

801 — Prinsessan checkar in och andra oändliga historier

Qimh Xantcha

Sammanfattning

Oändligt är vad som icke är ändligt. Men hur många oändligheter finns det? En enda — eller oändligt många?

Så kan man formulera den fråga som här skall utredas, och vars svar kommer att visa sig synnerligen märkligt. Vi inleder med att presentera Brasses berömda bakelseproblem, för att sedan illustrera de matematiska tankegångarna med hjälp av den lilla novellen *Prinsessan checkar in* (vi tvekar att kalla det en saga), samt beskriva den förbluffande Kontinuumhypotesen, först framlagd av Cantor och småningom inkluderad bland Hilberts tjugotre problem.

Så lyder vårt föredrag i resumé. Med en parafras av Blake kan vi sammanfatta ännu kortare: “Hold infinity in the palm of our hands, and eternity in an hour!”

Qimh Xantcha har flera års erfarenhet av undervisning och populärvetenskapliga föredrag och har i sin framtoning jämförts med Hans-Uno Bengtsson (hos vilken han också gått i lära). Numera är han verksam som matematiker vid Stockholms universitet.

En fundamental fråga gällande två mängder är när dessa är “lika stora”. Vi påminner oss en sketch från den briljanta TV-serien *Fem myror är fler än fyra elefanter*, där en naiv Brasse Brännström står i begrepp att inhandla fem stycken gräddbakelser av konditor Magnus Härenstam. Brasse har dock inget begrepp om vad “fem” är, men efter mycket funderande påminner han sig plötsligt att tårna är precis fem. Följaktligen åker skor och strumpor av, och foten placeras på konditoridisken för kontrollräkning av tårna.

“Men snälla ni, grädden surnar ju!” utbrister en förfärad Magnus Härenstam. “Vi får ju inte ens ha hundar i butiken!”

Brasse låter sig emellertid icke bekomma. Sedan han förvärvat sig om att fingrar och tår är lika många, är det dags att räkna bakverken. Ett finger doppas helt sonika i varje bakelse, och då alla fingrar har gräddat på sig, och samtliga bakelser (“Våra finaste bakelser, med marsipan, gräddat och körsbär i mitten!”), som Magnus stönar) petats i, känner sig Brasse äntligen säker på, att bakelserna är just *fem* till antalet.

Brasses förfarande illustrerar i själva verket en fundamental matematisk princip: För att jämföra två mängder, söker man para ihop deras element. Lyckas detta, säges mängderna vara lika stora, och ha samma *kardinalitet* eller *måktighet*. (En sådan hopparning kallas med matematisk terminologi för *bijektion*.)

Själva proceduren att räkna någonting (ett, två, tre, ...) är i själva verket en variant på detta. Räknar man elementen i en mängd — ett antal bakelser, säg — och får dem till fem, så har man ju funnit en hopparning mellan mängden av bakelser och mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Det verkligt revolutionerande inträffar då mängderna är oändliga. Låt oss titta på vad som förefaller vara de allra minsta, självklaraste oändligheterna, nämligen de som representeras av de positiva heltalen och de naturliga talen:

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Är dessa två mängder lika stora? Ett frestande svar är måhända nej, ty uppenbarligen innehåller $\mathbf{N}$ varje tal i $\mathbf{Z}^+$, och dessutom det extra talet 0. Men detta räcker inte, ty för att visa att mängderna är olika stora måste vi visa att det är *omöjligt* att para ihop talen i de båda mängderna med varandra. Och i själva verket låter sig detta mycket enkelt göras:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}^+ : & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ \mathbf{N} : & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \end{array}$$

Vi drar slutsatsen att $\mathbf{Z}^+$ och $\mathbf{N}$ innehåller "lika många" tal, det vill säga har samma kardinalitet. Denna kardinalitet ("oändlighet") betecknas $\aleph_0$. $\aleph$, aleph, är första bokstaven i det hebreiska alfabetet — jämför *Aniaras* fyrtiosjunde sång, där det talas om "en talmängdsfilosof och mystiker av aleftalens skola".

Vi går raskt vidare och betraktar mängden av samtliga heltal, det vill säga $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Nu opererar vi med både positiva och negativa tal, och har, så att säga, en oändlighet i vardera riktningen. Denna nya oändlighet borde väl ändå vara "större" än $\aleph_0$? Men nej, så är icke fallet, vilket följande hopparning visar:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Z}^+ : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{Z} : & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots \end{array}$$

Således har också $\mathbf{Z}$ kardinaliteten $\aleph_0$.

Efter de hela talen kommer helt naturligt de rationella talen $\mathbf{Q}$. Denna mängd består av heltalsbråk, och kan visuellt åskådliggöras som följer:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdot\cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot\cdot \\ \cdots & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\ \cdots & \frac{-2}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\ \cdots & \frac{-2}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\ \cdots & \frac{-2}{-1} & \frac{-1}{-1} & \frac{0}{-1} & \frac{1}{-1} & \frac{2}{-1} & \frac{3}{-1} & \frac{4}{-1} & \cdots \\ \cdot\cdot & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdot\cdot \end{array}$$

Medan talen i $\mathbf{Z}$ bildar en oändlig rad, så har vi här att göra med ett kvadratisk schema, med oändligt många rader och oändligt många kolumner — dock med flera upprepningar, såsom exempelvis $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-1}{-1}$. Denna oändlighet måtte väl ändå vara större än $\aleph_0$? Men ack, vad man kan bedra sig! De rationella talen kan räknas upp i spiralform, som följer:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 \dots & \frac{-2}{3} & \dots & \frac{-1}{3} & \leftarrow & \frac{0}{3} & \leftarrow & \frac{1}{3} & \leftarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & \dots \\
 & & & & & & & & & \uparrow & & & & & \\
 \dots & \frac{-2}{2} & & \frac{-1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & \dots \\
 & & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & \\
 \dots & \frac{-2}{1} & & \frac{-1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & \dots \\
 & & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & & \\
 \dots & \frac{-2}{-1} & & \frac{-1}{-1} & \rightarrow & \frac{0}{-1} & \rightarrow & \frac{1}{-1} & \rightarrow & \frac{2}{-1} & & \frac{3}{-1} & & \frac{4}{-1} & \dots \\
 \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

