710a
Symbolhanterande verktyg

Per-Eskil Persson är fil.lic. i matematik och lärande och är verksam vid Lärarutbildningen inom Malmö Högskola. Han har en mångårig erfarenhet som gymnasielärare och bedriver forskning kring algebralärande och teknologiska verktyg i matematikundervisningen.

Människan har genom hela sin historia tillverkat och använt verktyg och redskap av olika slag för att göra henne starkare, snabbare och farligare. Verktygen ter sig ofta som ”förlängningar” av henne själv, och bygger t.ex. på hävstångsprincipen eller på andra mekaniska lagar. Men de kan också ge henne helt nya krafter, som hon inte någon egen kroppslig motsvarighet till. Klassiska exempel är elden och hjulet. I våra dagar har de teknologiska framstegen, med de avancerade maskinella och elektroniska verktygen, lyft människans förmåga och krafter till nivåer, som ligger långt bortom det som vi uppfattar som ”av naturen”.

En speciell typ av verktyg är de som används för kommunikation mellan människor eller mellan generationer. Människan har här varit oerhört uppfinningsrik och har skapat en fantastisk mängd olika språk, skrivtecken och andra teckensystem, som kan användas i exempelvis fysiska böcker. På så sätt kan faktiskt kommunikation mellan människor ske över årtusenden, och information kan lagras över mycket lång tid. Dessutom ger det möjlighet till masskommunikation, där en eller några personer kan rikta sig till ett i princip oändligt antal andra. Verktygsbegreppet (eng. *tool*) kommer från Vygotskij (1999) och hans medarbetare Leontiev, som gav det en väldigt bred definition. Den fullständiga termen är egentligen ”medierande verktyg”, men man använder oftast den enkla kortformen ”verktyg”.

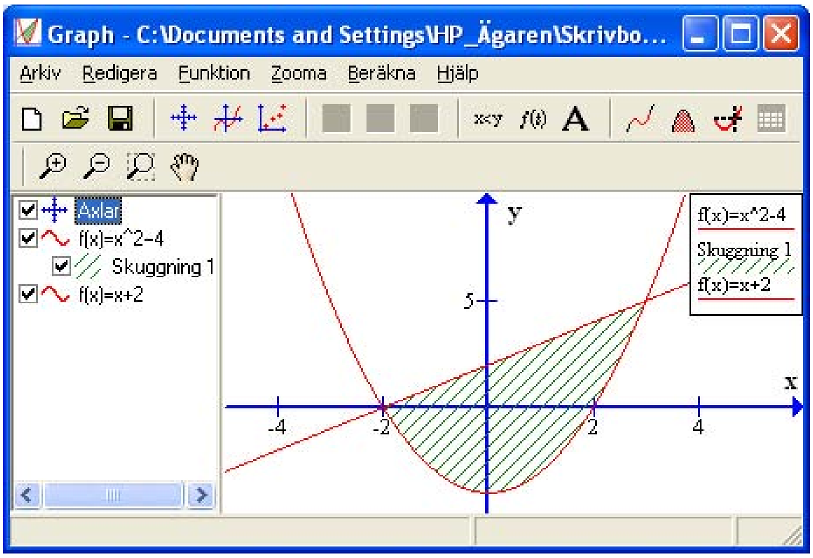
De matematiska tecknen och symbolerna tillhör de första som människan skapade, och i grunden bygger de på de medfödda förutsättningar för matematiskt tänkande vi har, och som beskrivits av Tall (2008). Symbolerna har sedan utvecklats i en mängd riktningar i olika kulturer fram till de vi idag använder (se t.ex. Ifrah, 2004). Matematiken är faktiskt unik jämfört med andra kunskapsområden genom rikedomen på olika slags symboler den använder sig av (Ernest, 2006). Förutom de numeriska symbolerna med sina aritmetiska specialtecken (t.ex. räknesätten, likhetstecknet, parenteser), de algebraiska bokstavssymbolerna och de logiska tecknen, har vi en rad andra symboler, som exempelvis integral-, derivata- eller summatecken. Dessutom har vi den cartesiska teckenapparaten, som vi använder när vi ritar grafer. Detta utgör ett helt teckensystem i sig, och grafer och skisser av grafer räknas till de matematiska symbolerna.

