

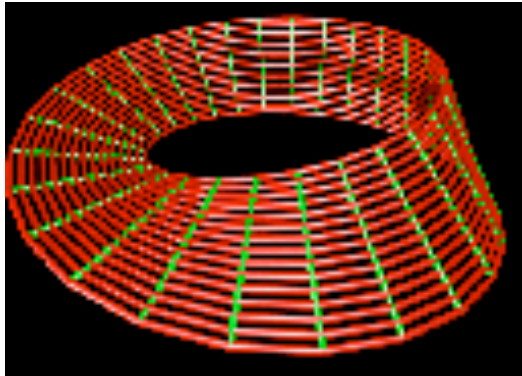
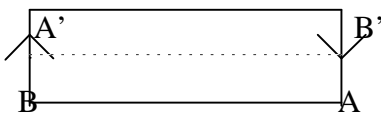
114a

## Konst och matematik: Möbiusbandet

*Milagros Izquierdo* är professor vid Matematiska institutionen, Linköpings universitet och ledamot av nationalkommitté för matematik och svenska kommitté för matematikutbildning. Hon forskar inom geometri och topologi. Hon har medverkat flera gånger som föreläsare i kurser om konst och matematik.

### Möbiusband

Möbiusbandet är, topologiskt, en icke-orienterbar yta med **en** randkomponent. Man bygger ett Möbiusband på följande sätt (konstruktionen beskrevs av A. F. Möbius i "*Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders*", 1865 ): Tag en pappersrektangel med hörn A, B, A' och B'. Limma ihop kortsidan AB' med kortsidan BA' så att A klistras ihop med A' och B med B'.



I differentialgeometri ser vi följande definition: "Ett Möbiusband är ytan som genereras av en regel som glider längs en cirkel (centrala cirkeln) och samtidigt roterar kring dess mittpunkt  $\pi$  radianer". Observera att vinkelhastigheten är halva glidhastigheten.

En egenskap hos Möbiusbandet är att det har **en enda randkomponent** som vrider sig två varv kring centrala cirkeln. Ordet topologi förekom först 1847 i Listings studie av matematiska objekt som uppkommer som en följd av fenomenet ovan: de så kallade palodroma ringarna. Det var Listing som först publicerade om Möbiusbandet i "*Der Census räumlicher Complexe*", 1861. Listing, liksom Möbius, var Gauss' student. Topologins födelse skedde inom de matematiska kraftansträngningarna att beskriva rummen som modellerar den fysiska världen. Studien av "rumsliga komplex" (ännu ej topologiska rum) är relaterad till framsteg inom elektromagnetism.

Intressantaste egenskapen hos Möbiusbandet i förhållandet till konst är att det är **icke orienterbart**, dvs det har **en enda sida**. Denna egenskap har gjort av Möbiusbandet det matematiska föremålet som används mest utanför matematikvärlden: Möbiusbandet har inspirerat konstnärer, och används i industrin för att förlänga spelningstid i videoband och för att minska slitaget av transportband och inspelningsbara band. Första Möbius-molekulan syntetiserades 1982. År 2000 publicerade japanska forskare i Nature syntet-iseringen av första kristallen med Möbiusbandets struktur.

Bästa sättet att uppfatta Möbiusbandet är att bygga det, kanske p.g.a detta har Möbiusbandet lockat **skulptörer**: man uttrycker dynamiken, evigheten och växelverkan mellan det som ser ut att vara olika världar (2 sidor) men som i verkligheten är en enighet (1 sida).

