

Hur kan vi göra matematiken meningsfull för ALLA elever?

Jag som håller detta föredrag vid Biennalen 2008, *Bengt Ulin*, undervisade under min studietid i Uppsala som assistent i matematik vid universitetet, därefter tjänstgjorde jag 7 år på deltid vid KTH och på övrig tid vid Kristofferskolan (waldorfskolan i Bromma). Därpå följde heltid i denna skola, småningom kombinerad med undervisning vid Rudolf Steiner seminariet i Järna och på 90-talet med en lektorstjänst i matematik vid Lärarhögskolan i Stockholm. Sedan 80-talet skriver jag böcker och tidskriftsartiklar om matematik.

Matematik är ett av de skolämnen där läraren möter ett brett spektrum av förmåga och begåvning bland eleverna. I en klass brukar det finnas en del elever som måste brottas med uppgifterna och några duktiga elever som kan lösa problem både säkert och snabbt. Mellan dessa flyglar har vi en mitt till vilken vi i stort sett riktar oss. Vi ställs inför utmaningen att dels erbjuda de skickliga eleverna mer krävande problem, dels ge stöd åt elever med mindre fallenhet och ofta med luckor i sina förkunskaper. För den senare gruppen åtgår mer tid och vi har som bekant inte mer än en begränsad tid att disponera. Hur kan vi då väcka ett intresse och helst ett engagemang hos ALLA elever? Hur gör vi aktiviteten i matematik meningsfull?

Målsättningar

Det finns en självklar målsättning *på kort sikt*: att eleverna presterar bra och får ett avgångsbetyg som gör rättvisa åt deras arbete och fallenhet. Både elever och lärare är starkt medvetna om denna målsättning. Därutöver finns en målsättning *på längre sikt*: att övningarna i matematik ska ge eleverna något betydelsefullt *för livet*. Det är ett syfte som i varje fall lärarna ska vara medvetna om. Undersökningar har visat att eleverna kan sätta särskilt stort värde på en undervisning som går in på deras existentiella frågor. Det gäller alla ämnen. Vad kan då matematiken bidra med?

Den är unik som aktivitet genom att tillhandahålla ett övningsfält där vi kan pröva och utveckla vår tankeverksamhet. I matematiken kan vi som i inget annat fack med full visshet inse att ett resonemang är sant. Vi kan iaktta vårt tänkande och öva oss i självkontroll. Därmed är vi framme vid existentiella faktorer av värde senare i livet, eftersom livet gång på gång ställer oss inför problem. Med elever i högre klasser kan man med god resonans samtala om sådana ting, gärna med exempel ur matematiken. Det gör eleverna mycket mer benägna att ta itu med problemlösningen. Redan i årskurs 1 måste denna göras spännande, så att barnen börjar gilla utmaningar.

Problemlösningen

Att lösa problem är den vitala kärnan i all matematik. Alla känner vi glädje när vi löst ett problem och rentav lycka när det krävdes fantasi och uthållighet för att nå målet. Tyvärr råder sällan den ro i skolan som behövs för att ta nappatag med problem. Den mesta tiden sysslar eleverna med att tillämpa en inlärdd metod för att lösa en uppgift. Det är en pedagogik som fullt ut tillämpades i Fornegypten, där mottot var: "Gör så här, så blir det rätt". All inläring måste för all del omfatta inövande och rutin, men om matematiken ska bli stimulerande och utveckla förmågor, så måste vi emellanåt ge eleverna *problem*, dvs uppgifter där de stimuleras att *söka efter ett spår* som kan leda fram till lösningen.

Frågan blir då: hur kan man formulera problem som ger ALLA elever chans att ta itu med ett tankearbete? Det gäller att klara av vad man har avsett med ”differentiering inom klassens ram”. Härvidlag kan vi utnyttja en typ av problem som jag vill kalla

Självdifferentierande uppgifter

Sedan svensk skolmatematik började skärskådas på 80-talet har lärarhögskolorna med gott resultat undervisat sina lärarkandidater om betydelsen av *problemorienterad undervisning* och ett *undersökande arbetssätt*. Låt oss se på ett par enkla exempel, ett aritmetiskt och ett geometriskt. (Vid biennalen ges ett flertal exempel från olika årskurser.)