Nu upprepas som sagt vissa tal, men dessa stryks då helt enkelt nästa gång de påträffas i uppräknningen. Vi erhåller följande hopparning av $\mathbf{Z}^+$ och $\mathbf{Q}$:

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{Z}^+ : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
 \mathbf{Q} : & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & \dots
 \end{array}$$

Således har även $\mathbf{Q}$ kardinalitet $\aleph_0$. Tänka sig.

Våra misslyckanden till trots, så finns det emellertid mäktigare mängder än $\mathbf{Z}^+$. Steget från de rationella talen $\mathbf{Q}$ till de reella talen $\mathbf{R}$ visar sig föra in i en helt ny grad av oändlighet. Den förste som visade detta var Cantor, med ett klassiskt och ofta återgivet bevis, som brukar betecknas *Cantors diagonalförfarande*.

Beviset lyder som följer: Antag att $\mathbf{R}$ faktiskt har samma kardinalitet som $\mathbf{Z}^+$. Då finnes det, per definition, en hopparning av elementen i dessa båda mängder, säg:

$$\begin{array}{lcl}
 1 & \leftrightarrow & a_1 = 2.\boxed{7}1828182\dots \\
 2 & \leftrightarrow & a_2 = 0.1\boxed{0}000000\dots \\
 3 & \leftrightarrow & a_3 = 3.14\boxed{1}59265\dots \\
 & & \vdots
 \end{array}$$

Som synes har vi markerat den n :te decimalen i a_n ovan. Utifrån de inramade siffrorna skapar vi ett nytt tal ξ på följande vis: Om den n :te decimalen i a_n är 1, låt den n :te decimalen i ξ vara 2. Om däremot den n :te decimalen i a_n *inte* är 1, låter vi den n :te decimalen i ξ vara just 1. I vårt exempel får vi $\xi = 0.112\dots$. Med denna definition ser vi att decimalutvecklingarna av ξ och a_n skiljer sig åt just på plats n , varför dessa inte kan vara lika. Eftersom talet ξ följaktligen inte finns med i uppräknningen ovan, är det inte heller en uppräknning av samtliga reella tal, och således inte någon hopparning. Q.E.D.

Av detta ser vi att $\mathbf{R}$ har högre mäktighet än $\mathbf{Z}^+$, och dess kardinalitet, som alltså inte är $\aleph_0$, brukar betecknas c . Det finns alltså olika stora oändligheter — minst två stycken, som det ser ut i nuläget. Faktum är att det finns ännu fler, oändligt många till och med! Ty från varje given oändlighet är det möjligt att skapa en större, vilket är en sats som också bevisades av Cantor (med användande just av diagonalförfarandet ovan).

Den minsta oändlighet som existerar är vår käre, gamle vän $\aleph_0$. Den nästminsta döps då lämpligen till $\aleph_1$, nästa till $\aleph_2$, och så vidare. En naturlig fråga i sammanhanget är då: Var någonstans i hierarkin befinner sig c , kontinuets kardinalitet?

Den samlade matematikerkåren antog länge, med hänvisning till Guds godhet och världens skönhet (detta var innan konjunktiverna avskaffades), att $c = \aleph_1$, det nästminsta kardinaltalet. Denna förmodan erhöll namnet *Kontinuumhypotesen*, och kom först av de tjugotre berömda problem som Hilbert lade fram vid Internationella matematikkongressen i Paris 1900. De flesta av dessa problem har sedan dess någon knipslug matematiker lyckats lösa (till stor berömmelse för vederbörande); dock blev svaret inte alltid vad Hilbert tänkt sig.

Kontinuumhypotesen var just ett sådant problem. 1963 var den avgjord — och på ett sätt som förmodligen skulle ha fått Hilbert att dåna (ifall han fortfarande levte då). Gödel och Cohen visade nämligen, att Kontinuumhypotesen *varken kan bevisas eller vederläggas*. c inte är lika med vare sig $\aleph_1$, $\aleph_2$, eller någon annan i den långa (oändliga) raden av oändliga kardinaltal. c är inte lika med någonting alls! Frågan om kontinuets kardinalitet är, som man säger, *oavhängig* vårt givna axiomsystem, det vill säga Zermelo–Fraenkels axiom för mängdläran (inklusive Urvalsaxiomet).

Matematikens nuvarande axiomsystem är alltså inte kraftfullt nog att besvara frågan, hur många reella tal det finns. Systemet måste utökas, ifall detta skall kunna avgöras. Men trots intensiv forskning har matematikerna ännu inte lyckats enas om ett nytt axiom, som är kraftfullt nog att fastslå värdet på c , men samtidigt “naturligt” nog för att universellt accepteras.

Vi avslutar diskussionen om oändligheter här. En förbryllande fråga är förstås, vad prinsessor (som titeln säger) egentligen har med saken att göra, och på vilka hotell de egentligen checkar in? Detta (och mycket annat) förklaras i Lars Nystedts utmärkta bok *På tal om tal* (Instant Mathematics 1993). Här återfinns bland annat historien (sagan) om prinsessan som checkar in på Hilberts hotell, vilket torde förklara den något märkliga titeln till detta föredrag.