då eleverna fick en känsla av att de själva funnit regeln. Vi avslutade med en diskussion ”om vi hade visat produktregeln nu?”. En bra möjlighet att diskutera vad som formellt menas med ett bevis. Efter detta genomförde jag beviset på tavlan. Mitt nästa exempel är hämtat från matematik C och är också ett exempel på hur räknarna kan ge eleven möjlighet att upptäcka matematiken.

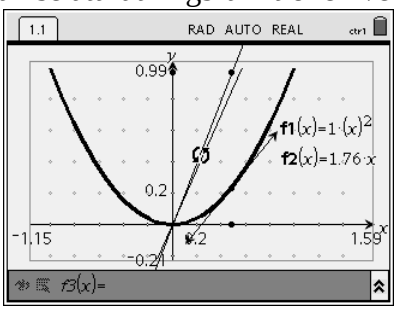
Hitta deriveringsreglerna

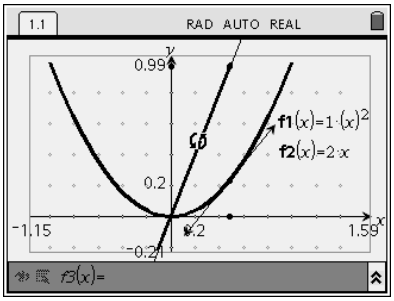


I denna övning använde vi en funktion som heter locus för att visa derivatan till en funktion grafiskt. Till höger syns funktionen $f(x) = x^3$ och dess derivata automatiskt ritad. Drar man i punkten på *x*-axeln så flyttas tangenten på funktionen. Här passade det att som demonstration resonera om tangentens lutnig och derivatans graf! Om man ändrar till en annan funktion ”hänger” derivatan automatiskt med. Detta gjorde jag innan vi egentligen pratat om derivata, så vi kallade derivatans graf för lutningsfunktionen. Jag använde alltså detta innan vi härledde deriveringsreglerna för att komma fram till dessa. Vi varierade funktionen och försöka sedan gissa vilken

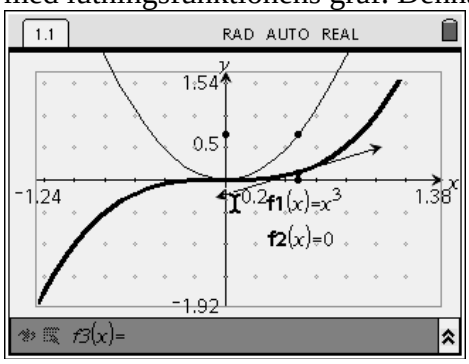
lutningsfunktionen var. Här nedan ser vi funktionen $f(x) = x^2$ och hur man genom att vrida i ”gissningsfunktionen” *f2* Man kan se att lutningsfunktionen verkar vara $2x$

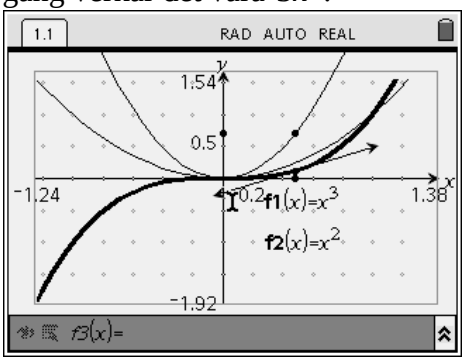


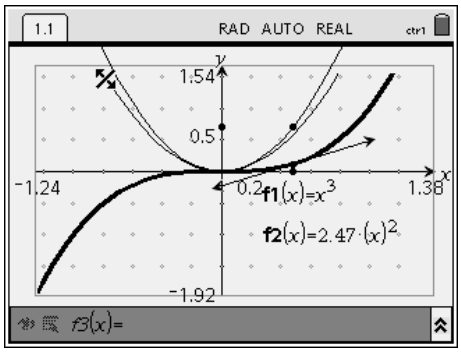


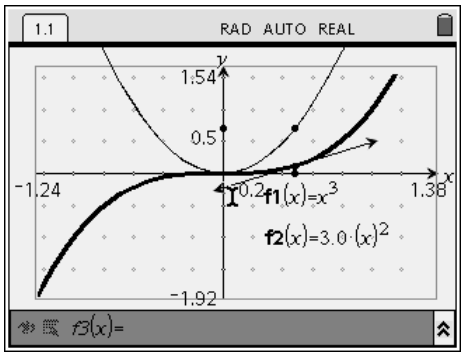


Efter detta tog vi $f(x) = x^3$ och gjorde på samma sätt. Här gissar jag på att derivatans funktion är $f(x) = x^2$ men tvingas sedan vrida ”gissningsfunktionen” tills den sammanfaller med lutningsfunktionens graf. Denna gång verkar det vara $3x^2$.







