

509a

Förståelse genom tröskelbegrepp

Kerstin Pettersson är biträdande lektor i matematikämnets didaktik vid Stockholms universitet. Hon har erfarenhet från matematikundervisning i gymnasieskolan samt inom ingenjörsk- och lärarutbildning.

Sammanfattning:

I elevers strävan att utveckla förståelse inom ett område blir vissa begrepp mer avgörande än andra. Dessa begrepp kan benämnas tröskelbegrepp. De fungerar som en portal till ett tidigare onåbart och i början problematiskt sätt att tänka om någonting. De har en potential att öppna för förståelse av hela området. Exempel på tröskelbegrepp är funktion, gränsvärde, derivata och integral. I min avhandling har jag undersökt studenters begreppsuppfattningar för dessa begrepp. Resultaten visar att studenterna tolkar den matematik de möter på olika sätt, och att studenterna utnyttjar en dynamik mellan olika aspekter av sina begreppsuppfattningar. Denna dynamik utgör en viktig del i utvecklingen av förståelsen av tröskelbegreppen. Även i grundskolans matematik finns tröskelbegrepp, t.ex. bråkbegreppet. Kunskaper om dessa begrepp kan hjälpa oss att skapa goda lärsituationer för eleverna.

Inledning

I studier av elevers begreppsuppfattningar fokuseras ofta elevers svårigheter och missuppfattningar men det finns också forskare som menar att dessa ofullständiga eller felaktiga uppfattningar utgör en del av utvecklingsprocessen. Jag har i min forskning valt att lyfta fram den potential som finns i elevers agerande när de möter ett matematiskt material. Med det perspektiv jag har tagit vill jag visa hur elever använder de begreppsuppfattningar de har och hur de förmår utnyttja sina uppfattningar i ett matematiskt arbete. I min avhandling *”Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel – en studie av hur studenter utnyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys”* (Pettersson, 2008a, se även Pettersson, 2009) visar jag hur universitetsstudenter väljer att tolka det matematiska material de möter på olika sätt. Jag visar också hur studenterna utnyttjar en dynamik mellan olika aspekter av sina begreppsuppfattningar. Avhandlingen innefattar två delstudier där studenternas förståelse av begreppen funktion, gränsvärde, derivata och integral studeras.

Tröskelbegrepp

I elevers och studenters arbete med att skapa förståelse för den matematik de arbetar med blir vissa begrepp mer avgörande än andra. Meyer och Land (2003) har inom ramen för ett brittiskt forskningsprojekt introducerat benämningen *tröskelbegrepp* (*”threshold concepts”*) för sådana begrepp. Dessa begrepp kan fungera som en portal till ett i början problematiskt sätt att tänka om någonting. Tröskelbegrepp är ofta svåra att lära men när man väl kommit över tröskeln öppnar sig helt nya möjligheter. Det handlar inte bara om en ny förståelse för själva begreppet, förståelse för tröskelbegrepp öppnar upp för vidare lärande och förståelse av hela området. Förståelsen ger nya möjligheter och en ny syn på hela det område där begreppet finns. Tröskelbegrepp karaktäriseras av att vara transformativa, irreversibla och integrativa. Detta innebär att förståelse för tröskelbegrepp ger ett förändrat synsätt (transformativt) och när detta antagits är det svårt att återta det ursprungliga (irreversibelt). Förståelse för tröskelbegreppen kan också exponera tidigare dolda samband mellan begrepp inom området (integrativt).

Tröskelbegrepp har en potential att förändra studenters förståelse av ett ämnesinnehåll. Tröskelbegrepp inom ett område är ofta kopplade till varandra och till många av områdets övriga begrepp. Genom att studera hur studenter uppfattar och använder tröskelbegrepp inom ett matematiskt område kan vi få kunskaper om hur studenterna förstår områdets begreppsliga innehåll.

