

Upptäck, undersök och verifiera

Lars Jakobsson, Malmö högskola, lärarutbildningen

Det är trevligare att undervisa matematik om eleverna är motiverade och undersökningsbenägna. Påfallande ofta sätter bristfällande algebrakunskaper käppar i hjulet för eleverna och deras entusiasm falnar. Ska vi fortsätta att stänga pannorna blodiga eller ska vi kanske ge eleverna verktyg att komma vidare och uppleva att matematik är roligt. Med CAS, Computer Algebra System och TI-Nspires kraftfulla möjligheter kan vi ge våra elever helt andra möjligheter än vad vi själva hade.

Jag vill belysa arbetssättet ”upptäck, undersök och verifiera” med några exempel, varav två är dokumenterade nedan.

Arean av en speciell triangel

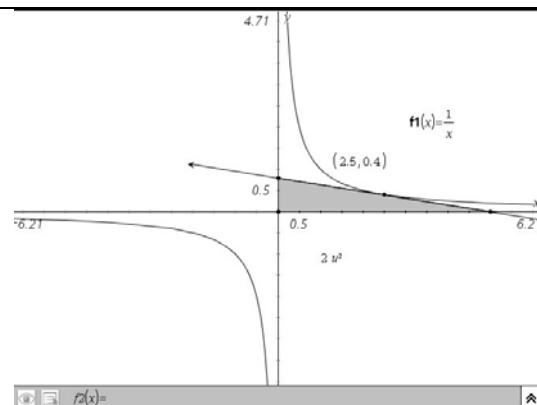
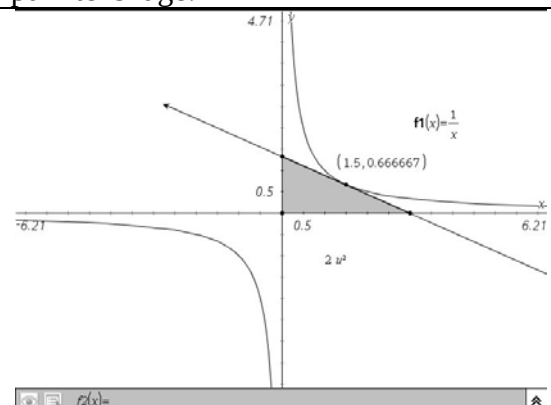
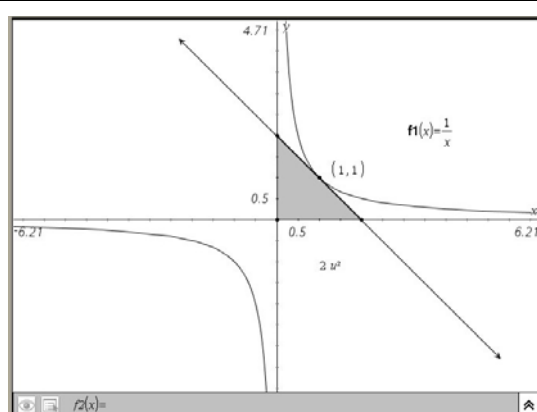
En tangent ritas till funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ i punkten (1 ; 1). Tangenten och

koordinataxlarna avgränsar en rätvinklig triangel.

- Bestäm arean av denna triangel.
- Undersök hur arean förändras då tangeringspunkten flyttas längs grafen.

Grafen konstrueras och tangenten ritas i punkten med $x=1$. Därefter definieras den triangel vars area ska studeras. Så bestäms slutligen triangelarean som blir 2 areaenheter. Se bilden intill.

Genom att ta tag i och flytta tangeringspunkten är det nu möjligt att studera hur arean förändras. Av de två bilderna nedan framgår att arean förblir 2 areaenheter. Det tycks med andra ord var så att arean är konstant, oberoende av tangeringspunktens läge.



Eleverna får nu bygga upp en strategi för hur detta ska kunna bevisas. Vi behöver koordinaterna för tangentens skärningar med koordinataxlarna för att kunna beräkna triangelarean. Därmed måste vi veta tangentens ekvation om tangenten ritas i en godtycklig punkt med $x=a$. Först definieras derivatan med funktionsnamnet $f1d(x)$ och därefter tangentens ekvation som $tangent(x)$. Bild till höger!

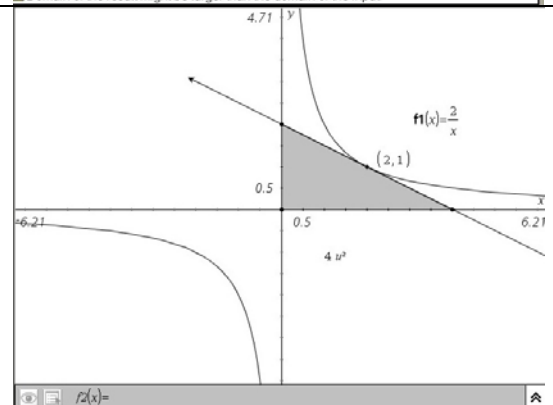
```
Define f1d(x)= $\frac{d}{dx}(f1(x))$  Done
Define tangent(x)=f1d(a)*(x-a)+f1(a) Done
```

