803a
Hur kan geometri engagera eleverna?

Bengt Ulin, fd matematiklärare vid Kristofferskolan och högskolelektor vid Lärarhögskolan i Stockholm, ägnar sig fortfarande åt fortbildning. Han har skrivit ett 10-tal böcker om matematik och undervisning samt åtskilliga uppsatser, främst i Nämnaren.

Av skolans åskådningsämnen är geometri ett av de främsta. Geometrin erbjuder ett unikt övningsfält där eleverna kan kombinera åskådning och iakttagelse med tänkande.

Som i all matematik intar problemlösningen en central ställning. Sedan länge domineras den i svensk skolmatematik av uppgifter som leder till numeriska svar: det gäller att beräkna en kostnad, en hastighet, ett avstånd, en area, en volym eller en vinkel. Detta har givetvis sin betydelse, i synnerhet om problemen hämtas ur konkreta, praktiska sammanhang. Särskilt nyttiga är sådana uppgifter i årskurserna 6-9. Även om det inte saknas bra problem i läromedlen kan mycket mer uträttas i denna riktning, om man exempelvis utnyttjar sjökort, navigering och lantmäteri.

I andra typer av problem är uppgifterna av kvalitativ karaktär. Jag tänker då främst på geometrisk konstruktion, inte så mycket på bevisföring, en problemtyp som man gärna kan utmana begåvade elever med. Att utföra konstruktioner med passare och linjal är ett klassiskt område som borde få en renässans i skolgeometrin. Det var ett lika naturligt som pedagogiskt fruktbart grepp av de hellenska matematikerna att införa passare och linjal som konkreta verktyg till stöd åt tänkandet. Tyvärr vet inte så många lärare hur undervisningen ska gestaltas på detta delområde. Jag vill bidra med enkla men ändå talande exempel på hur övningar kan genomföras på ett både spännande och fruktbart sätt.

Det är av stor vikt att även på andra sätt variera problemtyperna. Eftersom det i varje klass finns elever som arbetar långsamt eller dras med luckor från lägre klasser, är det värdefullt med övningar där lösningen inte fordrar mer än elementär förkunskap – eller praktiskt taget ingen alls. Då får alla elever chanser att uppleva arbetsglädje. Man bör ge tillfälle till undersökningar som gläder eleverna redan när de gör en upptäckt, t ex i ett geometriskt material som de själva skapat. Det finns åtskilliga problem av undersökningskaraktär som har en *dynamoeffekt*: när eleverna nått resultat på en nivå som deras förmåga tillåter, kan de utvidga problemet med associerade frågor och gå vidare på egen hand. På så sätt verkar problem av denna typ självdifferentierande: eleverna ”tar för sig” så mycket av uppgiften som de tilltror sig att genomföra.
För att engagera alla elever är det viktigt att då och då ställa problem där det behövs fantasi. I och för sig börjar *all* problemlösning med fantasi, men för att stimulera elever med stor respekt för matematikämnet gäller det att ge dem tillfälle att utnyttja fantasi i enkla sammanhang, t ex genom att rita egna figurer och undersöka det material de skaffat sig. Det går att ställa sådana problem redan i låga årskurser.

Att integrera problemlösningen med konst, historia, teknik och naturvetenskap spelar en betydande roll när det gäller att engagera eleverna. Matematikhistorien bjuder på många värdefulla problem, där klassen får tillämpa viktiga geometriska satser.
Arkitekturen ger åtskilligt stoff, exempelvis de gotiska katedralernas fasader och fönster.
I naturen möter vi en rikedom på geometriska former av intresse. Exempelvis utgörs planetbanorna av ellipser med solen i den ena brännpunkten. Den berömda Halleys komet följer en ellipsbåge; andra kometbanor kan uppvisa andra typer av kägelsnitt.

Kristaller och växter visar oss en rikedom av former, som vårt öga uppfattar redan vid första anblicken. De polyedrar som kristallerna bildar har en intressant dold matematik, som erbjuder fruktbara pedagogiska möjligheter. Spiraler och symmetrier av skilda slag är påtagliga i samtliga naturriken.

I tekniken utnyttjas linjär rörelse, cirkelrörelse, parabel- och ellipsformer, utväxling och andra samband av geometrisk art. Vi ska ta del av några tillämpningar.

Till den klassiska geometrin får man räkna den analytiska. Denna form av geometri, som innebär att geometriska problem översätts till algebraiska, medförde ökad säkerhet i problemlösningen. Den syntetiska geometrin kräver ofta mer förkunskap, men den ger å andra sidan ett större utbyte under problemlösningens gång, Analytisk geometri leder i regel direkt till det resultat man vill ha, dvs utan sidoblickar till målet. Ifråga om analytisk geometri bör man välja problem som inbjuder till analysmetod.

Även sfärisk geometri kan fascinera, särskilt när man jämför den med den euklidiska geometrin. Att vinkelsumman i en sfärisk triangel är variabel men alltid större än 180° kan förvåna. Intressant är också att vinkelsumman och arean är bundna till varandra (genom ett linjärt samband). I euklidisk plan geometri är vinkelsumman som bekant fixerad till 180°, medan arean är ”fri”.

Eleverna i de högsta klasserna bör få inblick i annan geometri än den analytiska. ”Projective geometry is all geometry” yttrade den engelska matematikern Arthur Cayley. Den projektiva geometrin byggs upp från icke-metriska samband mellan punkter, linjer och plan. Eftersom den är rik på vackra, duala sammanhang borde skolan ge den utrymme, åtminstone för en orientering.

Litteratur

J. Stillwell, *The Four Pillars of Geometry*, Springer, 2005.
B. Ulin, *Klassisk geometri – motiv och mening*, Ekelunds, 1998.
B. Ulin, *Projektiv geometri – en åskådlig introduktion*, Ekelunds förlag, 2000.