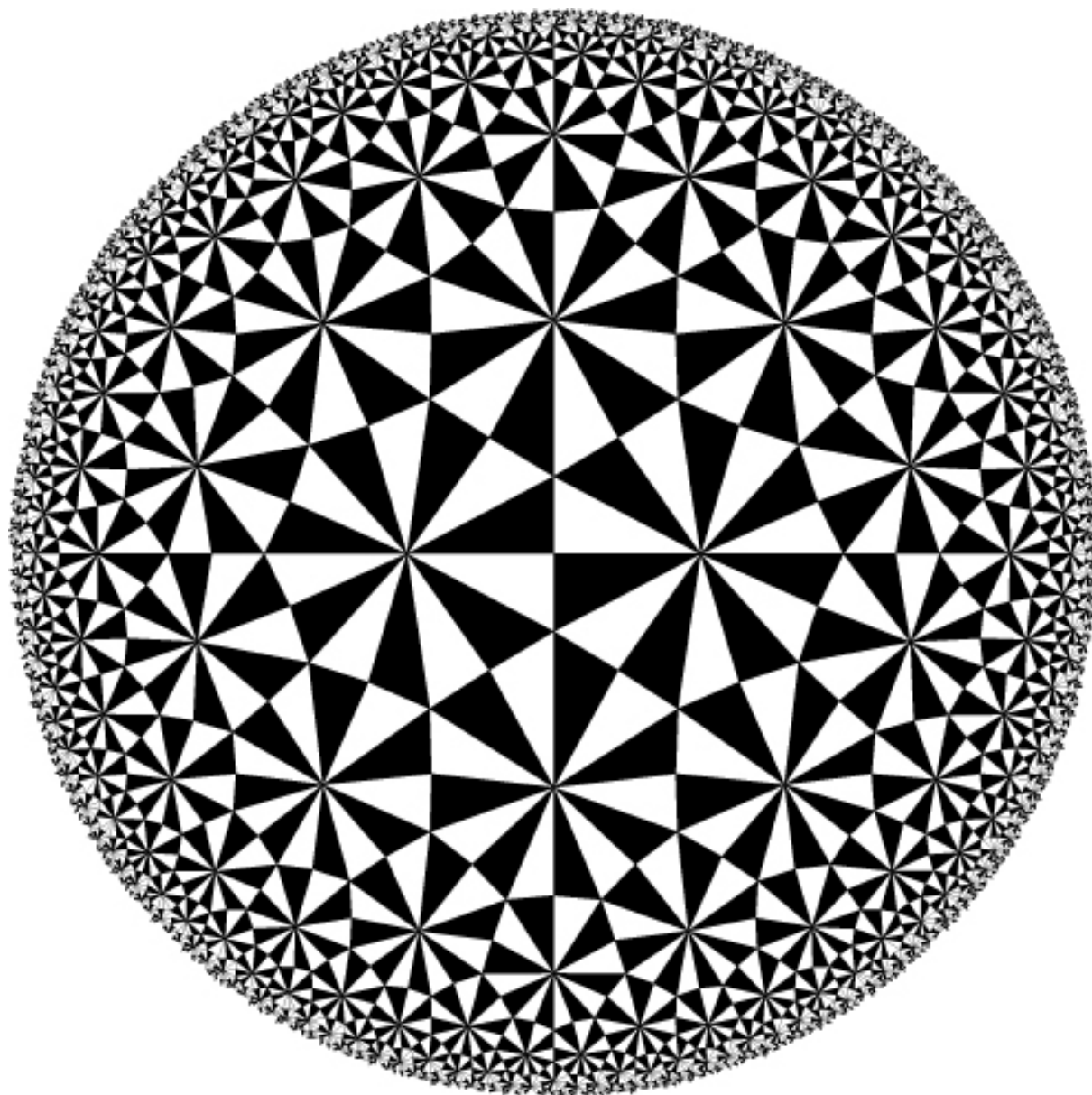


Att Uppleva den Hyperboliska Världen

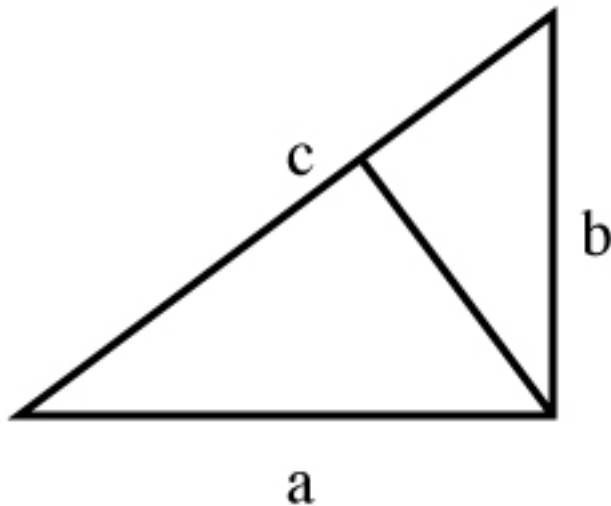
Ulf Persson är professor i matematik vid Chalmers Tekniska Högskola. Han är f.d. ordförande för Svenska Matematikersamfundet och dess ständige redaktör för dess nyhetsbrev – Medlemsutskicket. Sedan den 1 januari 2007 är han även huvudredaktör för *NORMAT*.



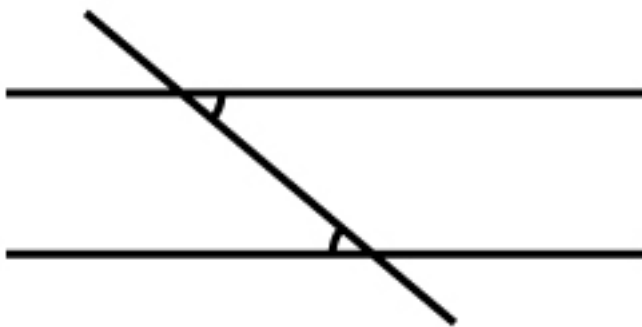
Inledning

Den Euklidiska geometrin är vi alla bekanta med. Vinkelsumman i en triangel är 180° eller π om vi mäter vinklar i radianer. Vidare finns det icke-kongruenta likformiga trianglar. D.v.s. två trianglar kan ha samma vinklar men olika storlek. Detta gör att vi bland annat kan skal ner verkligheten till kartor. Detta har ett antal konsekvenser. Om ett torn kastar en skugga som är 10 meter lång, medan en pinne 1 meter hög kastar en skugga 4 dm lång kan vi dra slutsatsen att tornet är 25 meter högt utan att behöva klättra upp i det. Denna proportionalitetsprincip kan användas på avlägsna berg och celesta objekt och är därmed

fundamental inom astronomin. En annan kanske något förvånande konsekvens är Pythagoras sats. En rätvinklig triangel kan delas upp i två trianglar var och en likformig med den ursprungliga och därmed med sig själva. Ytan (A) av en rätvinklig triangel är proportionell mot hypotenusan (c) i kvadrat ($A=kcc$) och