**207a**

# Vad är bra med de här uppgifterna?

*Stefan Löfwall* är universitetsadjunkt vid Karlstads universitet och undervisar i matematik och matematikdidaktik. Han leder också kompetensutveckling av yrkesverksamma lärare och har tidigare erfarenhet som lärare i gymnasie- och grundskola.

Det har funnits rätt mycket kritik mot matematikundervisningen i skolorna på senare år. Man har också observerat att resultaten i matematik inte varit tillfredsställande. Vad har det funnits för förslag för att få det hela bättre? Vanligt är att man för fram att det behövs mer variation i uppgifter och arbetssätt.

Men – vad vill vi uppnå med variationen? Vad vill jag uppnå som jag inte uppnår med ett traditionellt arbetssätt? Vilken matematik tränar jag i de här ”annorlunda uppgifterna” - fastnade vi inte bara på exempelnivån och insåg inte det generella i dem? Vilket ansvar tar eleverna för att ta till sig det matematiska innehåll som tränas i olika laborationer och andra aktiviteter? Hur ska man få eleverna att ta ansvar för sitt lärande? Vad kan man göra för att de ska komma ihåg bättre? Sådana här frågor har jag tänkt lyfta fram i samband med några – som jag tycker – riktigt bra uppgifter.

**Konkreta exempel och den generella matematiken**

Ett exempel som Löwing (2006) pekar på rör en uppgift i ett test för skolår 7 och 9: Beräkna $8 \cdot 1/2$. Rätt svar får 45 % i år 7 och 72 % i år 9. Hon frågar sig hur det kommer sig att över 50 % av eleverna i skolår 7, och nästan 30 % av eleverna i skolår 9, inte vet att $8 \cdot 1/2 = 4$? Vid intervjuer visade det sig att nästan alla elever i skolår 7 visste att 8 halva äpplen är lika mycket som 4 äpplen. Problemet är bara att ingen lärare har lyft fram vilken matematik man tränar i en sådan uppgift: ”När du säger att 8 halva äpplen är lika mycket som 4 äpplen är det ett exempel på den här uträkningen: $8 \cdot 1/2 = 4$”. De åtta äpplehalvorna är på ”exempelnivån” medan uträkningen visar den generella (abstrakta) matematik som används i det här exemplet. Vi vill alltså i första hand uppnå att kunna konkretisera den generella matematiken med ett bra exempel ur vardagen. Då är det nödvändigt att vi verkligen lyfter fram vilken generell matematik vi tränar i exemplet för att det ska ge ett bestående värde; det här är inget som ”framgår av sig själv”. Viktigt är att efter det se på fler exempel som använder samma abstrakta matematik för att kunna lösas. Löwing pekar också på att det sedan är nödvändigt att helt släppa exempelnivån och enbart göra abstrakta uppgifter för att fullt ut kunna ta till sig det generella.

När det gäller växlingen mellan exempel och det generella kan vi se på linjära funktioner. Vanligt är att man i gymnasieskolan introducerar området med några konkreta situationer där man t ex har en fast kostnad och en rörlig kostnad och att man ska bilda ett uttryck för den totala kostnaden. Man jämför sedan med det generella uttrycket för en linjär funktion och identifierar vad som motsvaras av riktningskoefficienten och av skärningen med y-axeln. Sedan följer ofta ett stort antal tillämpade exempel, där man förväntas förstå hur det generella uttrycket ska tillämpas. Viktigt här är då att man också har ett antal uppgifter på linjära funktioner där man inte har någon konkret anknytning och där man vänder och vrider på förutsättningarna i uppgifterna. Det är nödvändigt för att man ska förstå det generella till fullo.

**Att använda variation och variationsteori**
Vad man också vill är att eleverna ska förstå vad som är karakteristiskt för en linjär förändring och kunna känna igen den i jämförelse med någon annan typ av förändring. För att få en bra känsla för vad en linjär förändring är hjälper det kanske inte hur bra man förklarar och hur många exempel man ger, man behöver också kontrastera den mot några förändringar *som inte är linjära*. Först då framträder tydligt vad en *linjär* förändring innebär. Ett bra exempel är att jämföra med något som t ex ökar med lika många procent varje tidsenhet (exponentiell förändring).

Det här att göra en variation av situationen, t ex en tillväxtsituation, för att se en annan typ av tillväxt som en kontrastering, ingår som en viktig del i det som kallas variationsteori. Den är tillämpbar på många områden. En insändare hade rubriken ”Misslyckad resa till Polen – mycket lyckad” där personen förstod vad som var bra hemma och kunde uppskatta det efter resan. Folk som levt i ett förhållande en längre tid och byter partner får en annan syn på den förre partnern. Tydliga drag och egenskaper hos den förre framträder nu.

