511a, 714a

Problemlösning när den är som bäst
Problemlösning som bäst dagen efter

Jana Madjarova är universitetslektor i matematik vid Matematiska vetenskaper, Chalmers/GU, och medlem i tävlingskommittén för Skolornas matematiktävling vid Svenska matematikersamfundet sedan 1999.

Inledning

Problemlösning är som bäst när vi inte bara har tillbringat en underhållande och tillfredsställande stund med att lösa ett utmanande problem, utan när vi efter den stunden har lärt oss något bestående som vi kan tillämpa i vår nästa duell med någon av matematikens mer hårdknäckta nötter. De eleganta lösningar man ibland får se må vara estetiskt tilltalande, men det är oftast inte de som ligger närmast till hands, och det är inte nödvändigtvis de som är de mest lärorika. En speciell utmaning är att, givet rn svår uppgift, hitta idéer och variationer som man kan använda i sitt arbete. Man kan också använda konkreta uppgifter som utgångspunkt för diskussioner om som anledning att introducera nya begrepp och resultat.

Ett exempel från finalen i Skolornas matematiktävling 2009

Problem: Finn alla reella lösningar till ekvationen $(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)=8x^5$.

Lösning med inbakade kommentarer (eller snarare kommentarer som innehåller en lösning): Det förefaller som om själva åsynen av parenteser framkallar hos de flesta elever en oemotståndlig längtan efter att utveckla uttrycket. Låt oss göra likadant och se vart det leder. Vi får

$$x^{10}+x^8+x^7+2x^5+x^3+x^2+1=8x^5,$$

eller, efter att ha flyttat alla termer till vänsterledet,

$$x^{10}+x^8+x^7-6x^5+x^3+x^2+1=0.$$

En begåvad gissning ger att $x=1$ är en lösning. Vi har hittat lösningen! Eller har vi det? Vad vi har hittat är bara *en* lösning. Eftersom gradtalet är 10 finns det garanterat exakt nio till, om man räknar med alla komplexa lösningar. Men, finns det fler reella bland dem? Att $x=1$ är en lösning betyder att polynomet i vänsterledet måste vara delbart med $x-1$ (här använder vi den s.k. *faktorsatsen för polynom*). Polynomdivision ger

$$x^{10}+x^8+x^7-6x^5+x^3+x^2+1=(x-1)(x^9+x^8+2x^7+3x^6+3x^5-3x^43-x^3-2x^2-x-1).$$

Om vi tittar närmare på polynomet vi fick som kvot vid divisionen ser vi att att även det har ett nollställe i $x=1$, så det är bara att utföra polynomdivision en gång till, vilket leder till

$$\begin{aligned}&(x-1)(x^9+x^8+2x^7+3x^6+3x^5-3x^4-3x^3-2x^2-x-1)=\\&=(x-1)^2(x^8+2x^7+4x^6+7x^5+10x^4+7x^3+4x^2+2x+1).\end{aligned}$$

Vi har alltså hittat *två* lösningar till den givna ekvationen, $x=1$ och $x=1$, d.v.s. vi har visat att

x=1 är en *dubbelrot* till ekvationen. Det finns åtta (komplexa) till, och nu börjar det bli svårt att gissa. Är det måhända så att det inte finns fler reella? En sak är säker, det kan inte finnas fler positiva, eftersom alla koefficienter i den senaste kvoten är positiva. Det är också helt uppenbart att 0 inte är en lösning. Men kan det finnas negativa? Det verkar inte så lätt att reda ut, för negativa x kommer potenserna med jämna exponenter att ge positiva bidrag, och potenserna med udda – negativa. Frågan är faktiskt oerhört mycket lättare att besvara om man vänder blicken till den ursprungliga ekvationen. Vi ser genast att högerledet är negativt för alla negativa x. Den första faktorn i vänsterledet är alltid positiv (för alla reella x). De två återstående faktorerna har inte samma tecken överallt, men man inser att de växlar tecken samtidigt (i det enda reella nollstället, $x= -1$, som är gemensamt för båda), och de är samtidigt positiva respektive negativa. Det betyder att deras produkt är positiv för alla reella x, utom för det gemensamma nollstället $x= -1$, där den är 0. Därmed är vänsterledet icke-negativt för alla negativa x, medan högerledet är negativt. Det finns alltså inga reella lösningar till ekvationen. Därmed har vi visat att den enda reella lösningen är x=1, med multiplicitet 2 (med andra ord, det finns två reella lösningar, och båda är lika med 1).

