603a

Symmetrier i islamske mønstre

Frode Rønning er professor i matematikkdidaktikk ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU) i Trondheim. Han har arbeidet mye med lærerutdanning og er opptatt av koblinger mellom matematikk (geometri) og kunst/arkitektur og hvordan slike koblinger kan brukes som utgangspunkt for elevers arbeid med matematikk.

Innledning

I kunst og arkitektur kan en lett finne eksempler som kan kobles til ulike matematiske begreper, særlig begreper fra geometri. Det er vel kjent at kunstnere opp gjennom tidene bevisst har brukt begreper som naturlig kan sies å høre hjemme i matematikken, eksempelvis forholdstallet Det gylne snitt, som støtte når elementene i et bilde skulle settes sammen (se f.eks. Jacobsen, 1965). På den annen side er det også rimelig å tro at det i mange tilfeller er slik at de matematiske sammenhengene ikke har vært styrende for kunstnerens utforming, men at bevisstheten om dem trer fram når man i ettertid betrakter kunstverket med et matematisk blikk. Man kan si at man da matematiserer kunsten, og det er naturligvis bare én av mange mulige måter å nærme seg et kunstverk på. Min påstand er at en slik matematisering har verdi fordi den bringer inn et språk (det matematiske) som man kan snakke om kunsten i, og ved hjelp av dette språket kan man trenge inn i detaljer ved kunstverket som man kanskje ellers ikke ville ha blitt oppmerksom på. I en skolesammenheng mener jeg at en slik innfallsvinkel vil være verdifull både for matematikkfaget og for faget kunst og håndverk (som tilsvarer *bild* og *slöjd* i Sverige). Eksempler på dette er vist i (Rønning, 2003, 2008).

Jeg vil her arbeide med begrepet *symmetri* og spesielt studere symmetrier i mønstre fra islamsk kultur. Symmetri, og begreper knyttet til dette (speiling, rotasjon, parallellforskyvning) er sterkt vektlagt i den norske læreplanen der det for eksempel allerede etter fjerde skoleår står at elevene skal kunne gjenkjenne og bruke speilsymmetri og parallellforskyvning i konkrete situasjoner (Utdanningsdirektoratet, 2006). I den svenske Kursplan för Matematik (Skolverket, 2000) ser jeg ikke at begrepet symmetri er eksplisitt brukt, men det står som mål etter femte skoleår at elevene skal ”ha en grundläggande rumsuppfattning och kunna känna igen och beskriva några viktiga egenskaper hos geometriska figurer och mönster". Slike ”viktiga egenskaper” vil naturlig kunne være symmetriegenskaper. I kursplanutkastet som finnes under Skola 2011 er imidlertid symmetribegrepet sterkere betont. Her står det for eksempel at sentralt innhold i årskursene 1-3 skal være ”[h]ur symmetri kan upptäckas i naturen och konstrueras i praktiska situationer", og i årskurs 6-9 finnes begrepene speiling, rotasjon og parallellforskyvning (spegling, rotation och förskjutning) eksplisitt nevnt (Skolverket, 2009).

Geometriens mange ansikter

Ordet geometri betyr direkte oversatt *jordmåling* (jordmätning) og sikter dermed på svært praktiske formål som for eksempel det å kunne angi størrelsen på, og dermed sammenligne, ulike jordområder. I oldtidens Hellas ble geometrien opphøyd til filosofi og utviklet seg til å bli selve prototypen på en logisk-deduktiv vitenskap der alle sannheter skulle kunne utledes på grunnlag av et lite antall aksiomer (postulater) og opplagte sannheter (common notions). Dette ble som kjent beskrevet på en svært detaljert måte av Euklid i hans verk Elementene (Heath, 1956). Sentralt innenfor måleaspektet er også det å kunne arbeide ”utenfor jordas grenser” der man for eksempel tar i bruk stjernehimmelen for å kunne navigere, eller sollyset for å gjøre andre beregninger, slik som i historien om Erathostenes som målte skyggen på to ulike steder på samme tid og ut fra disse målingene var i stand til å beregne jordas omkrets (Holme, 2001, ss. 312-315). I tillegg til de aspektene ved geometri som innebærer ulike praktiske anvendelser i form av målinger og beregninger, og de logisk-deduktive i form av Euklids aksiomatiske oppbygning, kan man peke på ett aspekt som er nokså forskjellig fra disse, det som er knyttet til kunst og mønstre. Innenfor dette aspektet vil beskrivelser av *symmetri* ha en sentral plass, mens målinger og beregninger vil være mindre framtredende.