En bra övning (Heikne & Larsson, LabMa 505) handlar om att man har en boll som släpps från olika höjd. Man mäter hur högt den studsar upp för olika släpphöjd och gör värdetabell och diagram. Man får en linje genom origo och uppmanas att identifiera k i $y = kx$ . Vad bör man göra utöver detta? Det här är ett ju ett typiskt exempel på en linjär funktion. Vad kallar man exempel av den här typen av linjär funktion? En proportionalitet! Hur formulerar vi den här proportionaliteten i ord? Studshöjden är proportionell mot släpphöjden! Vad menar man med det? Här räcker det inte att säga att vi får ett uttryck av typen $y = kx$ och att det blir en linje genom origo. För att visa att man har tagit till sig det karakteristiska i hur en sådan förändring (be)ter sig är det också bra om man kan säga att det innebär att om jag t ex dubblar släpphöjden kommer också studshöjden att dubblas. Tar jag en tre gånger så stor släpphöjd så kommer också studshöjden att bli tre gånger så stor, osv. Det här är det typiska när *studshöjden är proportionell mot släpphöjden*. Kan du ge något annat exempel på en proportionalitet av det här slaget? (pris proportionellt mot varans vikt, vikten av en stav proportionell mot stavens längd, om man färdas med konstant hastighet är förflyttningen proportionell mot tiden osv). Hur skiljer sig sådana här linjära förändringar från linjära förändringar som inte är proportionaliteter? Återigen: Det är viktigt att kontrastera mot något som inte är som det vi just nu håller på att ta in!

Vi ska se på ett annat intressant och lurigt exempel (Wistedt , i NämnarenTEMA, Matematik ett kommunikationsämne, 1996): En bil har en bensintank som rymmer 48 liter. Hur långt kan man köra som längst om bilen drar
a) 1 liter bensin per mil? b) 2 liter bensin per mil? c) 1,5 liter bensin per mil?

En elev (Markus) resonerar så här: En bil som drar 1 liter bensin per mil kommer 48 mil. En som drar 2 liter per mil bör då komma hälften så långt, dvs 24 mil. 1,5 ligger mitt emellan 1 och 2 och en bil som drar ”mitt emellan” mycket bensin borde då komma ”mitt emellan” långt. Han får svaret till 36 mil.

För det första: Markus resonerar som om det här är en linjär förändring: Körsträckan minskar med lika många mil för varje liter som bensinförbrukningen ökar, enligt honom. Han kommer fram till att körsträckan minskar med 24 mil per liter som bensinförbrukningen ökar. Han utgår från ett startvärde med en bensinförbrukning på 1 l/mil som ger en körsträcka på 48 mil. Ökar bensinförbrukningen med 1 l/mil minskar sträckan med 24 mil, ökar den med en halv l/mil minskar den med 12 mil, t ex. Med Markus resonemang skulle det bli så att om bensinförbrukningen ökade med 2 l/mil (så att bilen drog 3 l/mil) skulle körsträckan minska med $2 \cdot 24$ mil, dvs 48 mil och man skulle alltså inte komma någonstans! Då skulle körsträckan bli noll! Ritar man upp detta i ett diagram får man en linje som skär den vågräta axeln vid 3 (l/mil).

Vad är det här för slags förändring då? Jo, körsträckan är omvänt proportionell mot bensinförbrukningen. Här måste man ha erfarenhet av vad omvänd proportionalitet innebär för att ha någon chans. Det räcker inte att veta att om y är omvänt proportionell mot x så kan sambandet skrivas på formen $y = k / x$. Har man ingen känsla för hur en sådan funktion beter sig kopplar man den inte till den här situationen. Här gäller ju att om bensinförbrukningen fördubblas blir körsträckan hälften så stor, blir bensinförbrukningen tre gånger så stor blir körsträckan en tredjedel osv. Man skulle kunna ta reda på konstanten genom att sätta in 48 mil på förbrukningen 1 l/mil och få k till 48 (l). Grafen blir inte en linje. Har man inte kommit så långt i matematiken får man försöka komma fram till att körsträckan blir 48/förbrukningen på annat sätt.

Hur kan man få erfarenhet av situationer som leder till omvänd proportionalitet? Ett exempel är om man håller konstant hastighet, hur lång tid tar det att komma fram? Utgår man från ett visst startvärde och jämför med om man skulle hålla dubbla hastigheten skulle det ta halva tiden, höll man tre gånger så hög hastighet skulle det ta en tredjedel av den ursprungliga tiden, osv. Tiden är omvänt proportionell mot hastigheten. En annan intressant uppgift (Shell Centre, 1985) kring detta tema handlar om jordgubbsplockning på en odling och ser ut så här:

Vi har ett diagram med en lodrät axel för total plocktid och en vågrät för antalet plockare. Använd axlarna, skissa en graf för att illustrera den här situationen!

- Jämför din graf med dem som dina kamrater gjort. Försök att bli överens om hur en korrekt graf ska se ut.
- Skriv en förklaring till hur du kom fram till svaret.. Speciellt, svara på följande frågor:
    - bör grafen ”luta uppåt” eller ”luta nedåt”? Varför?
    - Bör grafen bli en linje? Varför?
    - Kommer grafen att skära axlarna? Om, varför. Om inte, varför inte?

Vad är det för matematik vi tränar i den här uppgiften? Vad skulle man kunna kontrastera Markus bensinuppgift med för att bättre förstå situationen med omvänd proportionalitet?

