111a
Geometri med snöre

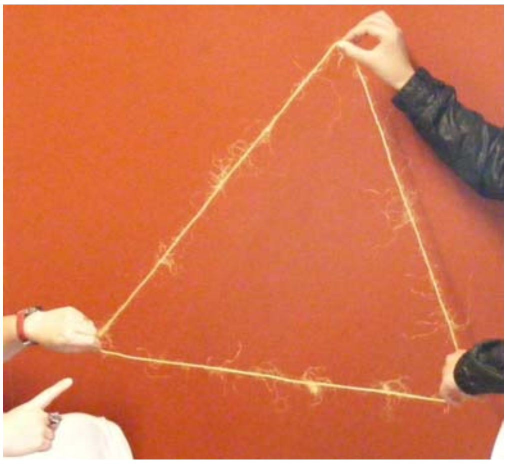
Pesach Laksman är lärarutbildare i matematik och matematikdidaktik vid Malmö högskola.

Areabegreppet

När elever får frågan vad *area* betyder ges mestadels svar som antyder hur man tar reda på area av vissa geometriska figurer. Istället för att förklara begreppets innebörd beskriver dessa elever en procedur. Det mest vanliga svaret lyder: ”Längden gånger bredden.”, en tydlig koppling av areabegreppet till rektanglar. Att så är fallet är kanske inte så förvånansvärt med tanke på att rektangeln är den grundfigur som man försöker omforma andra figurer till när man beräknar dessas areor. Detta är även vanligt i läroböcker. Ändå kan det inte vara ändamålsenligt att bygga ett begrepp genom att mäta eller räkna. Kan man däremot få eleverna att uppleva begreppet och utveckla intuitivt förståelse blir de mer förtrogna med det som man försöker lära dem.

Lek med en triangel

Låt dina elever tänka sig var sin triangel, vilken som helst. Be någon elev avslöja sidornas längder i sin triangel. Be eleverna att ändra sidorna i sina trianglar men behålla omkretsen så att varje triangel får maximalt stor yta. Den övningen upplevs som svår. Du får antagligen olika svar, med låg grad av övertygelse – om det överhuvudtaget kommer några. Då är det dags att tillgripa ett hjälpmedel i form av ett snöre vars ändar är sammanknutna. Låt dina elever arbeta i grupper om två eller tre och be dem forma en triangel av snöret.

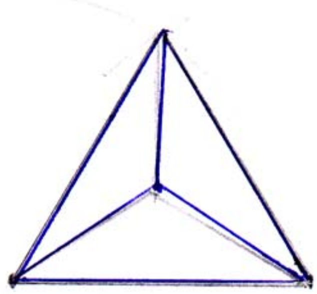


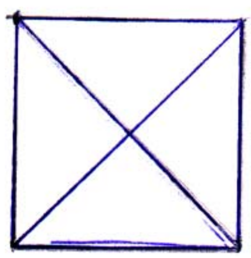
Genom att flytta de tre punkterna får de en dynamisk triangel vars area ändrar sig medan omkretsen förblir konstant. Nu kan du vänta dig svar från samtliga grupper med hög grad av övertygelse. Mest sannolikt är att samtliga kommer att svara att sidorna i den största triangeln måste vara lika långa. Ibland kan det hända att någon grupp vill ha en likbent, rätvinklig triangel som den största. Sådant läge är guld värt. Här finns tillfälle till argumentation baserad på intuition. Vi startar med den rätvinkliga, likbenta triangeln och håller i två hörn av vilka det ena ligger vid den räta vinkeln medan det tredje hörnet får ändra sitt läge. Hörnet följer en elliptisk bana och när det närmar sig linjen på vilken den motstående sidan ligger blir arean ganska liten. Arean blir större ju längre hörnet avlägsnar sig från den nämnda linjen. Då brukar eleverna känna på sig att maximum inträffar när den rörliga punkten befinner sig lika långt från de båda fixerade hörnen. Störst area får alltså en triangel med en fixerad sida när de två andra sidorna är lika långa; en likbent triangel. Och störst area blir det om ingen sida är fixerad när en triangel kan betraktas som likbent i förhållande till samtliga sina sidor; triangeln är liksidig.