Grunnleggende symmetrier

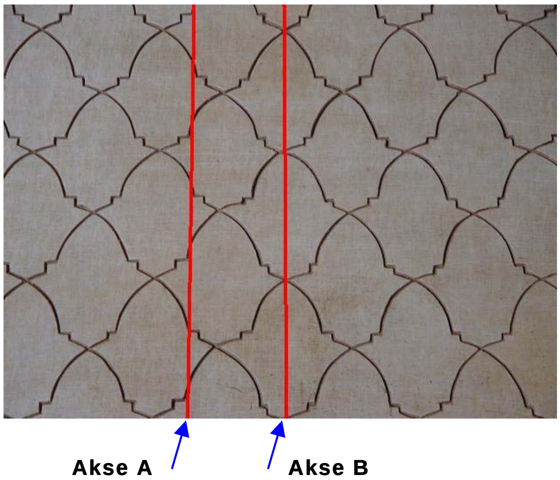
Jeg vil her diskutere symmetrier i flatedekkende mønstre, altså mønstre som kan tenkes å fortsette i det uendelige i to retninger. I et slikt mønster kan man tenke seg ulike transformasjoner som bevarer mønsteret. Slike transformasjoner er speiling, rotasjon og parallellforskyvning (förskjutning). Disse har den egenskapen at om man gjør to av dem etter hverandre, så kan denne prosessen beskrives ved hjelp av én eneste transformasjon. For eksempel kan to rotasjoner etter hverandre beskrives som én rotasjon, og en speiling etterfulgt av en rotasjon kan beskrives som én speiling. Om man gjør en forskyvning og så en speiling, så kan ikke det uttrykkes som én av de tre nevnte. Dette blir en ny transformasjon som kalles glidespeiling (glidspegling). Disse fire operasjonene (speiling, rotasjon, parallellforskyning og glidespeiling) utgjør alle kongruensavbildningene i planet, og de har altså den egenskapen at om to forskjellige slike avbildninger utføres etter hverandre, så kan resultatet beskrives som én eneste avbildning av én av de fire typene.

Karakterisering av flatedekkende mønstre

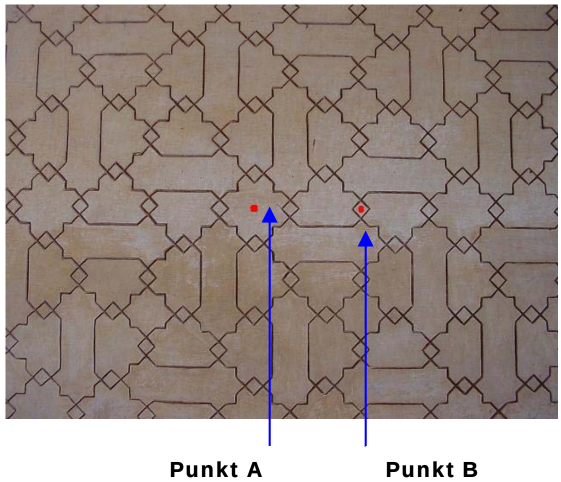
De fire kongruensavbildningene kan brukes til å beskrive flatedekkende mønstre. Hvis man bruker det som utgangspunkt, og sier at to mønstre oppfattes som like dersom de har de samme kongruensavbildningene, så er det rimelig at det bare finnes et begrenset antall muligheter. Faktisk er det slik at det finnes nøyaktig 17 ulike flatedekkende mønstre, og disse omtales ofte som de 17 tapetmønstrene (se f.eks. Martin, 1982). Bygninger i islamsk kultur er ofte svært rikt dekorert, og mange av mønstrene dekker store flater slik at de lett kan oppfattes som uendelige, selv om de naturligvis ikke er det. Man kan finne gode eksempler på slike bygninger mange steder, men i Vest-Europa er trolig palasset Alhambra ved Granada i Spania den rikeste kilden. Dette palasset er en arv fra den tiden den islamske (mauriske) kulturen dominerte de sørlige delene av Spania, og sammen med den store moskeen i Córdoba er disse de best bevarte minnesmerkene fra denne kulturen. Islamske mønstre har vært inngående studert med tanke på klassifisering i de ulike tapetmønstrene, og særlig når det gjelder mønstrene i Alhambra har mange vært opptatt av hvorvidt en kan finne eksempler på alle 17 blant disse mønstrene.