**Mer om att koppla de konkreta upptäckterna till den generella matematiken**
En annan omtyckt laborativ uppgift (Heikne & Larsson, LabMa 417) ser ut så här:
Du har tre genomskinliga plastlådor: I den första ligger det 3 bultar och 2 muttrar, i den andra 2 bultar och 4 muttrar och den tredje är tom. Vad väger en bult och vad väger en mutter? Du får inte plocka ur några saker men använda våg.
Läraren har kanske tänkt sig att eleverna ska ställa upp ett ekvationssystem och lösa det. Rätt vanligt är att någon eller några löser uppgiften utan att använda ekvationssystem. Det intressanta är nu att stegen som utförs vid beräkningen utan ekvationssystem egentligen helt motsvarar dem som görs om man löser ekvationssystemet med additionsmetoden. Additionsmetoden är en generalisering av detta tänkande, som de använder naturligt. Här kan man jämföra med äpplehalvorna tidigare och generaliseringen i bråkräkningen.

En elev gjorde i tidiga skolår en upptäckt: Utför man multiplikationen $10 \cdot 10$ får man 100. Vad händer om man ”karvar av” lite på den ena 10:an och lägger på den andra? $11 \cdot 9 = 99$; det blev 1 mindre när jag karvade av 1. $12 \cdot 8 = 96$; det blev 4 mindre när jag karvade av 2. $13 \cdot 7 = 91$; det blev 9 mindre när jag karvade av 3, osv. Varför blir det så här, undrade eleven, men läraren kunde inte reda ut detta. Den generella matematik som ligger bakom det här stöter man väl inte på förrän i grundskolans senaste del och på gymnasiet. Kan du reda ut det hela?

För att se om eleverna förstått det generella i uppgiften ovan kan man testa följande uppgift (Emanuelsson, mfl, red, 1996):

1. Du väljer tre positiva heltal i följd. Vilken produkt blir störst? Om du multiplicerar det mellersta talet med sig själv eller om du multiplicerar ihop de andra två talen med varandra? Prova med ett exempel! Skiljde det något mellan produkternas storlek? Hur mycket i så fall?
2. Gör två nya försök. Hur mycket skiljde det mellan produkternas storlek?
3. Ser du något mönster? Om inte, gör ytterligare något eller några försök. Försök att visa att det du kom fram till i dessa exempel stämmer för vilka tal du än väljer!

Vi lyfter fram att den matematik man tränar i de här uppgifterna är konjugatregeln. Hur skulle man allmänt kunna uttrycka hur konjugatregeln fungerar? Det är det här som är huvudsyftet med att göra de här uppgifterna. Nu berör vi en annan viktig sak: Eleverna ska kunna uttrycka vad uppgifter och övningar går ut på. Vilken matematik tränas i exemplen? Det här är mycket försummat i skolan. Man pratar ofta om att eleverna ska ta ett större eget ansvar för sitt lärande. För att kunna göra detta måste eleverna tränas i att få ett bättre metaperspektiv. De måste lära sig mer om sitt eget lärande. Går vi tillbaka till vårt exempel om de åtta äpplehalvorna måste läraren lyfta fram och ta en diskussion om vilken matematik som ligger bakom. När det gäller bråkräkning över huvud taget finns det ett fåtal kritiska steg. Även dessa ska man diskutera med eleverna så att de har dem klart för sig, inte bara löser en massa exempel. För att klara att säga att t ex $3 \cdot 2/7 = 6/7$ måste man ha förstått ett av de viktigaste kritiska stegen. Diskutera det! När vi tog upp vad en linjär förändring innebär fann vi det viktigt att kontrastera mot något som inte är en linjär förändring. Ta upp till diskussion att det är ett användbart sätt att kontrastera för att förstå vad som menas med ett begrepp och att vi försöker göra så då och då. Så gjorde vi också när vi skulle förstå proportionalitet. Över huvud taget är det bra att diskutera syftet med olika inslag man har i sin undervisning. Det blir lättare att lära sig och komma ihåg då.

Ett avslutande exempel är en klassisk uppgift:
Du har ett glas rött och ett glas vitt vin:

1) Du tar en sked full med vitt vin från det vita glaset och häller i det röda glaset och rör noga om.
2) Därefter tar du en sked full från det röda glaset och häller i det vita och rör noga om. Jämför mängden rött vin i det vita glaset med mängden vitt vin i det röda glaset. Vilken mängd är störst?

Vad övar man i denna uppgift? Ganska mycket: …problemlösning …hypotes… bevis… bråkräkning… exempel → generell…

**Litteratur**

Heikne, H. & Larsson, K. *111 laborativa matematikuppgifter*. Egen produktion.
Löwing, M. (2006): *Matematikundervisningens dilemman*. Lund. Studentlitteratur.
Emanuelsson, G., mfl, red, (1996)*:* Matematiska samtal i *NämnarenTEMA Matematik ett kommunikationsämne*. Göteborg. Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
Shell Centre for Mathematical Education (1985): Sketching Graphs from Words. Uppgift ur problemsamling, titel okänd. University of Nottingham.