Regelbundna polygoner
Triangelövningen kan användas till andra polygoner. Låt eleverna med hjälp av samma snöre försöka skapa figurer som är större än den liksidiga triangeln. Här kommer du antagligen att

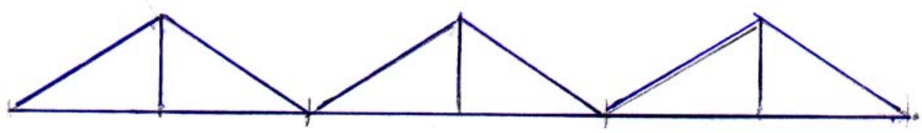
se en variation av figurer från kvadrat till cirkel. Att kvadraten har den största arean av samtliga fyrhörningar med samma omkrets ser man på samma sätt som när det gällde trianglar. I en fyrhörning med tre hörn fixerade får man störst area när det fjärde hörnet befinner sig lika långt från sina grannhörn. Detta innebär att en liksidig fyrhörning bör ha den största arean. Betraktar man romber ser man lätt att kvadraten blir den största av dem. Nu finns det vissa likheter mellan liksidig triangel och kvadrat. Båda tillhör kategorin *regelbundna figurer*. Och om kvadraten har större area än den liksidiga triangeln med samma omkrets bör arean öka med tilltagande antal hörn. Ökar vi antal hörn i serien av regelbundna figurer närmar vi oss alltmer en cirkel.

För äldre elever finns det tillfälle till djupare resonemang kring varför ett ökande antal hörn ger större area. Låt oss betrakta en liksidig triangel och en kvadrat med samma omkrets. I båda figurerna markeras tyngdpunkten som förbinds med figurens hörn.

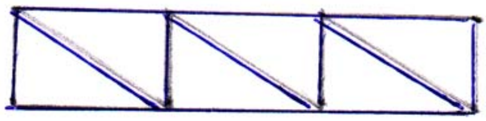


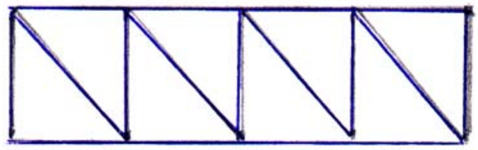


Sedan klipps båda figurerna från sina hörn mot tyngdpunkterna och vecklas ut så att vi får tre respektive fyra kongruenta trianglar liggande på en linje. Båda triangelkomplexen har samma bas men olika höjder.



Om man klipper de enskilda trianglarna längst deras höjder går det att transformera båda komplexen till rektanglar med samma bas men olika höjder. Då ser man på analogt sätt att ju längre avstånd mellan tyngdpunkten och en sidas mittpunkt desto större area.

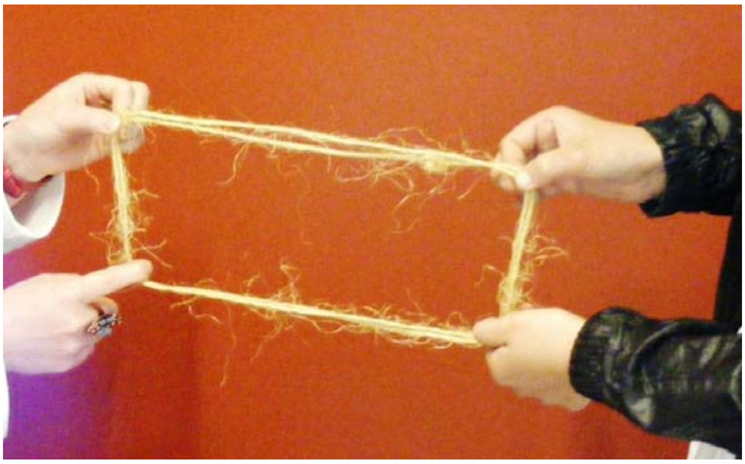




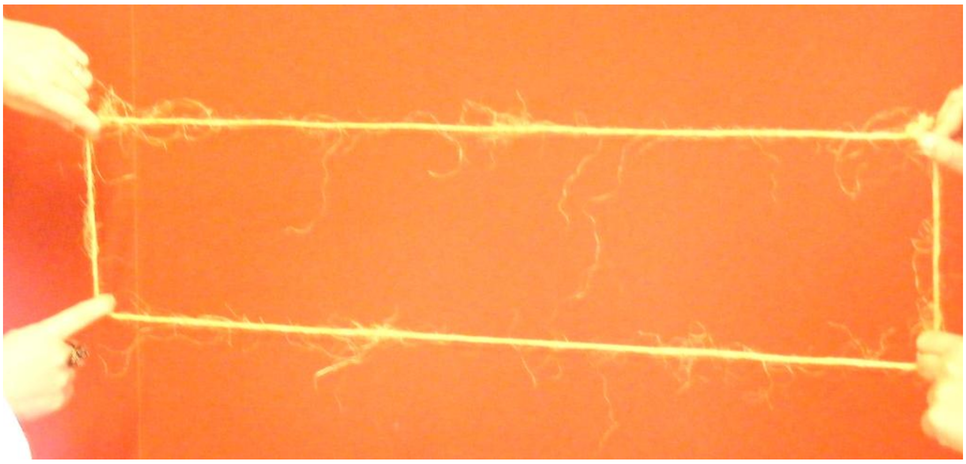
Fantasieggande rektanglar
Skolböcker är överfulla av uppgifter där man ska beräkna area. Ändå visar sig förståelsen av areabegreppet vara svag. Böckernas exempel kan med fördel bytas ut mot elevernas egna. Låt varje elev tänka på en rektangel. Be eleverna att med utgångspunkt i den ursprungliga rektangeln skapa en som har dubbelt så stor area. Låt dina elever avslöja vilka rektanglar de har resonerat kring. Här får du uppleva två olika taktiker att komma fram till de dubbla rektanglarna. En del elever kommer antagligen att fördubbla den beräknade arean av sin ursprungliga rektangel och därefter uppdela den i två faktorer. De som är ”latare” tänker istället två ursprungliga rektanglar ställda bredvid varandra antingen längs deras bredder eller längs deras längder. Sådana strategier är viktiga att uppmuntra och kan åskådliggöras med två A4-ark placerade på de båda sätten bredvid varandra. Utifrån det kan man fråga vad som händer med omkretsen när arean fördubblas. Här märker eleverna den ”svaga” korrelationen. När man utgår från de ”latas” lösningar kan man fråga vilken av dessa som har längre omkrets och ser att det går att avgöra utan att man behöver räkna.