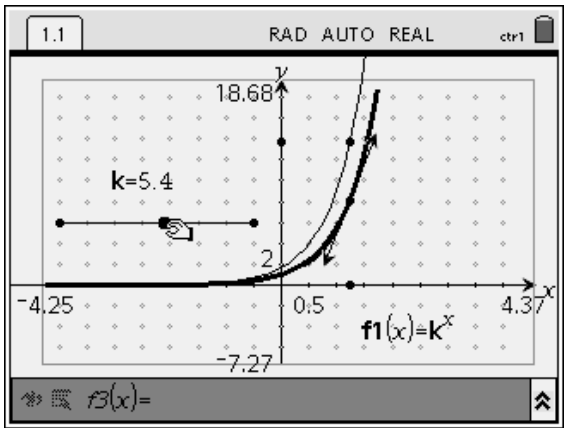


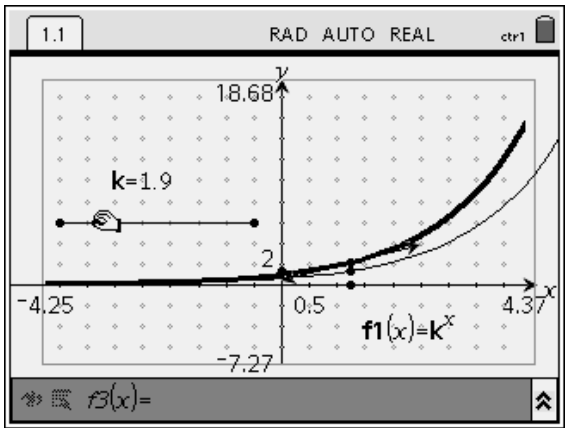
Jag gjorde så att jag visade med en funktion hur eleverna skulle göra sedan fick dom prova själva på andra för att hitta ett mönster! Återigen ett exempel på möjligheten att undersöka själv först, innan bevis och härledningar. Tror att denna typ av övning tillför en del. T.ex. vad gäller att koppla ihop derivatans och funktionens graf samt en övning på att ”känna” igen funktioner. (-derivatan till $f(x) = x^3$ verkar vara en andragradare… men vilken??) Det är också positivt när man sedan tar fram reglerna med hjälp av derivatans definition då man ju vet vad man letar efter. Ytterligare ett sätt att framställa något är ju oftast också bra! Alltid är det någon elev som har lättare att acceptera deriveringsreglerna på detta sätt! Denna ”fil” Kan givetvis användas för olika funktionstyper t.ex. sinus och cosinus eller vid införandet av talet e.

Talet e

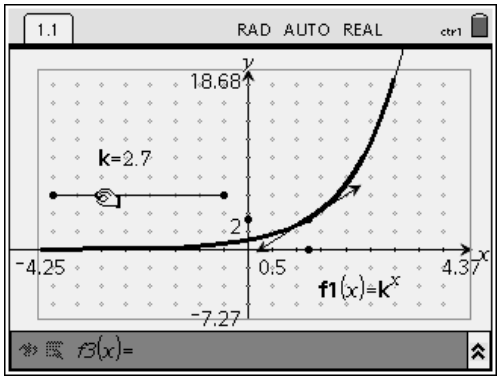
Här har jag lagt funktionen $f(x) = k^x$ där *k* är en variabel som kan ändras med en slider. Även här ritar räknaren automatiskt derivatans graf (den tunna grafen). Här finns då

möjligheter att föra resonemang om att derivatan till en exponetialfunktion verkar också vara en exponentialfunktion oavsett värdet på basen *k*.

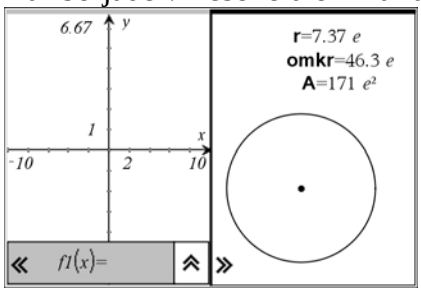




Om man varierar *k* ser man att vid viss en bas så samman faller det två graferna! Vad är basen då? Jo ungefär 2,7! När basen är ungefär 2,7 verkar funktionen och derivatan vara densamma!
Detta gjorde jag som en demonstration innan ett mer strikt matematiskt resonemang om talet *e*. Tror att det kan öka ”känslan” för vad detta något mystiska tal är och varför det införs!
Mitt nästa exempel är hämtat från matematik A och berör cirkelns area och omkrets samt begreppet proportionalitet.

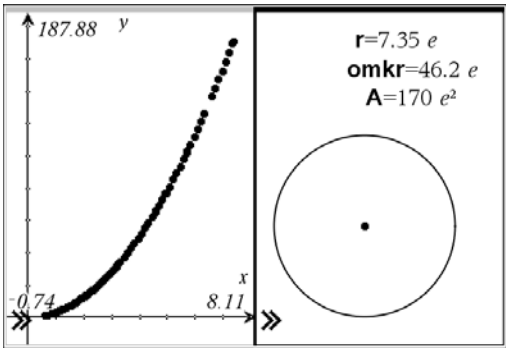


Cirkelns omkrets och area
Här började vi resonera om hur area och omkrets förändras då man ändrar radien!