Nu är det dags för koordinaterna. Först bestäms skärningspunkten med y-axeln som $tangent(0)$ och därefter med x-axeln genom att lösa ekvationen $tangent(x)=0$ med avseende på x . Därmed återstår det spännande steget att beräkna arean, som visar sig vara 2 area-enheter oberoende av tangeringspunkt. Se bilden till höger!

```
Define f1d(x)= $\frac{d}{dx}(f1(x))$  Done
Define tangent(x)=f1d(a)*(x-a)+f1(a) Done
tangent(0)  $\frac{2}{a}$ 
solve(tangent(x)=0,x)  $x=2*a$ 
 $\frac{2}{a} \cdot 2*a$  2
triangle_area:= $\frac{a}{2}$ 
```

Domain of the result might be larger than the domain of the input.

En intressant utvidgning av problemet är att studera funktionen $f(x) = \frac{k}{x}$. Lämpligen görs en grafisk studie först med funktionen $f(x) = \frac{2}{x}$, se bild. Sedan undersöks andra värden på k för att upptäcka ett mönster. När eleven har en hypotes är det dags för beviset. Se nedan!



```
Define f1d(x)= $\frac{d}{dx}(f1(x))$  Done
Define tangent(x)=f1d(a)*(x-a)+f1(a) Done
tangent(0)  $\frac{2}{a}$ 
solve(tangent(x)=0,x)  $x=2*a$ 
 $\frac{2}{a} \cdot 2*a$  2
triangle_area:= $\frac{a}{2}$ 
Define f(x)= $\frac{k}{x}$  Done
Define fd(x)= $\frac{d}{dx}(f(x))$  Done
Define tangent(x)=fd(a)*(x-a)+f(a) Done
tangent(0)  $\frac{2*k}{a}$ 
solve(tangent(x)=0,x)  $x=2*a$  or  $\frac{k}{a^2}=0$ 
 $\frac{2*k}{a} \cdot 2*a$   $2*k$ 
triangle_area:= $\frac{a}{2}$ 
```

Domain of the result might be larger than the domain of the input.

```
solve(tangent(x)=0,x)  $x=2*a$ 
 $\frac{2}{a} \cdot 2*a$  2
triangle_area:= $\frac{a}{2}$ 
Define f(x)= $\frac{k}{x}$  Done
Define fd(x)= $\frac{d}{dx}(f(x))$  Done
Define tangent(x)=fd(a)*(x-a)+f(a) Done
tangent(0)  $\frac{2*k}{a}$ 
solve(tangent(x)=0,x)  $x=2*a$  or  $\frac{k}{a^2}=0$ 
 $\frac{2*k}{a} \cdot 2*a$   $2*k$ 
triangle_area:= $\frac{a}{2}$ 
```

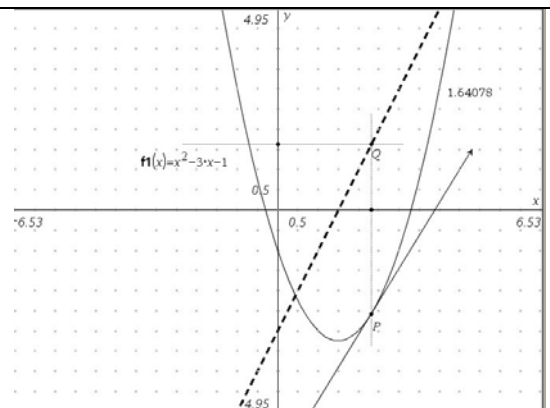
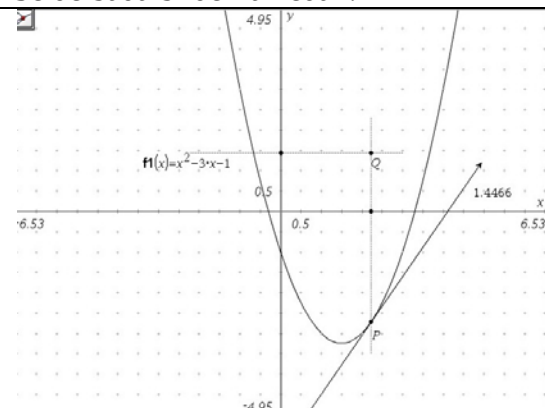
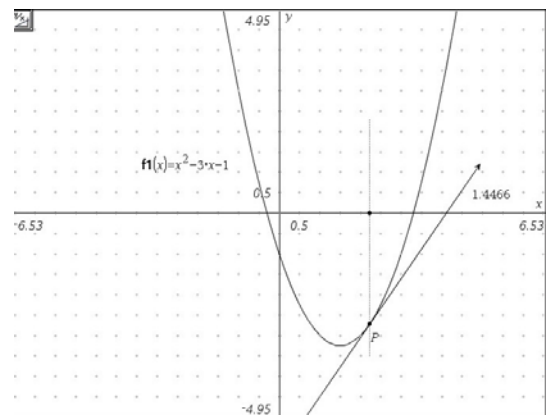
Domain of the result might be larger than the domain of the input.

