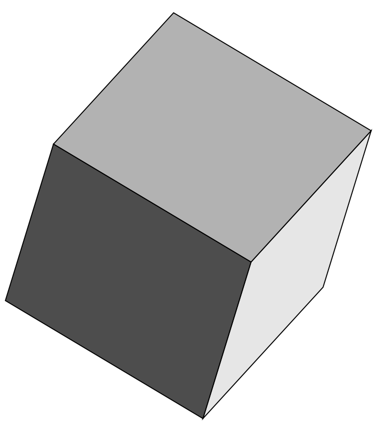
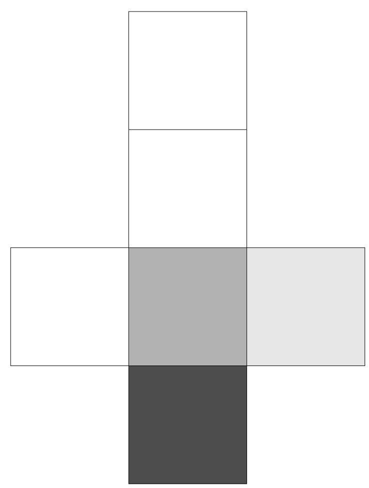
Programnummer:**302 a**
Titel:**Kartprojektioner**
Föreläsare:*Ulf Persson* Professor i matematik vid Chalmers Tekniska Högskola. Huvudredaktör för Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift) och Svenska Matematikersamfundets Medlemsutskick, samt medlem av redaktionen för European Mathematical Societys Newsletter. Planerar att skriva en bok om kartprojektioner.

Kartprojektioner

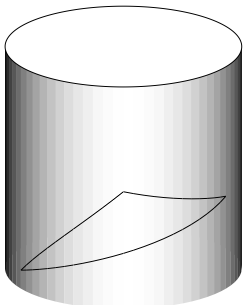
En sfär kan inte planas ut på ett plan. Detta är inte så underligt, sfären har begränsad area och har ingen kant. Varje begränsad del av planet begränsas av en kantkurva. Vi måste helt enkelt skära upp delar av sfären innan vi kan plana ut den och då uppkommer kanter. Detta är vi vana vid. Vi kan ta en kub t.ex. och skära upp vissa av kanterna och sedan lägga ut den plant som i figuren nedan.

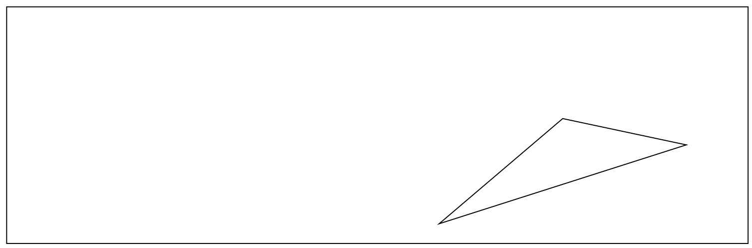




Eller vi kan även ta en cylinder (en burk) göra ett vertikalt snitt och frigöra botten och toppen och sedan veckla ut (se figur nästa sida). Bortsett från kanterna märker vi ingen skillnad lokalt. Detta är inte så underligt när det gäller kuben, ty den är ju uppbyggd av plana sidor. Det är kanske lite underligare när det gäller cylindern, ty den är ju böjd. Men om vi vore tvådimensionella figurer som levde på cylindern skulle vi inte märka någon skillnad! Om vi mäter avstånd mellan två punkter P, Q på cylindern, inte i rummet, utan längs ytan via den kortaste kurvan (den så kallade geodeten) och sedan planar ut det kommer vi att finna att avståndet mellan punkterna är oförändrat. Ritar vi en triangel PQR på cylindern och planar ut den kommer vi att finna att sidorna är fortfarande räta linjestycken.

Längderna är oförändrade, vinklarna likaså, och givetvis även areorna. Med andra ord en flatfigur skulle aldrig kunna inse att någonting hade hänt.





Däremot om vi har en sfär räcker det inte med att göra några snitt, hur liten del vi än tar av en sfär kommer den att spricka när vi försöker plana ut den. Precis som apelsinskal spricker när vi skalar en apelsin. Om apelsinskal vore mycket tunna skulle detta vara ännu mera påtagligt. Omvänt om vi skall vira runt papper kring en apelsin tenderar pappret att skrynklas.