Dessa foton visar olika företällningar av Möbiusbandet:



J. Robinson "Inmortality".



R. Wilson "Möbius Strip".



J. de Rivera "Infinity"

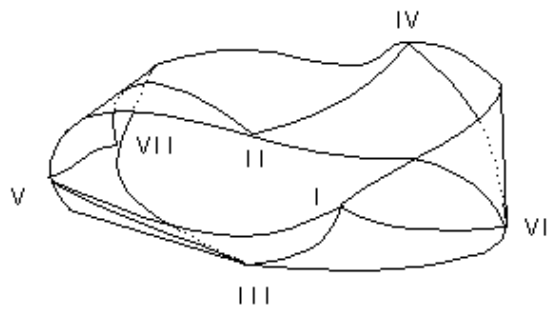
I **litteraturen** inspirerar icke-orienterbarheten hos Möbiusbandet till ambivalens och brist på kommunikation.

Lewis Carroll var den förste att beskriva Möbiusbandet inom konst: i "*Sylvie and Bruno concluded*", 1868. I boken förklarar Carroll hur Herr Professor lär Sylvie att med två näsdukar konstruera ett klot som innehåller universum. I själva verket är klotet ett **projektivt plan**. Projektiva planet är en annan icke orienterbar yta, Att projektiva planet innehåller världen ser man tydligt i renässansens och Dalis måleri med användningen av perspektivitet. Idag används projektiva planet till CAD. Herr Professorns två näsdukar är en skiva och ett Möbiusbandet ihopklistrade längs gemensamma randen. Det finns få exempel på Möbiusbandet inom **måleri**. Den målare som antagligen mest har använt Möbiusbandet är Oscar Reutersvärd (1915-2002). Med Möbiusbandet ville han uttrycka de två ihopflätade sidorna som bygger en unik helhet i naturen och framförallt i människan. Här en målning av Escher.

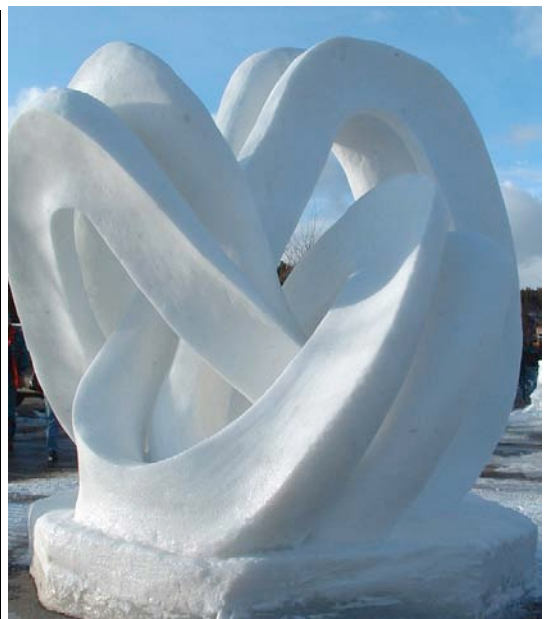
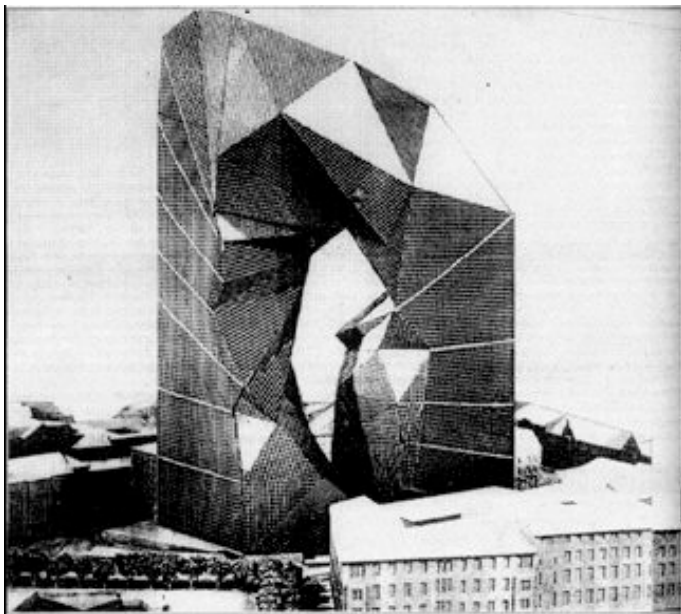


Möbiusbandet är vitt använt inom grafisk design p.g.a. att det, till skillnad från en cylinder, framkallar en **dynamisk** och obegränsad bild. Första logotypen med Möbius-bandet var den för “ren ull” från 1920. Logotypen för återvinning och kretslopp är ett Möbiusband (sedan 1970), liksom Lärarförbundets.