proportionalitets konstanten (k) beror bara av formen, d.v.s. sammanfaller för likformiga trianglar. Därmed är det bara att lägga ihop areorna av de två deltriablarna och erhålla den välkända formeln ($cc=aa+bb$).



Allt detta bygger bara på ett enda antagande, nämligen detta att genom en punkt (P) utanför en given linje (L) kan man bara dra en linje (L') parallell med den givna. Speciellt innebär det att en linje som skär två givna linjer bildar samma vinklar med dem (se figur nedan) ur vilket man lätt inser att vinkelsumman i en triangel är just 180° och därmed att man kan bilda en figur som ovan.



Detta antagande (något annorlunda formulerat och sedemera känt som parallellaxiomet) ingick bland Euklides ursprungliga postulater, och eftersom det i motsats till de andra helt självklara axiomen och postulaten mer tycktes ha karaktären av ett resultat inspirerade detta till ansträngningar att bevisa det från de övriga axiomen. I över tvåtusen år gäckades dessa ansträngningar även om framgångar röntes på 1700-talet av matematiker som Saccheri, Lambert och Legendre. De följde en välkänd matematisk strategi nämligen den att antaga det man vill motbevisa och härleda absurda konsekvenser, ett så kallat motståndelsebevis. Vad en matematiker då gör är att skapa en alternativ verklighet, vars existens slutligen förkastas på grund av orimligheter.