Kanske inte den mest bedårande lösningen man har sett, särskilt den upprepade polynomdivisionen … Dessutom, vad gör man om man inte kan faktorsatsen och inte har lärt sig utföra polynomdivision? Det går att uppnå samma faktorisering på annat sätt, mindre krävande i fråga om förkunskaper, men kanske mer krävande i fråga om förmågan och vanan att arbeta med algebraiska uttryck (det räcker att ha sett geometriska summor). Betrakta återigen polynomet efter utvecklingen, gruppera termerna och bryt ut (x–1)

$$
\begin{aligned}
&x^{10}+x^8+x^7-6x^5+x^3+x^2+1= x^{10}-x^5+x^8-x^5+x^7-x^5-x^5+x^3-x^5+x^2-x^5+1= \\
&= x^5(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+x^5(x-1)(x^2+x+1)+x^5(x-1)(x+1)- \\
&-x^3(x-1)(x+1)-x^2(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).
\end{aligned}
$$

Nästa faktoriseringssteg utförs analogt med detta.

Finns det då inte ett elegant sätt att lösa uppgiften, ett sätt som inte involverar måttligt roliga algebraiska omvandlingar? Jo, det gör det. Mer än så, det sättet ger oss oanade möjligheter att variera uppgiften, att konstruera enklare varianter som relativt lätt kan behandlas med blygsamma medel. Den eleganta lösningen bygger på olikheten man brukar referera till som AM-GM, d.v.s. olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde. Vi behöver här en tämligen enkel variant av den, nämligen

$$t + 1/t > 2, \quad \text{för } t \text{ positivt, inte lika med 1.}$$

Den enkla varianten är mycket lätt att visa, man kan förlänga med t, t >0 och därmed behålls samma olikhetstecken

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 > 0, \quad \text{för } t \text{ inte lika med 1.}$$

Vi kan nu som ovan dra slutsatsen att det inte finns negativa lösningar till ekvationen, varpå vi dividerar båda leden med x^5 och fördelar de fem x-exemplaren över de tre faktorerna i vänsterledet på ett sådant sätt att olikheten ovan kan tillämpas. Produkten av de tre tvåorna ger precis den åtta som är kvar i högerledet.

Uppgiften kan nu varieras – man kan variera antalet faktorer i vänsterledet och potenserna som förekommer i dessa (enbart jämna exponenter gör att man slipper utredningen om negativa lösningar) och se till att hela tiden anpassa koefficient och potens i högerledet i enlighet med det man får ur AM-GM. Man kan också formulera uppgifter av den typen i form av olikhet.

Elever som kan derivator och har lärt sig kopplingen mellan derivatans tecken och växande/avtagande beteende hos funktionen kan använda den tekniken för att analysera existensen och antalet nollställen i ett visst intervall.

Vad är det då för diskussioner som kan ha sin utgångspunkt i exemplet ovan? Man skulle till exempel kunna diskutera olikheter som kan visas gälla för alla variabel/parametervärden inom ett visst område. Man kan också diskutera frågan om multiplicitet för polynoms nollställen. Vad finns det för anledning att säga att ett polynom har två nollställen om båda är lika? Vad finns det för koppling mellan ett nollställe med multiplicitet högre än ett och polynomets derivata? Och har man väl upptäckt det sambandet, kan man definiera nollställens multiplicitet för andra funktioner än polynom, t.ex. $f(x) = 1 - \cos x$?

Många av tävlingsuppgifterna lämpar sig för samma typ av analys, variation och förenkling. Det vore synd att inte låta andra elever än dem som tävlar ta del av dem.

Litteratur

Kval- och finalskrivningar i Skolornas matematiktävling, tillgängliga på www.math.uu.se/~dag/skolornas.html