Exempel på Möbiusbandet inom musik är: “*Möbius Strip Tease*” av N. Slonimsky, och stycken i Schönbergs “*Style and Idea*”. “*Crab Canon*” i “*Musical Offering*” av J. S. Bach är ett annat exempel. Schönberg gjorde teoretiska studier av musik, bl.a. rummet av trikkord, som råkar vara ett Möbiusband:



Nyligen har teoretiska studier av möjliga användningar av Möbiusbandet inom **arkitektur** presenterats: man tolkar att Möbiusbandet har en enda sida genom relationen mellan **inre och yttre** och mellan intimitet och omgivning. Den förste arkitekt som ritade ett Möbiusband var Eiserman (dekonstruktivismens grundare), det så kallade Max Reinhardt Haus (1993, ej byggt) i bilden nedan.



De sista två skulpturerna (ovan och nedan till höger) illustrerar en annan matematisk egenskap hos Möbiusbandet: det är en **minimalyta**, den yta med given rand som har minsta arean, exempel på sådana ytor är såpbubblor. Minimal area innebär att skillnaden mellan ytspänningarna på de båda sidorna är minimal. Nedan till vänster visar vi datorgrafik som använts för att tillverka skulpturen.



## Referenser

- C. P. Bruter (ed.) *Mathematics and Art*, Springer-Verlag, 2002
- L. Carrol, *Sylvie and Bruno Concluded*, Dover 1988,
- C. Fadiman, *Fantasia Mathematica*, Springer-Verlag, 1997.
- J. Fauvel, R. Flood, R. Wilson, *Möbius and his Band*, Oxford Univ. Press, 1993.
- D. Hofstadter, *Gödel Escher and Bach*, Basic Books, 1999..
- V. Petresin, L-P. Robert, *The double Möbius Strip Studies*, Nexus Network Journal, 2002
- Pressley, *Differential Geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- Schoenberg, *Style and Idea*, U.C. Press, 1989.
- J. Thulaseedas, R. Krawczyk, *Möbius Concepts in architecture*, Proc. ISAMA 2003
- <http://www.cpm.informatics.bangor.ac.uk/>
- <http://pantheon.yale.edu/~jar55/math/project/>
- <http://www.sckans.edu/~bridges/> (International Conference on Maths and Arts)
- <http://mathworld.wolfram.com/MoebiusStrip.html>
- <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/moebius.html>
- <http://www.enc.org/thisweek/calendar/unit/0.1819.136.00.shtm>. (Bra skolmatematik)
- <http://www.uib.no/People/nfytn/mathgal.htm>
- <http://web.meson.org/topology/mobius.html>
- <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/7773/mobius.html>
- [http://www.maa.org/mathland/mathtrek\\_05\\_27\\_02.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_05_27_02.html)
- [http://www.maa.org/mathland/mathtrek\\_6\\_11\\_01.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_6_11_01.html)
- [http://www.maa.org/mathland/mathtrek\\_11\\_4\\_00.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_11_4_00.html)
- <http://www.sciencenews.org/articles/20031101/mathtrek.asp>
- [http://www.maa.org/mathland/mathtrek\\_9\\_4\\_00.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_9_4_00.html)
- <http://home.att.net/~mathtrek/muse0199.htm>
- [http://www.maa.org/mathland/mathtrek\\_7\\_10\\_00.html](http://www.maa.org/mathland/mathtrek_7_10_00.html)