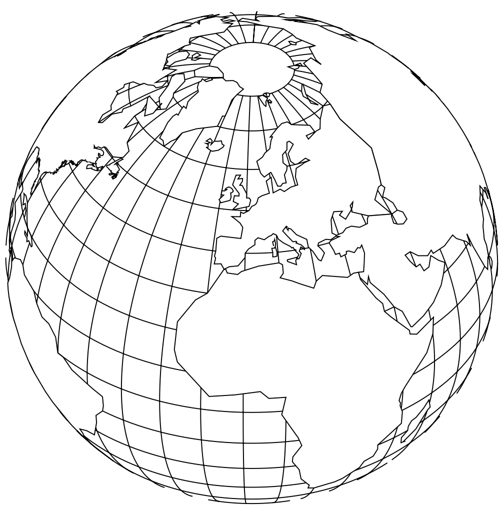
Varför spricker det? Tag en liten cirkelskiva. Om denna har radien r har omkretsen längden $2\pi r$ och arean är πr^2 som ni säkert känner till. Detta stämmer inte för en sfär. Jordens omkrets är 4000 mil (det är så vi ursprungligen definierar meter och mil). Det är således 1000 mil från nordpolen till ekvatorn. Cirkelskivan med radien 1000 mil utgöres av hela norra halvklotet. Omkretsen ges av ekvatorn med längden 4000 mil. Men enligt vår formel skulle omkretsen vara $2\pi \times 1000$mil$=$ 6283,2.. mil. En ganska stor diskrepans. Arean av halvklotet visar sig vara ungefär 2.5 miljoner kvadratmil, men formeln ger ungefär 5 miljoner kvadrat mil. Om vi tar mindre cirklar blir diskrepansen inte så stor men den finns alltid där. Det är precis därför sfäriska cirkelskivor måste spricka om vi planar ut dem. I själva verket kan man ge exakta formler. Om vi säger att sfärens radie är 1, gäller följande formler för omkrets (O) och area (A) av en sfärisk cirkelskiva.

$$O = 2\pi \sin r (= 2\pi(r - \frac{1}{6}r^3 + \frac{1}{120}r^5 + \dots), A = 2\pi(1 - \cos r)(= 2\pi(\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{24}r^4 + \dots)$$

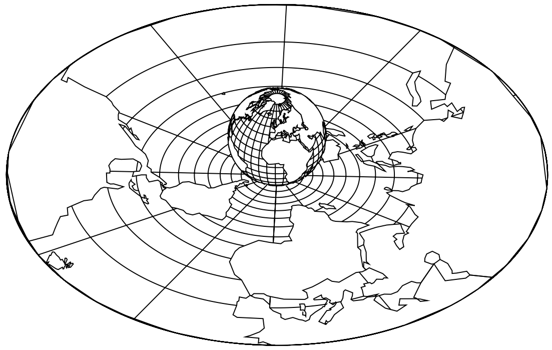
Vore Jorden en perfekt sfär, och vi drog en cirkel med radien 1 km och mätte dess omkrets. Vad skulle vi då finna? Jordens radie är 6400km, en kilometer motsvaras därmed av $r = 1/6400 \approx 1.6 \times 10^{-4}$ diskrepansen blir således i storleksordningen 2.5×10^{-8}km d.v.s 25 mikrometer, och det faller sig ju självt att en sådan diskrepans är av ingen som helst praktisk betydelse med tanke på att jordytan är långt ifrån slät med sina berg och dalar. Om vi skalar upp kommer diskrepansen att approximativt öka med kuben. I fallet radien är en mil kommer den att tusenfaldigas, men även 25 millimeter är ju en ganska beskedlig längd i sammanhanget. Ja även om radien är hundra mil kommer det inte att röra sig om mer än 25 km vilket betyder omkring 4 promille av hela omkretsen. Det är först när vi tar riktigt stora delar av jordklotet, som jordklotet själv som vi får praktiska problem.

Ett annat sätt att se på det är att vinkelsumman i en sfärisk triangel, d.v.s. en triangel vars sidor består av storcirkelbågar (de 'rätaste' kurvor som kan dras på en sfär, så kallade geodeter) alltid är strikt större än 180 grader. Ju större triangeln är desto större diskrepansen. Detta betyder givetvis att en sfärisk triangel aldrig kan avbildas på en plan triangel med bibehållande av rätheten hos sidorna och vinklarnas storlek. Skall man avbilda sfären på ett plan måste man ge avkall på vissa egenskaper. Det fundamentala faktumet är att en kartprojektion kan aldrig ha konstant skala. Skalan måste variera från punkt till punkt. Ty skulle avstånden bevaras (upp till en konstant faktor - skalan) skulle alla andra egenskaper, som vinkelriktighet, räthet också bevaras.

Den enklaste projektionen (och därav termen projektion i kartprojektion) är helt enkelt att projicera från en punkt någorlunda långt ifrån. Vad vi får då är helt enkelt hur jorden 'ser ut'. Om vi ser på denna bild som en rent plan bild skulle vi märka att den vore grovt förvrängd, men det gör vi inte, åtminstone inte om vi är väl bekanta med konturerna till världens kontinenter, ty då tolkar vi den som en perspektivbild och känner hur klotet välver sig. Automatiskt kompenserar vi för de dramatiska skalförändringarna i närheten av randen.