Men vad är då orimligheter? Legendre insåg att ett förnekande av parallellaxiomet skulle innebära existensen av naturliga längdenheter, och således göra skalningar omöjliga, och ansåg det senare som en absurd konsekvens. Likaledes Saccheri ansåg att de många

orimligheter han härledde var grund nog till att förkasta möjligheten till en icke-euklidisk geometri. Dock de rimliga antaganden som konsekvenserna stred emot utgör ingenting annat än omformuleringar av det ursprungliga parallellaxiomet, och de faktiskt korrekta resultat dessa 1700-tals matematiker härledde var ingenting annat än satser i den icke-euklidiska geometrin.

Dock insikten att axiomet var obevisbart och att alternativa axiomen således kunde ligga till grund för alternativa konsistenta geometrier innebar ett stort tankeskutt, ty den euklidiska geometrin var mer än matematik, det var ett försök att omfatta själva rummet i vilket vi lever och som därmed har en fysisk påtaglighet. Att ifrågasätta detta och postulera existensen av alternativa världar var ett djärvt steg. Hade inte självaste Kant påstått att rummet var euklidiskt, eller åtminstone om man läser honom som han skall läsas nämligen noggrant, att om man visserligen inte kan känna till rummet som det verkligen är (det ofta citerade 'Das Ding an sich') så var den föreställning vi gjorde om rummet alltid euklidiskt. Detta kan synas vara något av hårklyveri och jag vill inte gå alltför djupt in i de filosofiska detaljerna, utan bara påpeka att förnekandet av parallellaxiomet hade vittgående konsekvenser för matematiken. Konsekvenser som dock inte visade sig förrän ungefär hundra år senare, nämligen detta att matematikern har stor frihet att välja sina axiom, och att dessa är formella i den meningen som spelregler är formella, nämligen ingenting av Gud givet utan en bland människor överenskommen konvention, en attityd som till en stor del har influerat 1900-talets matematik. Sedan kan ju vissa spel vara intressantare än andra i meningen att vara mera 'spelbara' och detta leder till meta-matematiken, nämligen studiet av matematiska spel, som i en viss mening själv är bara ett matematiskt spel bland alla andra. Detta är en tankelekarnas tankelek, en av vars mera handfasta konsekvenser som under senare decennier åtnjutit vid popularitet är Gödels bevis om begränsningarna av matematisk formalism och återigen förnyat de eviga ontologiska frågorna om Platonismen. Men återigen dessa är frågeställningar som det räcker att snudda vid. Och låt oss gå tillbaka till början av 1800-talet.

Det är tre namn man förknippar med den icke-euklidiska geometrin. Dessa är Gauss, Bolyay samt Lobachevsky. Gauss är av de flesta matematiker ansedd som den främste matematikern genom tiderna, och som bokstavligen gjorde allt till guld som han rörde vid. Matematiker som Euler och Cauchy må ha publicerat mera, men Gauss var, som vi kommer att se, ganska sparsmakad och lät bara offentliggöra det perfekta. Bolyay var ungrare och son till en av Gauss gamla studiekamrater. Den senare hade under sitt liv förgäves försökt bevisa parallellaxiomet och varnade sin son för att likaledes föröda sitt eget liv med samma hopplösa företag. En faders förmaningar får sällan avsedd effekt, barn brukar oftare påverkas av vad föräldrarna gör än av vad de säger och sonen gav sig oförfärat i kast med problemet, men kom i motsats till fadern till den hisnande insikten att axiomet var obevisbart och att dess negationer skulle leda till alternativa konsistenta geometrier vars satser han föresatte sig att härleda. Han var en mycket ung man och man kan väl föreställa sig den upphetsning han må ha känt vid att låta sina resultat nå den store Gauss via sin fars förmedling. Gauss tog mycket riktigt del av hans undersökningar men lät meddela att han tyvärr var förhindrad att berömma dem, ty ett sådant beröm skulle ha varit ett självberöm ty han hade själv kommit fram till samma slutsatser men avböjt att publicera dem med tanke på det ramaskri detta skulle ha inneburit. För den unge matematikern Bolyay var detta ett hårt slag som han aldrig återhämtade sig från och han övergav matematiken. Det tredje namnet Lobachevsky tillhörde en ryss som hade den stora fördelen att leva i civilisationernas utkanter och inte ha någon som helst personlig koppling till Gauss. I ett välsignat tillstånd av naiv omedvetenhet utvecklade och publicerade han sin geometri, av honom benämnd astralgeometrin, och bör således i en nutida mening åtnjuta prioritet. Beteckningen astralgeometri kom snart i skymundan och

under 1800-talets senare del infördes den numera förhärskande benämningen hyperbolisk geometri, även om speciellt i Ryssland, likaledes variationer involverande namnet Lobachevsky förekommer.