Utveckling av förståelse

Inom matematikdidaktisk forskning har under flera decennier diskuterats hur matematisk förståelse ska definieras. Utgående från tidigare forskning har en modell för utveckling av förståelse skapats av Baroody, Feil och Johnson (2007). Redan på 70-talet talade Skemp om *instrumentell och relationell förståelse*. Med instrumentell förståelse avses att individen endast vet hur något ska göras, relationell förståelse innefattar både att veta vad som ska göras och varför. På 80-talet diskuterade Hiebert två olika kunskapstyper, *procedurell och konceptuell kunskap*. Att ha procedurell kunskap innebär att ha *kunskaper om regler och procedurer* medan den konceptuella kunskapen beskrivs som kunskap rik på kopplingar, den utgör en sammanhängande väv av kunskap. Dessa klassificeringar har diskuterats vidare under 2000-talet av Star. Han menar att en bättre definition av konceptuell kunskap är *kunskap om begrepp och principer*. Med denna definition blir det möjligt att tala om konceptuell kunskap även när denna är ytlig och osammanhängande. Star menar också att även den procedurella kunskapen kan vara rik och väl sammanhängande.

Baroody, Feil och Johnsons (2007) modell bygger vidare på Stars idéer. De beskriver utveckling av kunskap och förståelse som en process med start i osammanhängande och ytlig procedurell kunskap samt i stort sett obefintlig konceptuell kunskap. Genom ökad procedurell och även konceptuell kunskap samt sammanfogande av dessa kunskaper har utvecklingsprocessen ett mål där både den procedurella och den konceptuella kunskapen är rik och väl sammanhängande samt även rik på kopplingar mellan dessa kunskapstyper. Modellen innebär att procedurell och konceptuell kunskap stöder varandra i lärprocessen. Förståelse definieras i linje med denna modell som innefattande både procedurell och konceptuell kunskap där graden av förståelse beror på hur rika och väl sammanhängande dessa kunskaper är.

Algoritmisk kontext och formell kontext

I min avhandling har jag studerat hur universitetsstudenter använder sina begreppsuppfattningar (Pettersson, 2008a, en presentation finns även i Pettersson, 2009). Det visar sig att de gör olika tolkningar av det matematiska material de möter. I en delstudie har studenter i början av sina matematikstudier inom högskoleingenjörsutbildning intervjuats om sina uppfattningar av begreppen gränsvärde och integral (Pettersson & Scheja, 2008). Dessa studenters begreppsuppfattningar kan beskrivas som procedurinriktade. Studenterna ser själva operationerna som definierande för begreppen och de få kopplingar som görs mellan olika begrepp bygger på vad begreppen används till. Det algoritmiska sammanhanget är dominerande. Flera studier av andra forskare visar att en algoritmisk begreppsuppfattning är funktionell i det sammanhang där dessa studenter befinner sig. Vi kan se dessa begreppsuppfattningar som rimliga om vi antar att studenterna tolkat begreppen i en *algoritmisk kontext* där själva operationerna är definierande egenskaper och bas för förståelsen. Men studien visar också att genom impulser från utmanande frågor kan även andra tolkningar av begreppen öppnas för studenterna, förståelsen kan vidareutvecklas genom kontextskiften.

I den andra delstudien har studenter från ett matematikprogram i grupp arbetat med en utmanande uppgift (Pettersson, 2008b). Uppgiften behandlar begreppen funktion och derivata. Hur många nollställen kan en funktion ha om man vet att n:te derivatan är skild från noll? Dessa studenter som kommit lite längre i sin utbildning tolkar matematiken i en *formell kontext* där intuitiva idéer utgör viktiga inslag. De utnyttjar formella och intuitiva aspekter av matematiken i ett dynamiskt samspel.