Men jämsides med de matematiska tecknen har människan också alltid använt sig av fysiska räkneverktyg för de beräkningar hon behövt göra i arbetet eller privat (se Säljö, 2005). Kulramar av olika typ har utnyttjas, och används fortfarande, inom många kulturer. Speciella räknebräden konstruerades exempelvis av romarna, som gjorde beräkningar med hjälp av små kalkstenar (calculi). Därav vårt ord ”kalkyl”. Särskilt avancerad räknebrädesteknik utvecklades i Kina under Han-dynastin (c:a 200 f.Kr). Markörerna utgjordes av stickor som lades så att de avbildade de kinesiska talsymboler som användes vid den tiden. Redan då hade man utvidgat talsystemet till att även omfatta negativa tal, och för dessa hade man stickor i en annan färg. Räknebrädena användes också för tämligen avancerade algebraiska kalkyler. I ett matematiskt verk som skrevs vid den tiden, ”Jiu zhang suanshu” (”Nio kapitel om räknekonsten”), gavs metoder för hur man på räknebrädena t.ex. löser uppgifter med reguladetri, löser andra-, tredje- och fjärdegradekvationer samt löser linjära ekvationssystem med upp till fem obekanta.

I vår tid, som många benämner ”den elektroniska eran”, pågår en utveckling av olika former av matematiska verktyg, som bygger på elektroniken. Dessa har medfört att beräkningar kan utföras med oerhört hög hastighet, vilket i sin tur möjliggör massberäkningar i en skala, som tidigare varit otänkbar. Vanligast är att verktygen, de elektroniska maskinerna, arbetar helt med numeriska metoder och algoritmer. Före den elektroniska eran var numeriska beräkningar väldigt tidsödande att utföra, och kunde därför bara utnyttjas i begränsad utsträckning. Men idag är detta inget problem, utan räknare och datorer kan köras som ”siffertuggare” i en nästan industriell skala, för att exempelvis skaffa numeriska och approximativa lösningar till komplicerade system av differentialekvationer inom meteorologi eller rymdfart.

Ett mer avancerat sätt för de teknologiska verktygen att arbeta på är det symboliska. Med hjälp av datorprogram eller med maskinell programmering i räknare kan matematiken behandlas icke-numeriskt och exakt. Även talen anges exakt, exempelvis rationella tal eller speciella irrationella tal som kvadratrötter, logaritmer eller multipler av pi. Avancerade operationer, som ekvationslösning, derivering eller lösning av differentialekvationer, utförs analytiskt och exakt i stället för numeriskt och approximativt. Bland dessa verktyg har vi de symbolhanterande räknarna och symbolhanterande programvara för datorer av skilda slag. Bland de sistnämnda finns sofistikerade matematikprogram, som används yrkesmässigt av matematiker, fysiker, ingenjörer m.fl. (Mathematica, Maple). Men en del verktyg är avsiktligt designade för att användas didaktiskt, när elever lära sig matematik. Heid (1997) benämner dessa som *kognitiva verktyg*. Bland dessa finns de skolräknare av olika typ vi använder, och också en del datorprogramvaror, båda av kommersiellt och icke-kommersiellt ursprung.

Det man kräver av ett användbart kognitivt verktyg för matematikundervisningen av idag är att det åtminstone ger möjlighet till grafritning. Grafräknarna har under lång tid använts på gymnasienivå i Sverige, och har i nuläget blivit nästan helt integrerade i matematikundervisningen där. Det finns också gratis programvaror för datorer med ungefär samma förmåga som grafräknarna. Ett exempel:



Dessa verktyg arbetar dock helt numeriskt och när olika former av subverktyg används, som exempelvis finner skärningspunkter mellan grafer, blir svaren alltid approximativa.

Möjligheten att använda symbolhanterande verktyg har egentligen funnits ganska länge i matematikundervisningen. Ändå har undervisningen i många svenska skolor inte förändrats i någon nämnvärd grad i riktning mot de symbolhanterande verktygen, inte ens när den typen av räknare blev tillåtna på gymnasiets nationella prov från hösten 2006. Oftast stannar man istället vid de grafritande räknarna. En orsak kan vara den ganska höga kostnaden för avancerade räknare och för datorer med kommersiell programvara. En annan kan vara bristen på goda exempel på hur de symbolhanterande verktygen praktiskt kan användas.