De icke-euklidiska geometrierna

Vad är de omedelbara konsekvenserna av att man negerar parallellaxiomet? Jo vinkelsumman i en triangel är inte längre 180° och likformiga trianglar är kongruenta. Detta betyder att Pythagoras teorem inte längre gäller, eller snarare att det måste omformuleras. Detta kan synas vara något teoretiskt men det har slående praktiska konsekvenser.

Innan vi går vidare måste vi precisera vad som menas med att negera parallellaxiomet. I den euklidiska kan vi genom varje punkt utanför en linje dra precis en linje parallell med denna. I den elliptiska kan vi inte dra någon, d.v.s. alla linjer skär varandra, medan i den hyperboliska kan vi dra många (i själva verket oändligt många). Det första fallet är faktiskt lätt att föreställa sig och modeller för detta var kända långt före introduktionen av den icke-euklidiska geometrin, nämligen den projektiva, känd från perspektivläran och de idealiserade punkterna i oändligheten. Och ännu mera konkret om vi upphäver en liten teknikalitet, nämligen den att linjer högst får skära varandra i en punkt, kan vi gå tillbaka till den sfäriska geometrin, välkänd av antikens matematiker. I den sfäriska geometrin där vi tolkar linjer såsom storcirklar är det klart att två storcirklar skär varandra och även att vinkelsumman i en triangel är alltid mer än 180° och att diskrepansen blir större och större ju större triangeln är. I själva verket finns det ett mycket enkelt samband mellan denna vinkelöverskott och arean av en triangel. Vidare har sfären en naturlig längdenhet, nämligen sträckor kan mätas i båglängder, och det är en stor skillnad på längdenheten 1 meter (som tills ganska nyligen definierades genom en fysisk prototyp förvarad i en temperaturstabiliserad källare i Paris) och säg 90° . Ty den senare vinkeln kan du definiera, medan prototypen måste du peka på (det är dock typiskt att den ursprungliga metern definierades som 1 fyrtiomiljondel av ekvatorns omkrets). Pythagoras sats omformuleras till $\cos(C) = \cos(A)\cos(B)$ där A,B,C är båglängderna av en rätvinklig sfärisk triangel där C utgör hypotenusan. Vad har detta med den ursprungliga formuleringen att göra? Om A,B,C är små kan vi approximera cosinus funktionen $\cos(x)$ med $1 - \frac{1}{2}x^2$

Och därmed erhåller vi approximativt

$$1 - \frac{1}{2}C^2 = (1 - \frac{1}{2}A^2)(1 - \frac{1}{2}B^2) = 1 - \frac{1}{2}(A^2 + B^2) + \dots$$

d.v.s. vi återfår Pythagoras formel approximativt.

Det Hyperboliska geometrin

Man kan nu undra varför inte den icke-euklidiska geometrin upptäcktes tidigare i och med att detta var känt. Svaret är att tolkningen först blev uppenbar i och med att man tog modet att förneka parallellaxiomet. I den modell vi har av den så kallade elliptiska geometrin är ju storcirkelarna inte räta utan i högsta grad krökta och allt kan ju beskrivas genom den 3-dimensionella euklidiska geometrin i vilket sfären befinner sig. Dock i den hyperboliska geometrin finns inga sådana åskådliga modeller tillgängliga och vi tvingas utnyttja vår fantasi betydligt mera. Vad vi nu skall göra är att bege oss ut i det äventyr den hyperboliska världen utgör, men det kan vara av hjälp att hålla den sfäriska geometrin i åtanke som analogi. Den bild som inleder denna artikel ger prov på den perspektivförvrängning en plan bild av det hyperboliska planet framtvingar. Och förhoppningsvis kommer detta att bli förklarat under föreläsningens gång.