

Datortomografins matematik. Om en matematisk teori med många nya tillämpningar

Jan Boman är professor emeritus i matematik vid Stockholms universitet. Han har i många år medverkat i lärarutbildningen, och han har sysslat med forskning över matematiska problem med anknytning till datortomografi.

Datortomografi utvecklades under 1970-talet och kom i mycket allmänt bruk under 1980-talet, trots att en datortomograf redan då kostade någon miljon kronor. Att datortomografi är en sofistikerad och mycket effektiv teknik för röntgenundersökning för medicinsk diagnostik är i dag välkänt. Mindre välkänt är förmodligen det faktum att avancerad matematik spelar en väsentlig roll för datortomografens funktion.

Vid datortomografi avbildar man ett plant snitt genom det område som man vill undersöka. Metoden kallas därför ibland för "skiktröntgen", och ordet "tomografi" är bildat av det grekiska ordet "tomos", som betyder sektion eller snitt. Anledningen till att matematiken behövs kan sägas vara att det är omöjligt att direkt mäta de storheter som man är intresserad av, och att apparaten därför i stället mäter helt andra storheter. Matematiken utgör förbindelselänken mellan det man mäter och det man vill veta. Det som man vill veta är värdet på absorptionskoefficienten för röntgenstrålning i varje punkt i ett plant snitt genom det undersökta området. Olika slags vävnad har olika täthet och därmed något olika absorptionskoefficient. Således kan sjuk vävnad, exempelvis tumörvävnad, ofta kännas igen genom något avvikande absorptionskoefficient. Om vi känner ett gott närmevärde på absorptionskoefficienten i "varje punkt" i det plana snittet, så är det mycket lätt att med datorns hjälp rita upp en bild av snittet genom att tätare medium ges högre svärtning på bilden eller tvärtom. Låt oss tänka oss att vi söker värdet på absorptionskoefficienten i varje ruta i ett rutnät bestående av kvadrater med 0,5 millimeters sida. Om det undersökta området är en cirkelskiva med 25 centimeters diameter, så har vi alltså bortåt 200 000 kvadrater och lika många tal som ska bestämmas.

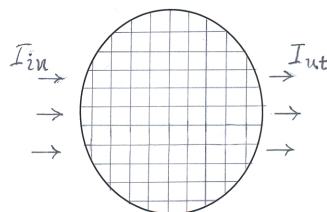
Problemet är att vi inte kan mäta dessa värden direkt, utom möjligen genom att säga ut den tunna skiva som vi vill studera och genomlysas den vinkelrätt mot sitt eget plan. Men detta vill vi förstås inte göra med en levande människa och inte heller med en dyrbar maskin, exempelvis en rymdraket. Vad man kan göra är att genomlysas skivan *i dess eget plan*, i många olika riktningar.

Låt oss försöka uttrycka matematiskt den information som en sådan undersökning kan ge. Antag att vi skickar en röntgenstråle med känd intensitet I_{in} genom området så som i figuren. Med en detektor mäter vi den utgående strålens intensitet I_{ut} . Kvoten $I_{\text{in}}/I_{\text{ut}}$ är ett mått på den totala absorptionen längs strålens hela väg. Om strålen passerar genom n stycken rutor med absorptionskoefficient $a_1, \dots, a_n$, där talet n är exempelvis 500, så kan man säga att vi härigenom har

mätt värdet av

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Vi har därmed fått ett känt samband mellan ett antal av alla de obekanta talen. Genom att genomlysa i samma riktning men med parallellförflyttat läge (se figuren) kan vi få ytterligare 500 samband. Lika många till kan vi få genom att genomlysa i den vinkelräta riktningen.



Poängen är nu att man kan mäta upp ytterligare samband mellan de obekanta storheterna genom att genomlysa området i fler riktningar, exempelvis parallellt med rutornas diagonaler. En liten komplikation blir då att det inte längre är så lätt att säga hur lång väg vår röntgenstråle passerar genom var och en av de små rutorna. Men detta går att ta hänsyn till; jag går inte in på dessa detaljer här. Det finns inte heller någon anledning att inskränka sig till rutnätets diagonalriktningar. För varje ny riktning som vi genomlyser området får vi ett stort antal nya linjära samband mellan de sökta talen. Sammanfattningsvis, om man genomlyser den tunna plana skivan i låt oss säga 500 olika riktningar och registrerar cirka 500 mätvärden för varje riktning, så får man totalt 250 000 mätvärden som vart och ett måste vara en vägd summa av ett stort antal av de okända talen; vikterna i summan kommer sig som sagt av att strålen i fråga har passerat olika långt genom de olika rutorna längs dess väg. Därmed kan problemet beskrivas som ett gigantiskt linjärt ekvationssystem med (minst) cirka 200 000 obekanta. Sådana har vi ju goda och välkända metoder för att lösa, och vi har utmärkta snabba datorer. Så problemet förefaller att vara löst, åtminstone i princip.

Emellertid vore ett sådant ekvationssystem på tok för stort även för dagens datorer, åtminstone för att behandlas med standardmetoder. Ty antalet operationer som krävs för att lösa ett linjärt ekvationssystem med vanlig Gausselimination är proportionellt mot kuben på antalet obekanta. Och $200\,000^3 = 8 \cdot 10^{15}$. Om datorn gör en miljard operationer i sekunden så skulle kalkylen alltså ta nästan 10^7 sekunder, det vill säga några månader!

