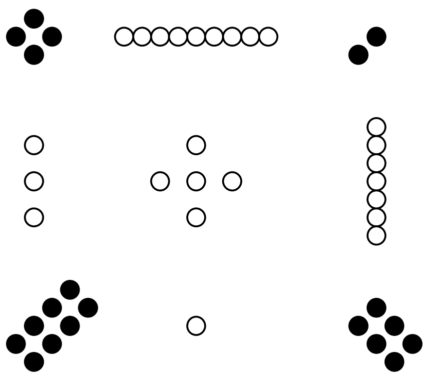
201a
Fascineras av magiska kvadrater!

Karl-Bertil Hake, arbetar vid Lärarutbildningen Malmö Högskola

Den magiska kvadratens historia sträcker sig mer än 4 000 år tillbaka i tiden. Enligt en legend fick den mäktige kejsare Yu syn på en gudomlig sköldpadda vid floden Huang Ho:s strand (nuvarande Gula floden). På sköldpaddans rygg fanns ett kvadratiskt mönster av prickar som symboliserade talen 1 - 9. Talen var så placerade att de utgjorde en magisk kvadrat, dvs. summan, den s.k. magiska summan, av talen var densamma i de tre raderna och kolumnerna samt i de två diagonalerna.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

I den kinesiska synen på världen förekommer två urkrafter eller grundprinciper som kallas *yin* ("det kvinnliga") och *yang* ("det manliga"). Dessa måste harmoniera med varandra för att en ordning ska bestå. Under *yin* och *yang* grupperar sig motsatta företeelser; till *yin* hör mörker, regn, natt, passivitet samt jord; till *yang* hör ljus, värme, sol, dag, aktivitet samt himmel. I boken *I Ching*, ("Växlingarnas bok") från 700-talet före Kristus, som är en av de kanoniska konfucianska skrifterna, betecknas de udda talen som himmelska (yang-tal), medan de jämna är jordiska (yin-tal). I den magiska kvadraten är de udda talen placerade i fyra väderstreck i förhållande till 5, medan de jämna är placerade i hörnen. Förutom de fem väderstrecken ("mitten" räknas som ett väderstreck; Kina är "Mittens rike"!) kan de fem elementen eller kanske bättre, faserna (vatten, eld, trä, metall och jord), tolkas in i kvadraten.

En magisk kvadrat av ordningen *n* är ett kvadratiskt rutsystem med n rader och n kolumner, där varje ruta innehåller precis ett av talen 1, 2, 3, …, n^2, och sådan att summan av varje rad, summan av varje kolumn och summan av de båda diagonalerna är en och densamma.
Eftersom $1+2+...+n^2 = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$, får man den magiska summan $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.
Mönstret på sköldpaddans rygg utgjorde alltså en magisk kvadrat av 3:e ordningen. Endast en lösning till en sådan existerar - om man bortser från speglingar och rotationer.

Den minsta magiska kvadraten är av 1:a ordningen och kan betraktas som ganska ointressant - den består ju bara av en enda ruta med talet 1. Av 2:a ordningen, dvs. en 2x2-kvadrat existerar ingen magisk variant medan det, som ovan nämndes, finns en enda av 3:e ordningen. Redan på 1700-talet hade man hittat alla 880 olika magiska kvadrater av 4:e ordningen. Nyligen har man lyckats bestämma antalet kvadrater av ordning 5 till 275 305 224. Antal kvadrater av ordning 6 och högre finns det ingen uppfattning om. Trots en myckenhet av forskning har man ännu inte funnit några allmänna metoder att konstruera alla magiska kvadrater av en given ordning.

En kvadrat av fjärde ordningen finns första gången dokumenterad i indiska källor från första århundradet efter Kristus. Exempel på magiska kvadrater av 5:e och 6:e ordningen finns från år 983 i en arabisk urkund och Moschopulos från Konstantinopel är veterligen den förste som har författat en europeisk text om de magiska kvadraternas egenskaper. Hans skrift är från 1315.
Den förmodligen mest berömda av alla magiska kvadrater av 4:e ordningen är den som syns på etsningen Melancholia 1 av Albrecht Dürer från 1514. Lägg märke till hur talen 15 och 14 i kvadraten bildar årtalet 1514. Vissa påstår att talen ovanför, 6 och 7, även anger datum för gravyrens färdigställande.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Den bevingade personifikationen av Melankolin sitter modstulet och vilar ansiktet mot sin hand. Hon håller en passare i den andra handen och är omgiven av andra verktyg förknippade med geometri - den av de sju fria konstarterna som är underlag för artistisk kreativitet och den genom vilken Dürer hoppades kunna nå perfektion i sitt eget arbete.

Denna kvadrat har många symmetriska egenskaper utöver de som gör den "magisk". Den magiska summan, 34, fås genom att t.ex. summera de fyra hörnrutorna eller de fyra mittrutorna. Om kvadraten delas i fyra 2x2-delkvadrater är summan i varje sådan kvadrat 34. Det finns åtskilliga fler 34-summor att hitta i Dürers kvadrat. Försök gärna finna dem alla!

Än mer magiska är de s.k. diaboliska kvadraterna. Dessa beskrevs bl.a. av den schweiziske matematikern Leonard Euler år 1782. En kvadrat är diabolisk om även summan av de brutna diagonalerna är lika med den magiska summan. På ett tempel i Khajuraho i Indien har man sedan 1200-talet kunna finna nedanstående exempel på en diabolisk kvadrat. De tonade rutorna ger ett exempel på en bruten diagonal

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Även USA: store statsman Benjamin Franklin intresserade sig för magiska kvadrater. I slutet av 1770-talet publicerade han en kvadrat av 8:e ordningen som han kallade "den mest magiska av alla magiska kvadrater som någonsin skapats av en magiker". Den magiska summan, 260, bildas här, som brukligt är, i alla rader respektive kolumner. Dock är kvadraten inte strängt magisk eftersom summan av diagonalerna inte blir 260. Summan återfinns istället i en annan variant av en bruten diagonal - se de grå rutorna. Pröva gärna fler sådana varianter! Halva den magiska summan, 130, återfinns i alla kvadrater, bestående av fyra tal - var de än ligger. Detsamma gäller summan av fyra tal som alla har samma avstånd till kvadratens centrum. Och fler mönster står att finna för den nyfikne…

52	**61**	**4**	**13**	**20**	**29**	**36**	**45**
14	**3**	**62**	**51**	**46**	**35**	**30**	**19**
53	**60**	**5**	**12**	**21**	**28**	**37**	**44**
11	**6**	**59**	**54**	**43**	**38**	**27**	**22**
55	**58**	**7**	**10**	**23**	**26**	**39**	**42**
9	**8**	**57**	**56**	**41**	**40**	**25**	**24**
50	**63**	**2**	**15**	**18**	**31**	**34**	**47**
16	**1**	**64**	**49**	**48**	**33**	**32**	**17**

En annan konstruktion, värd att nämna, är de s.k. magiska linjerna. Mittpunkten för rutan med talet 1 förbinds med mittpunkten för rutan med talet 2 som i sin tur förbinds med mittpunkten för rutan med talet 3 osv. Det så erhållna mönstret uppvisar i de flesta fall överraskande symmetrier.

Lästips

Pickover Clifford, The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars, Princeton, 0-691-07041-5
Johansen Carl Otto: Magiska tal. Forum 91-37-08594-8 (antikvariskt)
Tideman Anker: Talens magi. Berghs 91-502-1372-5 (antikvariskt)
Thompson Jan: Matematiken i historien. Studentlitteratur 91-446-0081-X

Användbara länkar (nov 09)

http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html
http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html