301a

Proportionalitet

Anna L. V. Lundberg är forskarstuderande i matematik inom lärarlyftet, FontD, Linköpings Universitet och lärare i matematik vid Anders Ljungstedts Gymnasium, Linköping.

Inledning

Goda kunskaper i proportionellt tänkande samt förståelse av proportionalitet och bråkräkning är förutsättningar för att lyckas i studier i matematik och naturvetenskap men även i många vardagsrelaterade problem (Lamon, 2007). Forskning visar att många elever tycker proportionalitet är svårt och även vuxna uppfattar proportionalitetsproblem som svåra (Keranto, 2004). För att lära sig proportionalitet är det bra att kunna lösa tre typer av problem som i engelsk litteratur brukar kallas ’missing value’ *saknat värde*, ’numerical comparison’ *numerisk jämförelse* och ’qualitative prediction & comparison’ *kvalitativ förutsägelse & jämförelse* (Cramer & Post, 1993). Om lärare har sådana verktyg för att analysera uppgifters kvaliteter kan de göra ett bra urval av uppgifter i sin undervisning.

Proportionalitet

Proportionalitet tar lång tid att tillägna sig enligt forskning. För att göra detta är det ett naturligt steg att gå till läromedlen som är ett erkänt viktigt verktyg för matematikundervisningen i den svenska skolan. I matematik används termen proportionell när två kvantiteters förhållande är konstant, dvs den ena kvantiteten är en multipel av den andra. Om sambandet mellan två storheter x och y kan beskrivas med en ekvation $y = k \cdot x$, där k är en konstant, sägs y vara direkt proportionell mot x. Konstanten k sägs då vara proportionalitetskonstanten. Om y ritas upp i en graf mot x så kommer grafen att vara en rät linje genom origo. Om $y = \frac{k}{x}$ är y omvänt proportionell mot x. Det finns fler typer av proportionalitet, exponentiellt proportionell $y = ka^x$, logaritmisk proportionell $k = \log_a(x)$ med flera men i detta bidrag tas endast direkt proportionalitet upp.

För att utveckla hur proportionalitet används finns det uppgifter som övar proportionellt resonemang. De tre huvudtyperna av uppgifter om proportionellt resonemang, dvs. *saknat värde*, *numerisk jämförelse* och *kvalitativ förutsägelse & jämförelse* beskrivs av Cramer och Post (1993) enligt följande.

Saknat värde är uppgifter där det finns tre bitar av information i en proportionalitet och uppgiften är att ta reda på den fjärde saknade biten. Ett sätt att beteckna detta är $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ där till exempel *a*, *b* och *c* är kända och *d* ska räknas ut. Ett exempel:

Lisa och Rakel kör med samma hastighet på en landsväg. Det tar Lisa 6 minuter att köra 4 mil. Hur långt tar det för Rakel att köra 6 mil?

Numerisk jämförelse är uppgifter där två kompletta bråk eller förhållanden är givna och som inte kräver ett numeriskt svar. Uppgiften är istället att jämföra bråken eller förhållanden.
Ett exempel:

Ann och Linda använder olika vägkartor. På Anns karta är vägen 3 cm på kartan och motsvarar 15 mil i verkligheten. På Lindas karta är vägen 9 cm lång och 45 mil i verkligheten. Vem använder den största förstoringen på kartan?
a) Ann
b) Linda
c) Deras kartor har samma förstoring.
d) Det finns inte tillräckligt med information för att svara.

Kvalitativ förutsägelse & jämförelse är uppgifter som jämför olika förhållanden utan att några specifika värden anges. Exempel på *kvalitativ förutsägelse*:

Om Niklas blandar mindre koncentrerad saft med mer vatten än vad han använde igår så kommer hans saft att smaka
a) starkare
b) svagare
c) exakt samma som igår
d) Det finns inte tillräckligt med information för att svara.

Exempel på *kvalitativ jämförelse*:

Två vänner slår med hammare på var sin uppsättning spikar på varsin planka. Bo slår flera spikar än Greger. Bos planka är kortare än Gregers. På vilken planka är spikarna slagna närmast varandra?
a) Bos planka
b) Gregers planka
c) Spikarna sitter med samma avstånd på båda plankorna.
d) Det finns inte tillräckligt med information för att svara.

