

807 Bråk

Mikael Passare är professor i matematik vid Stockholms universitet.

Inledning

Rationella tal, eller allmänna bråk, är som bekant de tal man får genom att utgå från de naturliga talen och tillämpa de fyra räknesätten. Min avsikt med detta föredrag är att berätta hur en matematiker ser på bråktal, och att visa hur de rationella talen kan representeras och behandlas på oväntade sätt. Jag kan utlova några annorlunda aspekter på invanda begrepp.

Decimaler och baklängesräkning

Vi är alla vana vid att approximera rationella tal med ändliga decimaltal. Exempelvis har vi $11/14 \approx 0,79$ eller med lite större noggrannhet $11/14 \approx 0,7857142857$. I själva verket är det lätt att räkna ut samtliga (oändligt många) decimaler, eftersom sekvensen 714285 kommer att upprepas hela tiden. Det är alltså fullt korrekt att representera bråket $11/14$ som det oändliga decimaltalet $0,785714285714285714285\dots$ (Och på samma sätt gäller att $1 = 0,99999999\dots$) Men vem har sagt att det bara är åt höger man kan ha oändligt många siffror? Det är faktiskt lika korrekt att representera vårt bråk som $11/14 = \dots714285714285714286,5$ (där sekvensen 714285 nu upprepas åt vänster i oändlighet). Läsaren uppmanas kontrollera detta genom att ställa upp och multiplicera detta "monster" med 14. Väljer vi en annan talbas, till exempel 3, får vi täljaren $11 = (102)_3$ och nämnaren $14 = (112)_3$ och de oändliga utvecklingarna blir nu $11/14 = (0,210012210012\dots)_3$ respektive $11/14 = (\dots210012210012211)_3$.

Kvoter och kedjebraåk

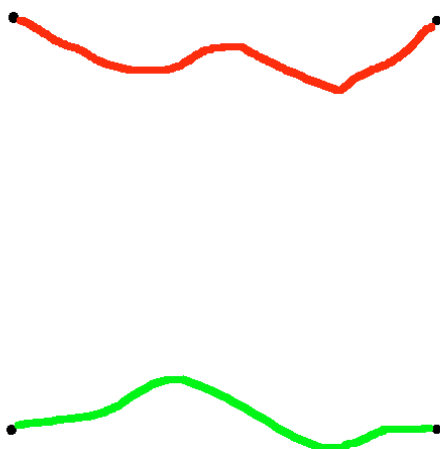
Den gamle greken Euklides har gett namn åt en metod (eller algoritm) för att finna största gemensamma delaren till två heltal: man dividerar – inverterar resten – dividerar – inverterar resten och så vidare tills divisionen går jämnt upp. Den sista nämnaren är då den sökta största gemensamma delaren. Med vårt exempel får vi: $11/14$ ger kvot noll och inverterad rest $14/11$; $14/11$ ger kvot ett och inverterad rest $11/3$; $11/3$ ger kvot tre och inverterad rest $3/2$; $3/2$ ger kvot ett och inverterad rest $2/1$; divisionen $2/1$ ger kvot två och går jämnt upp. Vi noterar att nämnaren i den sista divisionen är 1, som ju mycket riktigt är största gemensamma delaren till 11 och 14. Om man håller reda på de successiva kvoterna och inverteringarna kan man skriva $11/14 = 0 + 1/(1 + 1/(3 + 1/(1+1/2)))$ vilket är den så kallade kedjebraåksutvecklingen av vårt rationella tal $11/14$. Irrationella tal har oändliga kedjebraåksutvecklingar, exempelvis ges det gyllene snittet $(1 + \sqrt{5})/2$ av det oändliga kedjebraåket $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + \dots)))$.

Uppräkning och trassel

En viktig egenskap hos de rationella talen är att de är relativt få. Detta kan låta paradoxalt eftersom de naturligtvis är oändligt många, men i matematiken rör man sig med flera olika oändligheter, och den minsta är den uppräkneliga oändligheten. Det går nämligen att numrera de rationella talen. Låt oss göra detta helt explicit i form av ett släktträd för alla positiva bråk. Vi börjar med talet $1 = 1/1$ som också får nummer 1. Detta får vara anfadern som är ensam i den första generationen. Nästa generation består av en dotter $1/2$ och en son $2/1$ som får nummer 2 respektive 3. Därefter kommer en dotterdotter $1/3$, en dotterson $3/2$, en sondotter $2/3$ och en sonson $3/1$ och dessa får nummer 4, 5, 6 och 7. Regeln vi använder är att dottern till en bråk m/n är $m/(m+n)$ medan sonen till samma bråk är $(m+n)/n$. Varje bråk uppträder precis en gång i detta oändliga släktträd och ordningsnumret för ett bråk som tillhör den g :te generationen kommer att ligga någonstans mellan 2^{g-1} och $2^g - 1$. Låt oss nu se efter vilket ordningsnummer vårt exempel $11/14$ har.

Eftersom $11/14$ är son-dotter-son-son-son-dotter (sdsssd) till $1/1$ och alltså tillhör den sjunde generationen, så ligger numret mellan 64 och 127. För att finna det precisa svaret är det bäst att gå över till det binära talsystemet. Vi ser att $64 = (1000000)_2$ och $127 = (1111111)_2$ så vi söker ett sju-siffrigt binärt nummer. Notera nu att anfadern (även binärt) har nummer ett och att för varje ny generation lägger man till en nolla på slutet om det blev en flicka, eller en etta om det blev en pojke. Vårt bråk $11/14$ har alltså det binära numret ett-ett-noll-ett-ett-ett-noll, och eftersom $(1101110)_2 = 110$ finner vi att $11/14$ är det etthundrationde (positiva) bråket.

Till sist kommer vi att betrakta en (till synes) helt annan sorts representation av rationella tal, nämligen i form av reptassel. Man har två rep (säg ett rött och ett grönt) vars ändar utgör hörn i en kvadrat. I utgångsläget (som står för talet noll) går repen horisontellt och skilda från varandra.



Sedan bildar man ett trassel genom att successivt låta intelligande repändar byta plats med varandra. Mirakulöst nog kommer varje sådant trassel att motsvara ett bråk, och omvänt kan varje bråk beskrivas av ett trassel. Figuren visar trasslet för vårt bråk $11/14$.