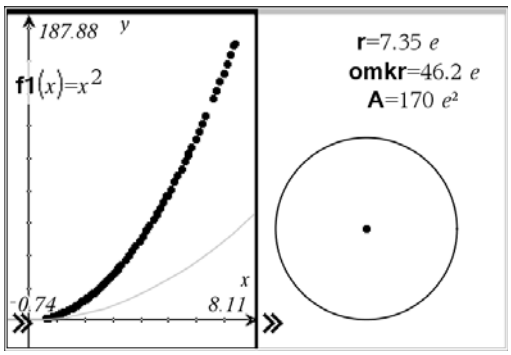


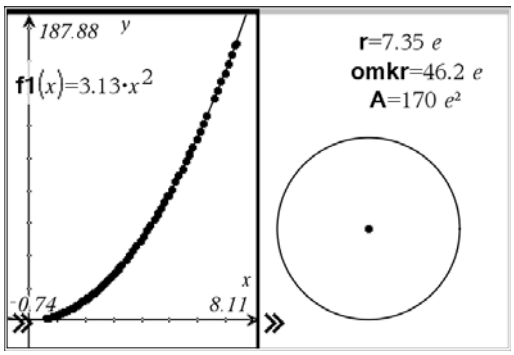
Vad händer med area och omkrets om radien blir dubbelt så stor? Tre ggr så stor? Här kan man dra i cirkeln och se hur de olika variablerna varierar. Omkretsen verkar ”hänga” med i samma takt men arean verkar fyrfaldigas respektive niofaldigas.
Vi skall nu studera hur detta ser ut grafiskt. Vi låter räknaren pricka in arean som funktion av radien. Med funktionen data capture fångas värdena när man drar i cirkeln och hamnar i ett kalkylblad. Dessa värden prickas samtidigt automatiskt i ett diagram enligt nedan.

	A radie	B area	C	D
◆	=capture('r,	=capture('a		
1	7.37335	170.797		



Nu hade jag gjort lika dant med omkretsen där vi då fått ett linjärt samband. (bra intro till proportionalitet …) Denna ser dock inte likadan ut. Jag skrev in $y = x^2$ och drog sedan i kurvan tills det att de sammanföll. enligt nedan och som vi ser kan man ana $y = \pi x^2$.

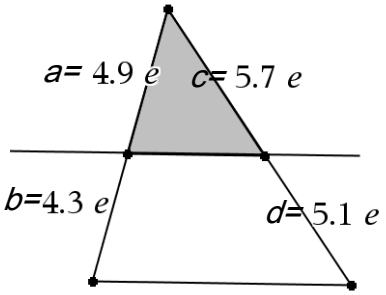




Detta var ett trevligt sätt att introducera arean/omkrets av en cirkel på. Bieffekter var ju här resonemang om direkt proportionalitet samt proportionalitet mot x^2. Vi fick också in tre sätt att beskriva en funktion: graf, samband och värdetabell! Detta är en stor fördel; att snabbt kunna växla mellan olika representationsformer. Inom geometrin finns väldiga möjligheter att visa samband dynamiskt så som t.ex. transversalsatsen.

5. Transversalsatsen

Här fick eleverna instruktionen att dra i transversalen och undersöka om de kunde hitta något samband mellan de fyra olika sträckorna *a*, *b*, *c* och *d*. Jag gav eleverna lite ledfrågor såsom t.ex. Vad händer med *c* och *d* om $a = b$? Vad händer med *c* och *d* om *a* är dubbelt så stort som *b*? Väldigt många lyckades själva hitta ett samband som vi senare gemensamt bevisade!



Möjligheten till att undersöka och upptäcka är det som tilltalat mig allra mest med detta verktyg. De dynamiska bitarna inom funktionsläran och geometrin gör också matematiken tydligare. Jag tycker också att jag blivit tvungen att vara tydligare när eleverna får använda räknaren och när de inte får använda den. Vi har använt räknaren mer selektivt. En positiv aspekt av detta är att eleverna, om de inte hela tiden får använda räknaren, inte heller använder den slentrianmässigt vid enkel rutinräkning. Aspekten att använda räknaren mer selektivt har faktiskt har inneburit att jag ställt högre på vad dessa elever skall klara utan räknare än de som förut haft vanliga grafräknare. Det har också haft en stor inverkan på proven. Eftersom räknaren ”kan så mycket” har den miniräknarfria delen blivit större på mina prov. En viktig faktor med ett sådant här hjälpmedel är givetvis möjligheten att variera undervisning. Det medför också ytterligare ett sätt att presentera matematik på gör vilket jag tror gör att ytterligare elever kan förstå och känna glädje i att lära sig matematik.