Svårighetsgrad
Att bedöma svårighetsgraden på uppgifter är mycket beroende av vilken elevgrupp som skall lösa uppgifterna. Ett sätt att kategorisera uppgifter i relation till vilka krav de ställer för att kunna lösas är att använda de kategorier som finns i PISA:s teoriramverk för konstruktion av uppgifter (OECD, 2003). Där används tre kategorier

- reproduktion
- samband
- reflektion

Reproduktion är uppgifter som innehåller enkla matematiska operationer grundat på faktakunskaper och standardalgoritmer. Det handlar då om att minnas välkända matematiska objekt, förhållanden och att utföra standardrutiner i välkänd kontext vid beräkningen.
Exempel:

Lös ekvationen
$7x - 3 = 15x + 15$

Samband är uppgifter som bygger på reproduction uppgifterna men tar uppgifterna till en ny situation som inte är av rutin karaktär men ändå innehåller välkänd miljö.
Exempel:

> Mary bor två kilometer från skolan, Martin fem. Hur nära har Mary och Martin till varandra?

Reflektion är uppgifter som innehåller uppgifter med inslag av reflektion som en del av uppgiften. Uppgiften kräver att eleven har förmågan att planera en lösningsstrategi och använda den. Reflektionsuppgifter kräver också att argumentera och generalisera i uppgiften.
Exempel:

> I ett speciellt land är försvarsbudgeten 30 miljoner$ år 1980. Den totala budgeten för 1980 är 500 miljoner$. Året därpå är försvarsbudgeten 35 miljoner$ emedan den totala budgeten är på 605 miljoner$. Inflationen över denna period är beräknad till 10 procent.
>
> a) Du är inbjuden till att ge en föreläsning för Pacifistiska föreningen. Din intention är att förklara att försvarets budget har minskat under perioden. Förklara hur du skulle göra detta.
> b) Du är inbjuden till att ge en föreläsning för Försvaret. Din intention är att förklara att försvarsbudgeten har ökat under denna period. Förklara hur du skulle göra detta.

Läromedel i matematik
Forskning visar att läromedel i matematik har en dominerande roll i undervisningen eftersom lärare ofta väljer exempel och uppgifter ur läromedlet (Johansson, 2006). Att läromedel är av stor betydelse märks inte minst av att en del forskare till och med ser läromedlet som en deltagare i klassrummet (Bremler, 2003). Det är därför en fördel om läraren har en klar ståndpunkt över hur undervisning och lärande ska ske i klassrummet och hur läromedlet kan användas bland flera läromedel (Brändström, 2005). Som lärare behöver man verktyg för att analysera vilka typer av uppgifter och möjligheter som läromedlen innehåller för att kunna planera en varierad undervisning som erbjuder goda möjligheter till lärande.

Sammanfattning
Eftersom proportionalitet är ett centralt begrepp både inom skolans matematik och i vardagssammanhang och som visat sig vara problematiskt för många elever att hantera, är det nödvändigt att grunda undervisningen på en medveten och systematisk analys av begreppets innebörd och användning i olika typer av uppgifter. De kategorier som beskrivits ovan erbjuder forskningsbaserade verktyg för en sådan analys men säger inget om hur läraren kan eller bör arbeta med dessa olika typer av uppgifter. Detta har säkert minst lika stor betydelse för att begreppet proportionalitet ska få den centrala roll i elevers matematiska kunnande som det har inom matematiken.

Litteratur

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty*. Luleå: Luleå Tekniska Universitet.

Bremler, N. (2003). *Matteboken som redskap och aktör : En studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 1967-2002*. Stockholm: Institutionen för undervisningsprocesser, kommunikation och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm Utbildningsförvaltningen, Stockholms stad.

Cramer, K. A., & Post, T. R. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Johansson, M. (2006). *Teaching mathematics with textbooks: A classroom and curricular perspective*. Luleå: Luleå University of Technology.

Keranto, T. (2004). On the mathematical and pedagogical content knowledge of prospective teachers: The case of the division of fractions and proportional reasoning. *Proceedings of the 21st Annual Symposium of the Finnish Association of Mathematics and Science Education Research,* University of Helsinki. pp. 178-200.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Pub.

OECD. (2003). *The PISA 2003 assessment framework mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris, France: OECD.