Men *varför* ska man egentligen använda dem? I den internationella forskningen finns idag en stor mängd data från studier kring användning av både symbolhanterande räknare och motsvarande datorprogramvara (i båda fallen benämns de CAS, ”computer algebra system”) i matematikundervisningen. I min NOMAD-artikel (Persson, 2009) finns en del av dessa forskningsrön presenterade, tillsammans med de slutsatser man kan dra av dem. CAS öppnar upp för en mängd möjligheter att föra matematikundervisningen framåt, samtidigt som de ställer nya krav på såväl lärare som elever. Eleverna får helt andra möjligheter att vid problemlösning ställa hypoteser, snabbt pröva dessa, dra slutsatser och även att argumentera och bevisa de lösningar de kommit fram till. De kan också arbeta med matematik på ett mer abstrakt och generellt plan, och fokusera på de ”stora”, begreppsmässiga frågorna i matematiken, istället för på detaljer i beräkningar eller algebraiska förenklingar. Och vissa matematiska områden som tidigare varit stängda för eleverna blir nu tillgängliga för dem, t.ex. inom talteori eller differentialekvationssystem.

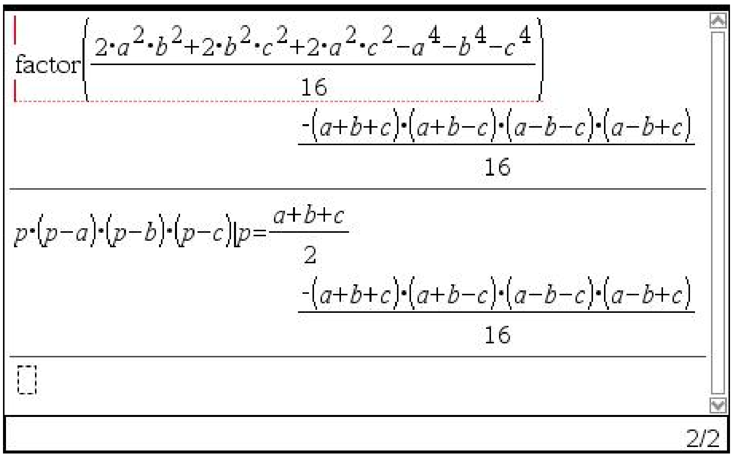
Självklart finns det även en del besvärliga frågor som måste hanteras och lösas då CAS ska introduceras i undervisningen. Elever och lärare måste lära sig ett helt nytt verktyg, med dess möjligheter och begränsningar, och hur det ska kunna utnyttjas i de aktuella matematikkurserna. Initialt innebär det kanske mycket arbete, men i slutänden också en betydligt förhöjd kompetens när det gäller att utnyttja dessa verktyg i matematiska aktiviteter.

Vad är det då för typer av tillämpningar från matematikkurserna, som lämpar sig för symbolhanterande verktyg? Faktiskt är svaret att åtskilliga sådana kan hittas inom alla matematikområden i alla kurser, om man tänker på dessa verktyg i bred bemärkelse. Och verktygen kan användas både av läraren för att demonstrera och diskutera matematiska begrepp i helklass eller i grupper, och av eleverna när de löser problem och matematiska uppgifter.

Här ska kort ges ett par exempel, i vilka olika räknare och programvaror används.

Herons formel

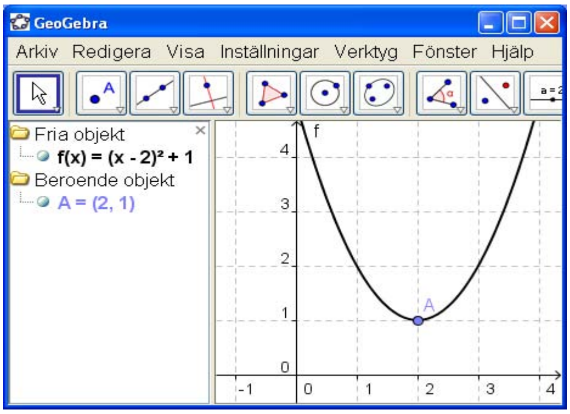
Satsen säger att en triangel med sidlängderna a, b och c har arean $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ där p är hälften av triangelns omkrets. När man bevisar denna formel kan man t.ex. utnyttja cosinussatsen och den trigonometriska ettan för att få fram ett uttryck för A^2. Detta är dock svårt att faktorisera för hand (försök gärna), men med CAS är det inget problem:



I den sista algebraiska operationen utnyttjas ett användbart specialtecken. Det lodräta strecket betyder att det som kommer efter detta ska substitueras i det första uttrycket. Med de teknologiska verktygen introduceras en del nya tecken eller sådana som har nya innebörder. Det betyder att man måste ha en större flexibilitet med symboler när man använder dem.