For å bestemme hvilket tapetmønster et gitt mønster hører til, kan det være lurt å begynne med å finne mønstrets rotasjoner. Det viser seg nemlig at det er svært begrenset hvilke rotasjoner et uendelig mønster kan ha. De eneste mulighetene er rotasjoner på 60, 90, 120 og 180 grader, og rotasjon på 60 eller 120 kan ikke opptre sammen med rotasjon på 90. Denne begrensningen i mulige rotasjoner kalles ofte for *den krystallografiske restriksjon* og det er ikke veldig vanskelig å vise at det må være slik (Martin, 1982). Når man har identifisert rotasjonene, kan man gå videre for å se etter hvilke speilinger man finner. På nettstedet til The Knowledge Management Research group (KMR, 2003) finnes et flytdiagram som kan brukes for å plassere et gitt mønster i én av de 17 tapetmønstrene.

I figur 1 og figur 2 (alle bilder er tatt av forfatteren) viser jeg to mønstre fra Alhambra der det er relativt lett å avgjøre hvilke symmetrier de har. Mønstret i figur 1 har ingen rotasjoner, men det har en speilingsakse (akse B) og en glidespeilingsakse (akse A). Mønstret i figur 2 har derimot verken speilinger eller glidespeilinger, men det har to ulike rotasjonssentre – punkt A som er et 90 graders rotasjonssentrum og punkt B som er et 180 graders rotasjonssentrum.



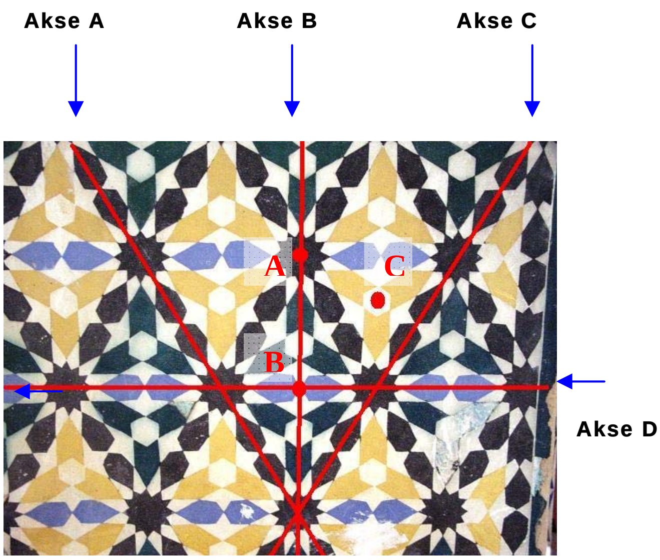
Figur 1



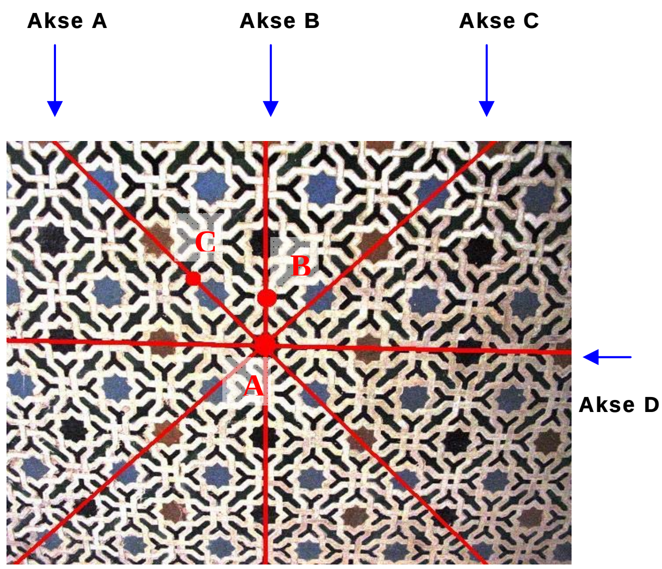
Figur 2

Alhambra og de 17 tapetmønstrene

De to eksemplene vist ovenfor viser to av de 17 mulige tapetmønstrene funnet i Alhambra. Hvis man stiller spørsmålet om det er mulig å finne alle 17 der, så skulle en i utgangspunktet tro at det var mulig å besvare det med enten ja eller nei dersom man bare undersøker grundig nok. Det er derfor interessant å se at det har vært gitt motstridende svar på dette spørsmålet (se f.eks. Grünbaum, 2006 og Pérez-Goméz, 1987), og dette faktum danner et interessant utgangspunkt for å diskutere hvordan man faktisk kan avgjøre hvilke symmetrier et konkret mønster virkelig har. Det er mange ulike hensyn som kan tenkes å komme inn i en slik vurdering, og jeg vil ikke komme inn på alle her, men ved hjelp av to eksempler vil jeg vise noen dilemmaer man kan komme opp i som gjør at det ikke uten videre er så enkelt som i figur 1 og 2 å bestemme hvilket tapetmønster man står overfor.