Genom arbetssättet från graf till abstrakt bevis får eleverna en visuell upplevelse av vad som händer med triangeln och troliggör att värdet ska vara konstant. I det avslutande beviset kan eleverna fokusera mera på problemlösningen än på de algebraiska förenklingarna och ser därmed tydligare en helhetsbild.

Upptäck derivatan

Ett nytt sätt att introducera derivatan är att grafiskt studera lutningen hos en tangent och flytta tangeringspunkten och därmed lutningen hos tangenten. Mätvärdet för riktningskoefficienten kan överföras till y-axeln. På så sätt är det möjligt att följa hur den punkt förflyttas som har x-koordinaten lika med x-värdet för tangeringspunkten och y-koordinaten lika med tangentens riktningskoefficient. Med andra ord kan vi studera hur grafen av derivatan ser ut genom denna punkts rörelse. Som nästa steg kan nu den formella härledningen ske.

I bilden intill är grafen av $y = x^2 - 3x - 1$ ritad. En tangent till grafen är ritad i punkten P och riktningskoefficienten hos den aktuella tangenten är cirka 1,45. Detta mätvärde överföres till en punkt på y-axeln och en linje vinkelrät mot y-axeln ritas i denna punkt. Skärningspunkten mellan den vertikala linjen genom P och den horisontella genom punkten på y-axeln kallas Q. När x-värdet för P ändras kommer Q att följa den kurva som är derivatan av funktionen $y = x^2 - 3x - 1$. Se de båda bilderna nedan.



Det är möjligt för eleverna att bestämma den uppkomna linjens ekvation. Det är lätt att avläsa att den skär y-axeln i punkten $y=-3$ och har $k=2$. Så linjens ekvation är $y=2x-3$.

Genom att redigera andragradspolynomet och istället studera $y = x^2 - 3x - 2$ och $y = x^2 + 2x - 1$ och eventuellt ytterligare några variationer, kan eleverna se ett mönster.

Nu har eleverna en hypotes och det är dags för det formella beviset.

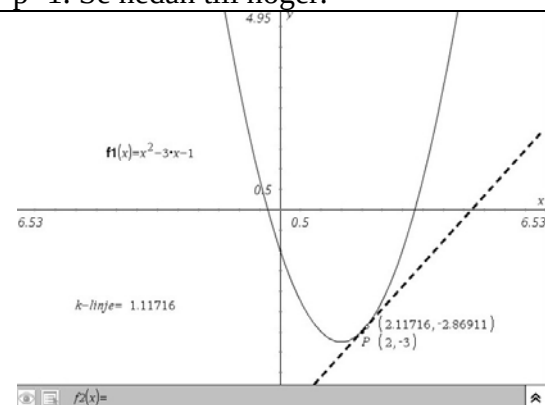
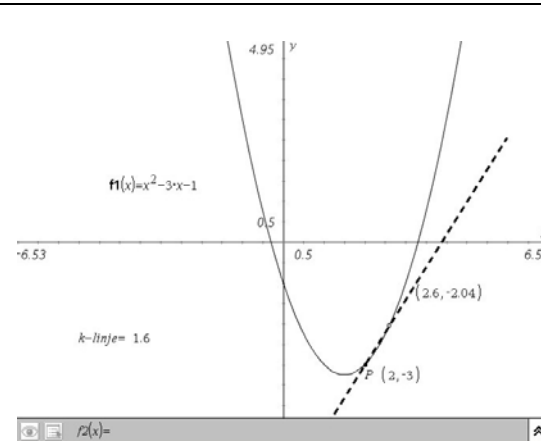
Riktningkoefficienten för en linje genom två punkter på grafen, en med $x=p$ och en med $x=p+h$ tecknas och dess gränsvärde bestäms när h går mot noll.

Avslutningsvis byts p mot x , se bild.

$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$	$h+2p-3$
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \right)$	$2p-3$
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$	$2x-3$

För att förstärka detta med en grafisk minnesbild ritas en linje genom punkterna med $x = 2$ (benämnd P i bilden) och $x=2,6$ på grafen. Denna linje har riktningkoefficienten 1,6 som framgår av bilden. Flytta den högra punkten längs grafen så att den successivt närmar sig punkten P och studera k -värdet. Se bilden nedan till vänster.

För att bekräfta att gränsvärdet, dvs tangentens lutning är 1, återvänder eleverna till den föregående sidan och evaluerar värdet hos gränsvärdet med $p=1$. Se nedan till höger.



$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$	$h+2p-3$
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(p+h)-f(p)}{h} \right)$	$2p-3$
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)$	$2x-3$
$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right)_{x=2}$	1

Genom detta alternativa sätt att introducera derivatan undviker vi det initiala problemet med en abstrakt definition och kan istället upptäcka vilken kurva k -värdet följer, vilket inte tidigare varit möjligt på detta enkla sätt.

Det är frestande för eleverna att själva fundera över och leka med polynom av högre grad och andra typer av funktioner. Om så sker har vi lyckats väcka eller förstärka intresset för matematik.