

362b

Räkning – en kul historia

Kerstin Larsson, universitetsadjunkt vid Stockholms universitet

Niclas Larson, fil. lic. och universitetsadjunkt vid Stockholms universitet

Tala om talsystem

Vi kommer att ge exempel på tre historiska talsystem samt det binära talsystemet och hur man kan jobba med och i dessa talsystem. Vårt övergripande syfte med att arbeta med andra talsystem är att öka förståelsen för vårt eget positionssystem med basen tio.

Av erfarenhet vet vi att en av de stora stötestenarna för att utveckla god taluppfattning är bristande förståelse för positionssystemet. Uppenbarligen räcker det inte för många av våra elever att bara lära sig att fyran i 435 står för fyra hundratal, trean står för tre tiotal, och femman för fem ental. De behöver få laborera med olika typer av materiel och uppgifter som sätter positionssystemet i fokus. Men inte heller det är tillräckligt för alla elever. Det kanske är så att vi behöver variera sättet att skriva tal, för att uppfatta positionssystemet och bas tio.

Se dubbelt!

Vårt första exempel är det binära talsystemet. Detta är en blick in i modern teknik eftersom våra datorer utnyttjar ett binärt talsystem. I ett binärt talsystem finns endast två olika siffror, 0 och 1. När man skriver räkneramsan ser det ut så här: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

Detta kan illustreras med elever som får vara siffrorna i en display. En elev som står rätt upp och ner symboliserar siffran 0, medan en elev som sträcker upp ena armen symboliserar siffran 1. Genom att eleverna får illustrera räkneramsan upptäcks när växling till nästa position måste ske och när antalet siffror i displayen inte räcker till. Med lite fantasi kan man göra en display för basen tre på liknande sätt. Vi kommer att återkoppla till det binära talsystemet senare då vi visar egyptisk multiplikation.

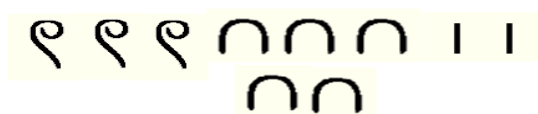
Fy farao!

I Egypten utvecklades ett skriftspråk och ett talsystem för tusentals år sedan. Deras talsystem byggde på bas tio, även om det inte är ett positionssystem. De skrev sina hieroglyfer genom att blanda en färg av sot, kol, bivax, gelatin och vatten. Man skrev på papyrus som är ett slags papper gjort av vass. De ristade också in sina tecken i sten. Det finns bevarat skrifter både på papyrus och i sten.

						
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Med hjälp av dessa tecken byggde man ihop tal.

Så här kunde de skriva talet 352



och här står det 924.



Eftersom själva tecknen symboliserar värdet spelar det ingen roll i vilken ordning man skriver dem. Detta utmärker ett talsystem som inte är ett positionssystem. Här nedan ser vi talet 32 skrivet på två olika sätt.



Farao ser dubbelt

När egyptierna skulle multiplicera tal hade de en speciell teknik. För att det ska bli lättare att förstå, skriver vi med våra vanliga siffror nu.

- Vi ska beräkna $12 \cdot 7$. Vi skriver 1 och 7 långt ner på en skrivtavla (se fig. 1).
- Sedan dubblar vi både 1 och 7. Dessa tal (2 och 14) skriver vi ovanför (se fig. 2).
- Sedan dubblar vi 2 och 14. De svaren skriver vi ovanför (se fig. 3). 4 är ju dubbelt mot 2 och 28 är dubbelt mot 14.
- Nu ska vi dubbla 4 respektive 28. Det är 8 respektive 56 och det skriver vi ovanför igen (se fig. 3).
- Nu behöver vi inte göra fler dubbleringar, för nu kan vi leta reda på de tal i vänstra spalten som har summan 12. Det är 8 och 4. Då tar vi de tal i högra spalten som hör ihop med 8 och 4, dvs. 56 och 28. Dessa båda tal adderar vi. Svaren skriver vi allra längst ner på skrivtavlan (se fig. 5). Då har vi tagit reda på att $12 \cdot 7 = 84$.

