910 a
Komplexa tal är inte så komplexa!

Maria Cortas Nordlander är fil. dr och lektor i matematik vid Vasaskolan, Gävle.
Edvard Nordlander är professor i elektronik vid Högskolan i Gävle.

Inledning

Abstraktion anses ibland vara ett verktyg för att öka elevers förmåga att tänka och resonera (Bucci m.fl., 2001), eftersom den betraktas vara en fundamental process i matematiskt lärande och ett grundläggande steg för att skapa nya begrepp (Ferrari, 2003). Därför bör abstrakt tänkande uppfattas som ett av de större målen i matematiklärandet (Wong, 2007; Wong, 2002). Emellertid tycker elever ofta att abstraktionen i matematiken är svårförståelig och följaktligen kan skapa hinder för lärandet. Detta bekräftas av Arcavi (2003) som framhåller uttrycket ”we see what we know”. Enligt Arcavi (2003) är det inte självklart att elever ser eller uppfattar ett begrepp på samma sätt som en lärare gör. Marton och Booth (1997) påstår att elevers uppfattning av ett begrepp kan bero på en hel del faktorer, såsom tidigare kunskap och erfarenhet, samt situationen i vilken begreppet förekommer. Detta innebär att elever försöker visualisera begreppet och skapa en symbol eller en mental modell utifrån egen erfarenhet. Det största problemet med detta är att elever ofrivilligt kan skapa en skev bild eller en ofullständig tolkning av begreppet.

Ett av momenten inom matematiken som elever ofta förknippar med abstraktion är algebra. Till exempel, elever som läste gymnasiets Matematik B kunde inte förstå anledningen till att uttrycket (x^2-1) kan faktoriseras som produkten $(x-1)(x+1)$, medan uttrycket (x^2+1) inte kan faktoriseras på samma sätt. Polynomet (x^2+1) kan faktoriseras, dock endast om en ny matematisk symbol införs. Symbolen i används och polynomuttrycket (x^2+1) faktoriseras enligt $(x-i)(x+i)$, där $i^2=-1$.

Komplexa tal blir således i hög grad abstrakta för eleverna och dessutom förknippas ofta ordet ”komplex” med någonting krångligt. Till och med definitionen av komplexa tal innehåller något så tveksamt som en imaginärdel, där ordet ”imaginär” förklaras med ”overklig; endast tänkt; skenbar” i Nationalencyklopedin. I en djupgående studie har författarna nyligen undersökt hur missuppfattningar i lärandet kan relateras till graden av abstraktion. Författarna hänför uppfattningen av de komplexa talen till någon av nedanstående fyra kategorier av mer eller mindre världsfrånvänd karaktär.

Ett matematiskt trick

Komplexa tal kan ses som ett *matematiskt trick* för att möjliggöra lösning av ett annars olösligt problem. Detta behandlas av Sfard (1991) som menar att komplexa tal historiskt sett är en expansion av de reella talen. Det är behovet av nya objekt som ledde till att mängden av reella tal behövde utvidgas och ingå som delmängd av de komplexa talen. Följaktligen kan elever uppfatta de komplexa talen som ett trick utvecklat för att kunna lösa ekvationen $x^2+1=0$, som annars vore omöjlig att lösa. Således blir en naturlig tanke att komplexa tal inte har med verkligheten att göra.

Tvådimensionella tal

Komplexa tal kan också ses som *tvådimensionella tal* där de båda delarna betraktas som matematiska enheter skilda från varandra. Med denna syn är det svårt att föreställa sig att komplexa tal verkligen är tal, då uppfattningen byggs på att komplexa tal är två enskilda tal och alltså inte *ett* tal. Svårigheten accentueras genom att ordet ”komplex” kan definieras som ”består av många delar vilka hänger samman på ett svåröverskådligt sätt” enligt Nationalencyklopedin.

Den symboliska synen
Den *symboliska synen* på komplexa tal baseras på symbolen i^2 eller endast symbolen i. Den primära funktionen hos en symbol är att representera ”något annat”. Detta ger automatiskt eleven en skev syn på dess existens. Att förenkla begreppet komplexa tal till enbart en symbol kan innebära ett försök från elever att reducera de komplexa talens abstrakta natur och föreställa dem på ett mer verkligt och konkret sätt.
Ett obegripligt mysterium
Slutligen kan komplexa tal upplevas av elever som ett *obegripligt mysterium*. Möjligen kan denna inställning bero på att man inte lyckas visualisera komplexa tal och därför inte göra dem verkliga. Arcavi (2003) framhäver hur viktigt det är med begreppsvisualisering för att skapa en lämplig förståelse och en adekvat tolkning av ett begrepp. Abstraktion kan vara en huvudanledning till att elever inte lyckas med att skapa mentala bilder av ett begrepp eller se hur begreppet kan användas i det verkliga livet (Hazzan, 1999).