Vi behöver därför en bättre matematisk analys av problemet. Det visar sig att det är bättre att formulera och analysera problemet i kontinuerliga termer. Vi frågar därför åter efter värdet av absorptionskoefficienten i *varje punkt* i den (tunna) plana skivan. Absorptionskoefficienten kan då betraktas som en *funktion* på skivan, det vill säga som en funktion på ett plant område. Om vi inför ett koordinatsystem i skivans plan, kan vi alltså betrakta den sökta funktionen som en funktion $f(x, y)$ av två variabler. Nästa steg är att uttrycka våra mätvärden i termer av denna funktion.

Antag att vi gör en mätning med hjälp av en röntgenstråle parallellt med x -axeln längs linjen $y = b$. Denna stråles dämpning längs hela sin väg utgörs av "summan" av all dämpning längs dess väg genom området, och det är lätt att se att i detta fall den totala dämpningen måste vara proportionell mot integralen

$$(2) \quad \int f(x, b) dx.$$

Observera att den ändliga summan (1) skulle kunna skrivas som $\sum_{i=1}^n f(x_i, b)$, där $a_i = f(x_i, b)$ är värdet av absorptionskoefficienten i punkten (x_i, b) , en punkt i den i :te rutan längs strålens väg. Om vi betecknar den i :te kvadratiske rutans sida med Δx_i , så är denna summa lika med en konstant gånger $\sum_{i=1}^n f(x_i, b) \Delta x_i$, ett uttryck som vi ju känner igen som ett närmevärde till integralen (2). Jag har inte satt ut några gränser, eftersom det kan underförstås att vi ska integrera över den mängd av x för vilka (x, y) ligger inom området, vilket vi kan anta är ett intervall. Alternativt kan vi definiera funktionen $f(x, y)$ som noll överallt utanför området och integrera från $-\infty$ till ∞ .

Uttrycket (2) brukar kallas för *linjeintegralen* eller *kurvintegralen* av funktionen f över den rätta linjen L , och betecknas

$$(3) \quad \int_L f ds,$$

där ds betecknar längdelementet längs linjen L och anger att integrationen sker med avseende på båglängden. Med hjälp av en parameterframställning av den rätta linjen kan man lätt definiera integralen (3) för vilken rät linje L som helst. Därmed har vi gjort oss oberoende av koordinatsystemet och kan nu beskriva de mätvärden som erhålls med vilken strålriktning som helst. Det matematiska problem som datortomografer måste lösa kan därmed, i sin kontinuerliga form, uttryckas på följande sätt:

En obekant funktion f är definierad på ett område i planet, exempelvis en cirkelskiva. Antag att man känner värdet av linjeintegralen $\int_L f ds$ för varje rät linje L genom området. Beräkna funktionen f .

I en berömd artikel från 1917 löstes detta problem av den österrikiske matematikern Johann Radon. I artikeln gavs en explicit formel för värdet av funktionen f i punkten (x, y) uttryckt i värdena av alla linjeintegralerna $\int_L f ds$. När Radon löste detta problem hade han givetvis ingen aning om att lösningen skulle få viktiga tekniska tillämpningar, utan han studerade problemet uteslutande därför att frågan var matematiskt intressant och visade sig ha en vacker lösning. Efter utvecklingen av datortomografi har Radons problem och många av dess varianter och generaliseringar studerats intensivt av matematiker, och avbildningen $L \mapsto \int_L f ds$ kallas numera för Radontransformen av funktionen f .

Med hjälp av Fouriertransformation är det ganska lätt att förklara lösningen till Radons problem. En sådan redogörelse kräver dock förklaring av ganska många begrepp och beteckningar, så den ska inte ges här.

Den stora framgången med datortomografi för medicinsk diagnostik har lett till att samma eller liknande mättekniker har utvecklats för många andra ändamål. Förutom röntgenstrålning används bland annat ultraljud, gammastrålning och elektronstrålar. Mätmetoder baserade på kärnspinnresonans (MRI, Magnetic Resonance Imaging) leder till liknande matematiska problem som datortomografi.

En av de tidigaste tillämpningarna av tomografiska metoder uppkom inom geologin. Genom att registrera tidsskillnaden mellan en jordbävning i en punkt A och den seismiska vågens ankomst till en annan punkt B för ett stort antal par av punkter A och B beräknar man utbredningshastigheten för seismiska vågor i olika punkter i jordens inre och drar därav slutsatser om den fysiska beskaffenheten hos jordklotets inre delar.

En snarlik teknik används för malm- och oljeprospektering. En explosion arrangeras vid jordytan, och tidpunkt och styrka hos reflexerna mäts med detektorer vid ett stort antal punkter på jordytan. Experimentet upprepas med ett antal andra lägen för explosionen. Med utgångspunkt från dessa mätdata försöker man beräkna beskaffenheten hos jordlagren under mätområdet.

Inom industrin används tomografiska metoder för produktkontroll och processkontroll.

Elektronmikroskopi kan framgångsrikt kombineras med tomografi genom att provet genomlyses med elektronstrålar i ett stort antal riktningar.

Många fler exempel skulle kunna ges. Området utvecklas mycket snabbt. Sökning med Google på "tomography" ger 17 miljoner träffar!

Litteratur

Wikipedia: "*Tomography*" (<http://en.wikipedia.org/wiki/Tomography>), eller "*Computed tomography*" (http://en.wikipedia.org/wiki/Computed_tomography).