Parallellförflyttning av andragradsfunktioner

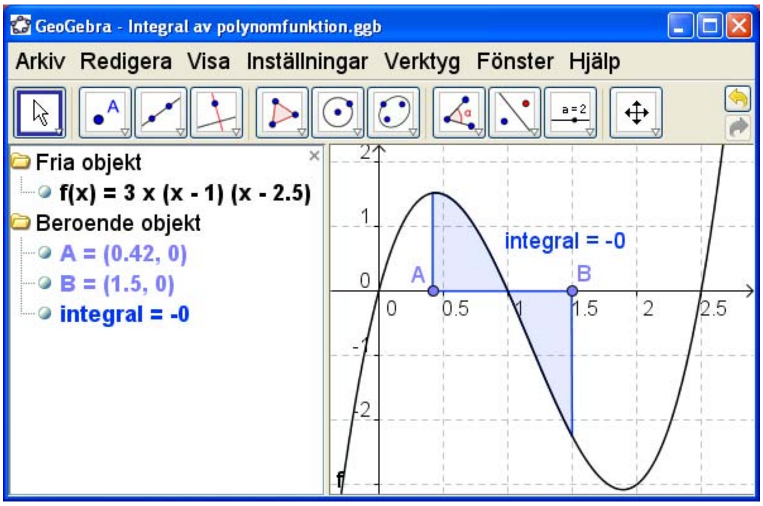
Vad händer med ekvationen för $f(x) = x^2$ om denna parallellförflyttas så att dess minimipunkt befinner sig i andra punkter än origo? Med en programvara som dynamiskt kopplar samman grafen med funktionens ekvation, och som medger att man kan ”ta tag” i grafen och flytta den, får man en helt ny insikt i hur minimipunktens koordinater direkt styr ekvationen.



Observera den algebriska form som ekvationen får, $y = (x-a)^2 + b$, där (a, b) är minimipunktens koordinater. Denna är på många sätt mer ändamålsenlig än den traditionella $f(x) = x^2 + px + q$, speciellt i denna typ av matematiska uppgifter.

Integralers innebörd

När elever undersöker vad integralbegreppet innebär, är det vissa egenskaper som är svåra att förstå. Ganska vanligt är att man uppfattar dem som areor, vilket stöds av övningar där man utnyttjar över- och undersummor av areor av rektanglar för att bestämma integralen. Med dynamisk programvara kan man istället undersöka hur integrationsgränserna styr värdet på integralen. När blir den negativ? Är det möjligt att finna integrationsgränser som ger integralvärdet, utan att dessa sammanfaller?



I detta verktyg kan man inte på ett enkelt sätt symboliskt få fram den primitiva funktionen. För detta krävs att man utnyttjar ett CAS-verktyg. I ett sådant skulle det kunna se ut som raderna till vänster visar. Observera att verktyget byter ut värdet -2,5 mot det rationella -5/2, för att kunna ange ett exakt uttryck.

```
(%i1) integrate(3*x*(x-1)*(x-2.5), x);
`rat' replaced -2.5 by -5/2 = -2.5
```

(%o1) $$\frac{3x^4 - 14x^3 + 15x^2}{4}$$

Referenser

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 67-101.

Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, 106(1), 5-61.

Ifrah, G. (2004). *Räknekonstens kulturhistoria – Från forntiden till dataåldern, I-II.* Stockholm: Wahlström & Widstrand.

Persson, P-E. (2009). Handheld calculators as tools for students’ learning of algebra. *NOMAD, Nordic Studies in Mathematics Education*, Vol.14, No.2, 101-129.

Säljö, R. (2005). *Lärande och kulturella redskap: Om lärprocesser och det kollektiva minnet.* Stockholm: Nordstedts.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 20, No. 2, 5-24.

Vygotskij, L. (1999). Tänkande och språk. (Öberg Lindsten, K., Övers.). Göteborg: Daidalos. (Original publicerat 1934)