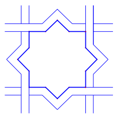
Figur 3



Figur 4

Mønstrene i figur 3 og 4 kan tjene som eksempler på problemstillingen nevnt ovenfor. Det første man må tenke på er bruken av farger. Skal man kreve at like farger avbildes på hverandre for at man skal ha en kongruensavbildning, eller skal man bare bry seg om selve de geometriske figurene i mønstret? Figur 3 er ganske fargerik, men nettopp det gjør at den ikke er så rik på symmetrier dersom man tar hensyn til fargene. Det er to ulike rotasjonssentre, punkt A og B, og disse tilater bare 180 graders rotasjon. Det er videre to ulike speilingsakser, akse B og D. Hvis man derimot ser bort fra fargene, det vil si tenker på de sorte, gule og blå delene bare som ”ikke hvite”, så blir symmetriene annerledes. Da blir minste rotasjon om punkt A 60 grader, og i tillegg kommer det fram et nytt rotasjonssenter, punkt C, med 120 graders rotasjon. Det kommer også to nye speilingsakser, akse A og C. En lignende situasjon har man i figur 4. Med farger gir punktene A og B 180 graders rotasjon, uten farger 90 grader. Og i tillegg kommer da punkt C med 180 graders rotasjon. Speilingsaksene blir også annerledes, akse A og C er ikke speilingsakser i mønstret dersom man tar hensyn til fargene.

Mønstret i figur 4 inneholder også flere overraskelser. Hvis man ser nærmere på dette, for eksempel rundt de fargede åttetakkede stjernene, kan man kanskje oppdage at de speilingene som ved første øyekast synes opplagte, kanskje ikke er så opplagte allikevel. Man vil kanskje kunne oppdage at de hvite båndene rundt stjernene er flettet i et over-under mønster. Den stiliserte figuren under (Figur 5) viser dette tydeligere. Hvis man tar hensyn til dette, er det klart at mønstret ikke vil inneholde speilinger i det hele tatt, uavhengig av om man tenker på farger eller ikke. Dette viser at et spørsmål som i utgangspunktet kan synes å være slik at det må ha et klart svar, kanskje ikke er så klart likevel.



Figur 5

Litteratur

Grünbaum, B. (2006). What symmetry groups are present in the Alhambra? *Notices of the American Mathematical Society, 53*(6), 670-673.

Heath, T.L. (1956). The thirteen books of Euclid’s elements with introduction and commentary (2. utg.). New York: Dover.

Holme, A. (2001). *Matematikkens historie. Fra Babylon til mordet på Hypatia.* Bergen: Fagbokforlaget.

Jacobsen, G. (1965). *Noget om konstruktiv form i billedkunst.* København: Gyldendal.

KMR. (2003). *Tapetsymmetri.* Lastet ned 29. november 2009 fra http://kmr.nada.kth.se/VML/Matematik-inscannat/Geometri/Symmetri/Tapet-symmetri-fl%259ades-alg.pdf

Martin, G. E. (1982). *Transformation geometry. An introduction to symmetry.* New York: Springer.

Pérez-Gómez, R. (1987). The four regular mosaics missing in the Alhambra. *Computer and Mathematics with Applications, 14*(2), 133-137.

Rønning, F. (2003). En katedral för lärande i geometri. *Nämnaren, 30*(4), 3-8.

Rønning, F. (2008). Barns språk for å uttrykke ulike former for symmetri. I T. M. Guldal, G. Løkken, N. Naastad, & F. Rønning (Red.), *FoU i praksis 2007. Rapport fra konferanse om praksisrettet FoU i lærerutdanning* (ss. 321-331). Trondheim: Tapir Akademisk Forlag.

Skolverket. (2000). *Kursplan för matematik.* Lastet ned 29. november 2009 fra http://www.skolverket.se/sb/d/2386/a/16138/func/kursplan/id/3873/titleId/MA1010%20-%20Matematik

Skolverket. (2009). *Utkast til kursplan i matematik.* Lastet ned 29. november 2009 fra http://www.skolverket.se/sb/d/3095

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk fellesfag.* Lastet ned 29. november 2009 fra http://www.utdanningsdirektoratet.no/grep/Lareplan/?laereplanid=994153&visning=5&sortering=3&hoid=994155