<u>1</u>	<u>7</u>

fig. 1

2	14
<u>1</u>	<u>7</u>

fig. 2

4	28
2	14
<u>1</u>	<u>7</u>

fig. 3

8	56
4	28
2	14
<u>1</u>	<u>7</u>

fig. 4

8	56
4	28
2	14
<u>1</u>	<u>7</u>
12	84

fig. 5

Det är förmodligen ännu enklare att utföra dessa dubbleringar direkt i det egyptiska talsystemet eftersom man helt enkelt tar dubbelt så många av den symbol man har. Sedan får man förstås växla in tio stycken av en symbol mot den symbol som är värd tio gånger mer.

Här återkommer det binära talsystemet i den vänstra spalten och som vi upptäckte i den binära displayen går alla tal att skriva genom att summera rätt kombination av talen 1, 2, 4, 8, 16, ...

Haja Maya!

I Centralamerika utvecklade Mayaindianerna en högkultur ca 300 f.Kr. För att skriva tal använde de ett positionssystem med basen 20. De använde endast tre symboler för att bygga upp siffrorna i respektive position. Symbolerna var en prick, ett streck och ett snäckskal.

Sannolikt var dessa symboler från början till exempel pinnar och småstenar.

0	1	2	3	4
	•	••	•••	••••
5	6	7	8	9
	•	••	•••	••••
10	11	12	13	14
	•	••	•••	••••
15	16	17	18	19
	•	••	•••	••••

För att siffrorna ska bli lättare att uppfatta använder man ett streck i stället för fem prickar, det betyder att fem är ett slags mellanbas i talsystemet.

När man kom till 20 behövde man växla, precis som vi gör när vi kommer till 10. Talet 20 är alltså en prick och ett snäckskal, dvs. ett tjugotal och noll ental. Detta skrev de vertikalt, så att tjugotalet hamnade ovanför entalet.



Så här skrev man alltså talet 20.

Till höger visas talet 54, som är uppbyggt av 2 tjugotal och 14 ental.



I nästa position är talvärdet $20 \cdot 20 = 400$. Här står alltså 900.



Babbel i Babylon

I Mesopotamien, landet mellan floderna, utvecklades ett talsystem som kunde uttryckas med hjälp av endast två skrivtecken. Man skrev på lertavlor genom att trycka in en träkil i den mjuka leran. Babyloanierna hade också ett positionssystem där man använde sig av en mellanbas. Deras system byggde på basen 60 och med 10 som mellanbas.

Så här såg de båda symbolerna för 1 respektive 10 ut.



För att vi nu ska slippa klippa in bilder kommer vi att använda Y för den stående kilen och < för den liggande. Exempelvis betyder YYY talet 3, <<YYY talet 23 och <<< betyder 30. När man kommer till 60 måste man växla och har då ett sextiotal. Detta skrivs Y. Det ser likadant ut som talet 1, eftersom babyloanierna inte hade något tecken för 0. YY kan alltså vara 2 eller 120. Det var sammanhanget som avgjorde vilket tal som avsågs.

Under i undervisning?

Genom att arbeta med olika talsystem, både sådana som är positionssystem och sådana som inte är det, tror vi att vi ger fler elever möjlighet att fördjupa sin förståelse för vad ett positionssystem är och hur vårt eget tiobassystem är uppbyggt. Detta är givetvis inte en mirakelmetod som löser alla våra problem med de elever som inte greppar positionssystemet. Men det kan vara ett verkningsfullt komplement. Det historiska perspektivet kan få liv genom

ämneshöjning av detta slag. Det innebär ett tillfälle att intressera eleverna för matematikens historia och ge dem möjlighet att inse "att matematiken har spelat och spelar en viktig roll i olika kulturer och verksamheter" som det står i kursplanen i matematik för grundskolan.

Blandade böcker

Här följer några lästips. *Fakta om hur man räknade förr* riktar sig direkt till barn, medan de andra i första hand är för vuxna.

Butterwoth, B. *Den matematiska människan*.

Ifrah, G. *Räknekonstens kulturhistoria*.

Johansson, B.G. *Matematikens Historia*.

Lindberg, D. & Kuijl, B. *Fakta om hur man räknade förr*.

Sjöberg, B. *Från Euklides till Hilbert: Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år*.

Listiga länkar

<http://www.mai.liu.se/~chber/kurser/LSMGC2/HistoriaF1.pdf>

<http://abel.math.umu.se/~andersf/historiaVT04/tidsaxel.pdf>