Låt dina elever utgå från den första rektangeln de tog fram och försöka skapa en med dubbelt så stor omkrets. Återigen får du se strategier som bygger antingen på beräkning eller på fördubbling av sidorna. Vad händer med arean av en rektangel när sidorna är fördubblade? Hur skapar vi fler rektanglar med samma omkrets? Vad händer med deras areor?

Båda kraven samtidigt
Nu börjar det bli dags för en något större utmaning. Kan man till varje rektangel skapa en rektangel där både area och omkrets är dubbelt så stora som i den ursprungliga? Att avgöra den frågan visar sig vara ganska svårt. Oftast får man inget svar och om man frågar vad eleverna tror får man olika svar med övervikt mot det negativa. Det händer ibland att någon hittar något exempel då det går. Om så inte sker kan man föreslå att man startar med rektangeln 3×4. Här gäller det att hitta en rektangel med halva omkretsen på 14 *le* och arean på 24 *ae*, två tal vars summa är 14 och produkt är 24. Det är lätt att inse att 2×12 passar. Betyder det då att det alltid är möjligt om ett exempel har hittats? Knappast. Även om vi hade hittat många exempel ger inte detta någon säkerhet. Problemet måste angripas på ett annorlunda sätt om man vill ta reda på huruvida det alltid är möjligt att hitta den dubbelt så stora rektangel med avseende på både area och omkrets. Vi tar återigen hjälp av vårt snöre. Detta viks dubbelt och formas till en godtycklig rektangel.



När vi viker snöret får vi en figur med dubbelt så stor omkrets oberoende av figurens form. Vi formar en likformig rektangel med den som var tillverkad av det dubbelvikta snöret. Arean av den stora rektangeln är fyrdubbelt. Nu kommer hela finessen. Man ändrar rektangelns form till att bli mer avlång med bibehållandet av dess omkrets.



På det sättet kan vi få en rektangel med en area som ligger godtyckligt nära noll. Vi kan konstatera att den ovan beskrivna proceduren ger kontinuerliga värden och vi måste ha passerat samtliga värden mellan fyra och noll det vill säga att vi någon gång på vägen måste ha haft den dubbla arean.

Sidornas längder

Av exemplet ovan ser vi att reflexmässig beräkning många gånger gör oss blinda för enkla och på samma gång generella lösningar. Samtidigt kan man förvänta sig att intresset stiger för att kunna hitta speciella lösningar till varje fall. Vi vet ju att detta alltid är möjligt. Vi måste helt enkelt veta när det är dags att avbryta sammandragningen av snöret. Problemet kan med fördel lösas algebraiskt där den lilla rektangelns sidor kallas *a* och *b*. Till att börja med skissar vi en rektangel med dubbelt så stor omkrets där sidorna är 2*a* och 2*b*. Denna är ju fyra gånger så stor som den ursprungliga. Den rektangel bör avsmalnas till den dubbla arean dvs vi plockar bort lika mycket från bredden som vi lägger på längden. De nya sidorna blir $(2a+x)$ och $(2b-x)$. Nu är det lätt att få en ekvation $(2a+x)(2b-x)=2ab$. Denna är inte den allra trevligaste att lösa. Vill vi komma lindrigare undan kan vi istället för den likformiga rektangeln starta med den största rektangeln, nämligen kvadraten. Kvadratens sidor är då $(a+b)$ och ekvationen får formen $((a+b)+x)((a+b)-x)=2ab$. Denna kan enkelt lösas med hjälp av konjugatregeln: $(a+b)^2-x^2=2ab$ och får lösning $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$ som är diagonalen i den lilla rektangeln efter att vi har förkastat den negativa roten. Med andra ord får vi lägga ihop sidorna i den ursprungliga rektangeln när vi vill skapa den dubbla. Därefter får vi längden genom att lägga till diagonalen och bredden genom att plocka bort diagonalen.