Exempel 1 (t ex i klass 6):

Var och en väljer ett naturligt tal och skriver upp de två närmast större heltalen. Därpå adderas de tre talen. Kan vi finna någon intressant egenskap hos summan?

Eleverna skaffar sig eget siffermaterial och efter en stund skrivs ett 10-tal summor upp på väggtaflan. Frågan blir nu: ”Kan ni hitta något gemensamt hos alla dessa summor?” (Eller: hos de *flesta* av dessa summor, ifall något svart får förekommer bland talen.)

Här tillkommer ett individuellt moment: att *upptäcka* en gemensam egenskap hos de noterade talen. Redan här blir de elever glada som gör (den rätta) upptäckten!

Och nu får eleverna försöka bevisa det som de funnit, delbarhet med 3. Här gäller det att göra ett fynd av djupare slag: att komma på en bevisidé. Det kan ge en ännu större glädje. Till sist kan man be eleverna att göra beviset med algebra, genom att kalla ett av de tre talen, gärna det i mitten, för n . På så vis bidrar problemlösningen till att göra algebran både trevlig och meningsfull – ett område som många elever upplever som särskilt tråkigt, om algebran inte sätts in i fruktbara sammanhang.

Medan klassen arbetar med den här uppgiften har säkert några elever, speciellt de som är snabba och eventuellt efter en vink från läraren, börjat undersöka hur saken ställer sig med fyra tal i rad, därefter med fem tal osv. Några elever brukar komma fram till ett lyckat generellt resultat.

En uppgift av den här typen verkar självdifferentierande, eftersom eleverna utan någon anmodan från läraren arbetar vidare med problemet, för övrigt i en riktning som de valt själva.

Exempel 2 (t ex i klass 9)

Vi har klarat av begreppet polyeder och bl a tagit fram kub, tetraeder och pyramid som exempel på polyedrar. Eleverna får i uppgift att rita sina egna polyedrar. De ska vara konvexa. De kan få i uppgift att till nästa lektion (exempelvis som hemarbete) räkna antalet ytor, hörn och kanter hos ett par egenhändigt ritade polyedrar. De tar med sig resultaten, på tavlan skrivs en tabell med ett dussintal exempel på antalet ytor, hörn resp kanter.

Här återkommer nu frågan: ”Kan ni se något samband mellan tabellens tal?”

Det är inte lätt. Det behövs i regel en vink om att man ska se på antal ytor och hörn för sig och på antal kanter för sig. Liksom i fråga 1 har ALLA elever möjligheten att göra den glädjande upptäckten. Jag har haft elever som övervunnit ett obehag inför algebran sedan de med framgång ritat avancerade polyedrar och funnit den *polyedersats* av Euler som redogör för det sökta sambandet ($y+h = k+2$).

Även exempel 2 verkar självdifferentierande: eleverna visar upp polyederfigurer som svarar mot deras förmåga att vara kreativa och var och en brukar vara nöjd med sin konstruktion. När eleverna efter problemlösning i rymdgeometri som avslutning får se vackra former hos pyrit, koksalt, fluorit, magnetit och bergkristall blir de förvånade. Några tror att kristallerna blivit slipade.

För att lyckas med att entusiasmera eleverna är det viktigt att man själv upprätthåller en aktivitet i problemställning och problemlösning. Man kan varje dag "jogga" lite genom att spana efter data och annat material i media som lämpar sig för uppgifter i skolan. Det händer sällan att en dag inte ger oss *något* att notera. En annan övning, som på lång sikt har starkare verkan, är att man då och då söker upp ett nytt problem att lösa, t ex i Nämnaren. Att utmana sig själv börjar f.ö. att bli en trend. En genomförd lösning ger oss ökat självförtroende. Om vi däremot behöver hjälp, så ökar vår erfarenhet även då. I båda fallen alltså ett steg framåt!