Metoder att definiera komplexa tal
Hur kan då läraren introducera de komplexa talen och samtidigt minimera abstraktionsgraden? En enkät skickades till gymnasielärare och universitetslärare i Sverige, USA, Frankrike och Canada för att få inblick i hur de brukar införa momentet ”komplexa tal” i sin undervisning. Tre ansatser kommer att beskrivas i det följande.

Ansats 1: Man förutskickar att den ”imaginära enheten” finns och uppfyller villkoret $i^2=-1$.
De reella talen räcker inte. Därför måste man utvidga det reella talområdet genom att ett helt nytt tal införs så att ekvationen $x^2+1=0$ kan lösas. Detta leder oavvisligen till att en imaginärdel introduceras tillsammans med det axiomatiska villkoret $i^2=-1$ och sammansättning med realdelen ger det komplexa talet. I det här fallet kan de komplexa talen uppfattas som ett mänskligt påhitt. Denna metod används av ett flertal lärare och nämns i t.ex. i Wikström (2005), samt Al Cuoco (1997).
Ansats 2: En algebraisk struktur
För att förstå anledningen till att det symboliska uttrycket $i^2=-1$ är berättigat kan en djupare ansats introduceras. Metoden bygger på en algebraisk struktur som leder i bevis att $i^2=-1$. Man inför tre uppsättningar av räkneregler som i sig är ganska begripliga, under förutsättning att eleven uppfattar algebran som självklar och lättillgänglig (vilket sällan är fallet). Komplexa tal definieras med en algebraisk struktur där talparet (a,b) representeras symboliskt som $a+ib$. Följande algebraiska regler introduceras i strukturen:
Addition: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, Subtraktion: $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$ och Multiplikation: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$. Å ena sidan är multiplikation definierad som $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ och å andra sidan ger den distributiva lagen följande:
$(a,b)\cdot(c,d) =(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac+ i^2bd+i(ad+bc)=(ac+ i^2bd,ad+bc)$
En enkel jämförelse och identifiering ger villkoret $i^2=-1$.
Såväl ansats 1 som ansats 2 är matematiskt godtagbara, men båda ansatserna innebär att elever ska lära sig utantill eller acceptera begrepp utan att veta varför. Ramsden (2003) kritiserar sådana metoder och hävdar att memorering styr elevers tänkande. Så snart elever kan reproducera information är den glömd (Ramsden, 2003, s. 60), vilket kan upplevas som icke-pedagogiskt! Strävan efter ett pedagogiskt bevis ledde till en tredje ansats i syfte att reducera abstraktionsgraden och visualisera begreppet.
Ansats 3: Kvantiteten i^2 är en dubbel rotation
Den tredje ansatsen är ett försök att åskådliggöra och konkretisera begreppet ”komplexa tal” genom visualisering. Metoden bygger på hur de komplexa talen beter sig vid rätvinklig rotation, vilket direkt leder till att påståendet $i^2=-1$ upplevs som självklart. I visualiseringen klargörs att i^2 är en dubbel rätvinklig rotation som är ekvivalent med att multiplicera med -1.

Metoden tar multiplikation som utgångspunkt. Talet *1* representeras som en enhet på en tallinje. För att beskriva talet införs en visare som är en enhet lång. Begreppet ”visare” är ganska vanligt i tillämpningsämnen som fysik och tekniska ämnen. För att tydliggöra ytterligare, införs benämningen *x*-axel för tallinjen. Detta illustreras i Fig. 1.

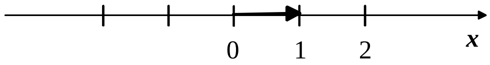

Fig. 1. Representation av talet 1 med en visare utefter *x*-axeln.

Att multiplicera visaren med ett reellt tal innebär bara en storleksförändring, men att multiplicera med enheten *i* är en 90-graders positiv rotation runt origo. Således behövs ytterligare en axel och benämningen *y*-axel införs. Härigenom definieras det komplexa talplanet, se Fig. 2. Senare kan de rätvinkliga axlarna benämnas på ett korrekt sätt med reella resp. imaginära axeln.

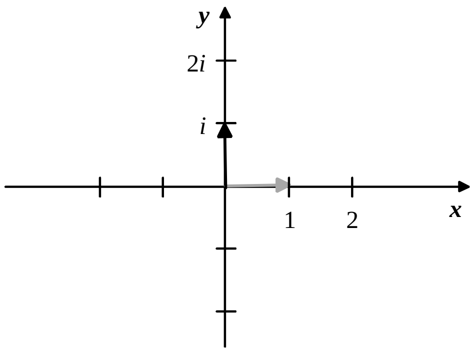

Fig. 2. Illustration av hur multiplikation med enheten *i* leder till det komplexa talplanet.