Låt nu projektionspunkten närma sig jordytan. Cirkelranden kommer att bli större och större, samtidigt kommer vi att se en mindre och mindre del av jordytan. Cirkeln kommer vi så småningom uppleva som horisonten, och ju närmare vi kommer marken, desto rätare kommer den att te sig. I det dagliga livet upplever vi horisonten som en rät linje, åtminstone där ett stilla hav möter himlen. Men är vi tillräckligt högt ovanför jordytan kan vi skönja horisontens böjning.

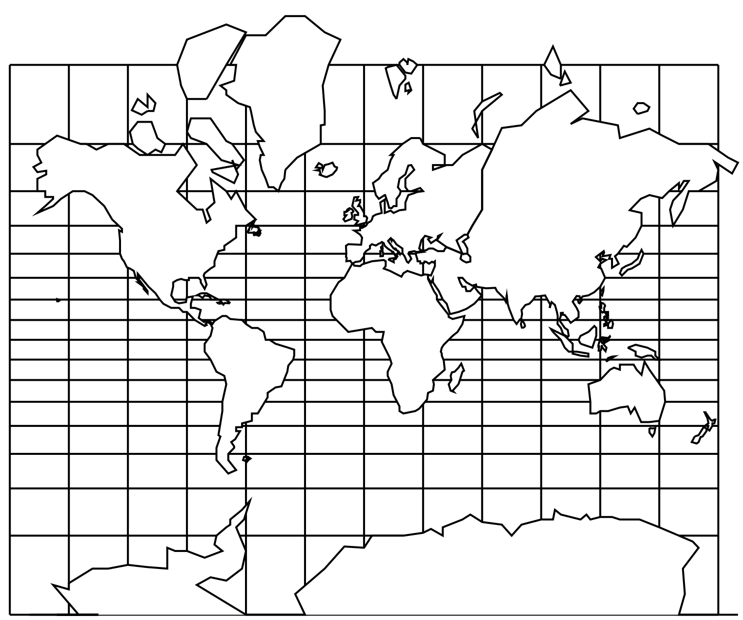


Vad händer nu om projektionspunkten infaller på jordytan?Antag att jorden vore ihålig och genomskinlig som en badboll och vi tittade in genom ett hål. Då skulle vi se hela jordytan (minus titthålet) spegelvänt och något förvrängt. Detta kallas den stereografiska projektionen, och den har egenskapen att den bevarar vinklar, d.v.s. den beskrives som vinkelriktig eller med ett finare ord - konform. Detta betyder att skalan är oberoende av riktning så cirklar avbildas på cirklar och formen bevaras (därav namnet konform). Denna avbildning av jorden är på hela planet och skalan växer mot oändligheten ju längre bort från projektionscentrum det avbildade befinner sig.

Vad händer om ögat är i badbollens medelpunkt? Då får vi en projektion (kallad den gnomiska) av halva jordytan på planet som har den egenskapen att storcirklar avbildas på räta linjer. (En storcirkel är som bekant snittet av ett plan genom sfärens medelpunkt med sfären.) Vill vi har reda på var den kortaste vägen mellan två orter bär sammanbinder vi dem helt enkelt med en rät linje på kartan. Detta kommer inte att ge oss avståndet, däremot rutten. Sådana kartor är praktiska när man bestämmer flygrutter.

Nu kan man modifiera dessa projektioner på många olika sätt. Genom radiellt ändra avståndet till medelpunkten kan man få en karta som bevarar areorna, eller en som visar rätta avståndet från en fix punkt (medelpunkten) till alla andra punkter. (Och medelpunkten kan man välja var som helst på jorden, t.ex. Biennalen i Stockholm.). Om man väljer projektionscentrum någon av polerna, kommer latituderna (breddgraderna) avbildas som koncentriska cirklar och longituderna (längdgraderna) som radiella linjer genom cirklarnas gemensamma medelpunkt.

En alternativ framställning av kartprojektioner består i att omskriva sfären med en cylinder, projicera på denna och sedan skära längs en linje och veckla ut. Om cylinderns centralaxel överensstämmer med jordaxeln kommer latituderna avbildas på parallella horisontella linjer, och longituderna som parallella vertikala linjer. Det är så vi oftast är vana vid att se världskartor. Genom att variera den longitudinella skalan (d.v.s. vi låter skalan längs en longitud bero på latituden) kan vi uppnå många olika effekter. Den mest kända är den skalfunktion som upptäcktes av Mercator på 1500-talet och vars korresponderande projektion går under hans namn, och vars definierande egenskap är att den är konform. Den avbildar jorden minus polerna på en rektangel, i själva verket en rektangel oändlig i höjdled, även om den av praktiska skäl inte trycks ut utan trunkeras vid polerna utan större förlust.



Under föredraget kommer ett antal olika kartprojektioner att presenteras liksom olika 'jordglober' i form av tetrahedrar och kuber.