Matematik och tänkande

Som bekant spelar ett antal regler en viktig roll i problemlösningen. Konsten att behärska tecken, prioriteringar och parenteser måste utvecklas genom upprepade övningar som ger rutin och därmed bidrar till det självförtroende som betyder så mycket, ja ibland kan vara en avgörande faktor. En annan tillit av existentiellt slag är förtroende för tänkandet som kunskapsorgan. Särskilt viktigt är det att utveckla ett förtroende för det egna tänkandet.

Framför allt kan en sådan tillit växa fram ur lyckad problemlösning. Hur kan man då hjälpa elever som skyggar inför ställda problem, som ibland hindras av en rädsla för matematik?

Det blir förr eller senare fruktbart att ställa in matematik och matematiskt tänkande i ett större perspektiv. Man kan anslå lite tid till att *orientera* om hur matematik spelat en roll i samhällsutvecklingen och fortfarande är av stor betydelse. Det behöver inte bli mer än några procent av tiden, men om den används väl kan matematiken som orienterings-ämne bli en vitamininjektion för elevernas problemlösning. Hur kan man uppnå en sådan verkan?

Den mer eller mindre dolda matematiken

- Vi använder oss varje dag av apparater och maskiner som utvecklats tack vare insatser av matematiker. I samverkan med kollegor i fysik, kemi, samhällskunskap, estetiska ämnen och biologi kan väl valda exempel väcka fascination bland eleverna.
- Andra tillämpningar av matematik finner vi inom en rad hantverksgrenar. Även här är samråd med kollegor (rörande modellering, smide, snickeri, vävning, etc.) att varmt rekommendera.
- Därmed är vi framme vid samband mellan matematik och konst. Redan pythagoréerna byggde en harmonilära utifrån aritmetiska förhållanden och när det vältempererade pianot introducerades på 1700-talet blev frekvensskalan exponentiell: alla halvtonssteg gjordes lika stora. Förvånande nog upplever vid den ökande frekvensen vid stigande tonhöjd logaritmiskt. Även ljudstyrka förnimmer vi logaritmiskt: vi har en decibelskala som är anpassad just till vår upplevelse, inte till energin hos ljudkällan.
- Ur matematikens historia, i en del fall spännande som en thriller, kan vi hämta utmärkta frågeställningar. I stället för att som skollitteraturen garnera undervisningen med små faktarutor ska vi integrera moment ur matematikens historia med problemlösningen. Det ger en växelverkan som påtagligt ökar elevernas intresse för både matematik, historia och mänskliga relationer.
- Inom kapitlet procenträkning erbjuder media och banker i sina rapporter varje dag en brokig mångfald av räkneexempel; matematikläraren kan då och då komma med rykande dagsaktuella problemställningar.
- Naturen visar oss i sina former en tydlig geometrisk design, men den präglas i många fall också av en dold aritmetik, främst i fråga om Fibonacci-tal bland träd och växter.

Stödmatematik

Hur engagerande lärarna än undervisar kommer det att finnas långsamt arbetande elever i varje klass, elever som behöver stöd. Det gäller att upptäcka hjälpbehovet och att sätta in stödundervisning så snart som möjligt. Det är min erfarenhet att duktiga kamrater kan göra värdefulla extra insatser, åtminstone i klasser med tonåringar och särskilt på gymnasienivå. Psykologiska faktorer spelar in ganska starkt i problemlösningen och det kan vara lättare för somliga elever att ta emot hjälp från en kamrat än från en vuxen. Att svårigheter i högre klasser ofta beror på kunskapsluckor bekräftar betydelsen av tidiga stödinsatser.

Några studietips

Listan över läsvärda böcker skulle kunna göras lång. Jag väljer endast ut tre referenser: en bok av Martin Gardner, en av Georg Pólya samt en av de böcker jag skrivit själv; den ger exempel på hur man kan bredda problemlösningen. Ett flertal böcker blir förstås utlagda i förlagens utställningar.

Martin Gardner: *aha! Insight*, Scientific American / Freeman & Company 1978

Georg Pólya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 band,

Princeton University Press 1959

Bengt Ulin, *Problemlösning i symbios med matematikhistoria*,

Ekelunds förlag 2002 (bok plus kopieringshäfte, numera på Gleerups förlag)