Ytterligare en multiplikation med enheten *i* innebär ytterligare en likadan rotation. Resultatet är en multiplikation av ursprunglig visare med $i \cdot i$ alternativt i^2. Sålunda vrids visaren enligt Fig. 3 och då är det lämpligt att tillföra den negativa skalningen av *x*-axeln. Precis här kan en lärare betona att multiplikation med i^2 är detsamma som multiplikation med talet *-1*, eftersom det framstår som uppenbart i figuren (efter 2 rotationer förvandlas talet *1* till talet *-1*).

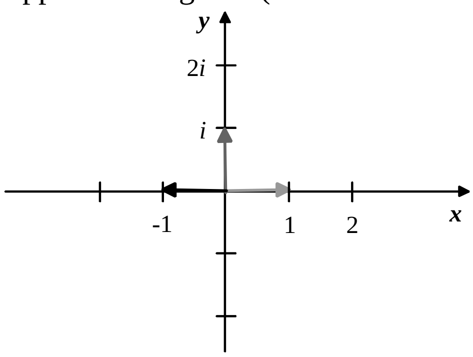

Fig. 3. Två rätvinkliga rotationer i positiv led är detsamma som att multiplicera med *-1*.

Genom att använda denna metod med upprepade multiplikationer kan elever faktiskt se att det inte är trolleri när man får en negativ kvadrat. Den elev som upplever att multiplikation med enheten *i* är ett svårsmält postulat, kan man övertyga genom att införa visarens koordinater och verifiera genom att rotera vilken punkt som helst 90^o runt origo i det rätvinkliga koordinatsystemet, se Fig. 4. Härmed har man också kommit ett stycke vidare i hanteringen av punkter i det komplexa talplanet. I exemplet vrids visaren $2+i$ först en gång och producerar $i(2+i)$ som med enkel algebraisk manipulation visar sig vara $-1+2i$. Nästa steg är att rotera den nya visaren 90^o runt origo, vilket algebraiskt motsvarar $i(-1+2i)=-2-i$. Som komplement kan man återgå till den ursprungliga visaren och multiplicera med *-1,* d.v.s. med $i \cdot i$, vilket omedelbart ger $-1(2+i)=-2-i$.

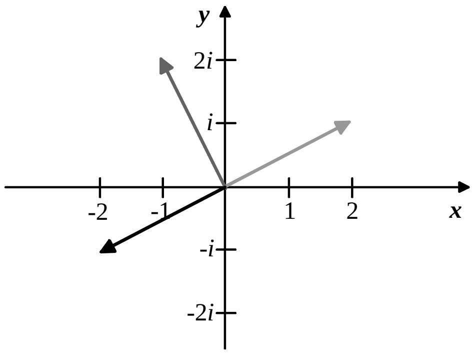

Fig. 4. Illustration av upprepad multiplikation med enheten *i* av ett godtyckligt komplext tal genom en dubbel rotation kring origo.

Diskussion

Vissa forskare hävdar att visualisering är ett utmärkt sätt att reducera abstraktionsnivån och härmed undanröja ett allvarligt hinder för matematiskt lärande (Hazzan & Zazkis, 2005; Arcavi, 2003). Detta angreppssätt borde särskilt gynna de elever som annars upplever matematikämnet som svåråtkomligt. Didaktiskt sätt anser författarna ansats 3 vara bäst av de tre ansatserna. Den erbjuder ett enkelt sätt att införa det axiomatiska villkoret $i^2=-1$ och reducerar abstraktionen på ett underhållande och visuellt sätt. Dessutom kan elever *se* det som verkligen händer, vilket möjligen kan ge gynnsamma känslor för tolkning och fundering. Denna visuella metod uppfyller både kravet på lättillgänglighet och ger en djupare förståelse.

I en framtida studie kommer författarna att undersöka om den förespråkade metoden har bidragit till att öka elevers förståelse för komplexa tal och därigenom bidra till ett ökat matematiskt intresse.

Litteratur

Al Cuoco. (1997). Constructing the complex numbers. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 2: 155-186, 1997. Kluwer Academic Publishers.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215-241.

Bucci, P., Long, T.J. & Weide, B.W. (2001). Do we really teach abstraction? *I Proceedings of the 31st SIGCSE Technical Symposium on CS Education*, s. 26-30.

Ferrari, P.L. (2003). Abstraction in mathematics. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*. 2003 July 29; 358(1435): 1225–1230.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts, *Educational Studies in Mathematics*. 40(1), 71-90.

Hazzan, O. & Zazkis, R. (2005). Reducing Abstraction: The Case of School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* (2005) 58:101-119.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Mahwah, N.J.: Law Earlbaum.

Ramsden, P. (2003). *Learning to teach in higher education*. London: RoutledgeFalmer.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Wikström, A. (2005). *Komplexa tal – Vad är det?* Institutionen för matematik och statistik, Helsingfors universitet. (Doctoral thesis).

Wong, N.Y. (2007). Hong Kong teachers' view of effective mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education* (2007) 39:301–314.

Wong, N. Y. (2002). Conceptions of doing and learning mathematics among Chinese. *Journal of Intercultural Studies* 23(2), 211–229.