Transformation genom kontextskifte

De begrepp som studerats i min avhandling är alla tröskelbegrepp. Förståelse för dessa begrepp förändrar inte bara studentens uppfattning om själva begreppet, förståelsen möjliggör också en förändring av studentens syn på hela det matematiska området. Ingenjörsstudenterna tolkade begreppen i en algoritmisk kontext men när studenterna genom provocerande frågor utmanas att tolka begreppen i en vidare kontext skapas nya möjligheter. Dessa kontextskiften hänger samman med tröskelbegreppens transformativitet (Scheja & Pettersson, 2009) och utgör en viktig del i utvecklingen av förståelse av tröskelbegreppen. Begreppsuppfattningarna förändras och utvecklas när begreppen kontextualiseras på nya sätt. En förmåga att växla mellan olika tolkningar är avgörande för utvecklingen av förståelsen. Dessa växlingar mellan olika kontexter illustrerar tröskelbegreppens transformativa egenskap. Transformationen gäller inte bara studenternas uppfattningar om begreppen. Kontextskiften skapar också en möjlighet för studenterna att närma sig ämnets språk, normer och praktiker. Förståelse för tröskelbegreppen möjliggör en förändring av studenternas syn på tankesätt och handlingsnormer inom ämnet.

Tröskelbegrepp i grundskolans matematik

De tröskelbegrepp som studerats i min avhandling möter eleverna främst i matematikstudier i gymnasieskola och högskola/universitet. Men även i grundskolans matematik finns begrepp av denna karaktär, ett exempel är bråkbegreppet. Många studier vittnar om att bråkbegreppet är svårt att lära, men med en förståelse för bråkbegreppet öppnas nya möjligheter till förståelse för flera av matematikens områden (se t.ex. Runesson, 1999). Förståelse för att ett bråktal kan skrivas på oändligt många sätt och att bråkstrecket inte här signalerar operationen division innebär för många elever ett stort steg från ett vardagstänkande till ett mer formellt tänkande. Ett bråk måste ses som ett par av tal och samtidigt som en enskild kvantitet. Dessutom måste eleven skapa förståelse för relationen del - helhet. En förståelse för bråkbegreppet ger även redskap viktiga för förståelse av algebraiska samband och operationer. Elevens taluppfattning och förståelse för talsystemet kan också vidareutvecklas.

Flera intressanta frågor kan ställas om tröskelbegrepp inom matematik. Vilken roll har tröskelbegreppen i undervisningen? Vilka begrepp är av denna karaktär och vilka möjligheter erbjuder de? Handlar möjligheterna om att just dessa begrepp kräver kontextväxlingar av genomgripande slag för att de ska förstås i matematisk mening? Genom att satsa på att bygga upp elevernas förståelse för tröskelbegrepp får vi vinster även inom andra områden. Om vi som lärare är medvetna om tröskelbegreppens egenskaper kan vi genom att satsa mycket kraft på förståelse av dessa skapa möjligheter för eleverna att utveckla en god matematisk förståelse.

Litteratur

Baroody, A., Feil, Y. & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(2), 115-131.

Meyer, J. H. F. & Land, R. (2003). Threshold concepts and troublesome knowledge: Linkages to ways of thinking and practising within the disciplines. In C. Rust (Ed.), *Improving student learning: Improving student learning theory and practice - Ten years on*. Oxford: Oxford Centre for Staff and Learning Development.

Pettersson, K. (2009). Algoritmiska, intuitiva och formella begreppsuppfattningar i dynamiskt samspel. I G. Brandell, B. Grevholm, K. Wallby & H. Wallin (red.) *Matematikdidaktiska frågor – resultat från en forskarskola*. Göteborg: NCM och SMDF.

Pettersson, K. (2008a). *Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel: En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys*. Doktorsavhandling, Matematiska vetenskaper, Göteborgs universitet. <http://www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints/Doctoral/2008/1.pdf>

Pettersson, K. (2008b). Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang: En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordisk matematikdidaktik (NOMAD)*, 13(1), 29-50.

Pettersson, K. & Scheja, M. (2008). Algorithmic understanding and potentiality: A case study of students' conceptual understanding. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 39(6), 767-784.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik - skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll*. Doktorsavhandling, Göteborgs universitet.

Scheja, M. & Pettersson, K. (2009). Transformation and contextualisation: conceptualising students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Higher Education*, Online First.