

Dynamisk geometri med GeoneXt

Per-Eskil Persson är fil. lic. i matematik och lärande och är verksam vid Lärarutbildningen inom Malmö Högskola. Han har en mångårig erfarenhet som gymnasielärare och bedriver forskning kring algebralärande främst inom denna skolform.

Hjärnan ännu i mig vrides;. när jag tänker på Euklides; och på de triangelarna ABC och CDA. Svetten ur min panna gnides; värre än på Golgata. (Carl-Michael Bellman ,1740-1795)

Bakgrund

När realskolan och folkskolan på 1960-talet ersattes med grundskolan måste man revidera och förändra i kursplanerna. Den nya skolan skulle ju omfatta alla elever, både de som skulle gå vidare med teoretiska studier och de som skulle ut i arbetslivet direkt efter skolan. Också matematikämnet fick genomgå en djupare granskning för att ta bort moment som ansågs gamla och förlegade. Det var vidare nödvändigt att bereda plats för nya, moderna moment som sannolikhetslära och statistik, som inte tidigare ingått i ämnesplanerna.

Euklides geometri hade varit grunden för all geometriundervisning så länge sådan hade bedrivits. I skolan utförde man samma konstruktioner, använde samma definitioner och lärde sig samma bevis som i de ursprungliga böckerna i *Elementa*, som är skriven c:a 300 f.Kr. Alla skolgossar (vilket det nästan enbart var) måste äga minst två böcker, katekesen och Euklides. Man lärde sig geometri genom att lära sig satser och bevis utantill och att upprepa samma konstruktionsritningar som i *Elementa*. Skolgeometrin hade alltså inte förändrats på mer än 2000 år!

Elementa är ett unikt verk, som utgör själva urmodellen för hur en teori deduktivt byggs upp från axiom och postulat till satser och konstruktioner med hjälp av logisk bevisföring. Men bevisföringen sker retoriskt och i en viss följd, och att tvinga gossar att memorera ett stort antal sådana textföljder kunde ofta resultera i en sådan förtvivlan som Bellman gett uttryck för. Att med laborationer, utförda med dåtidens (och Euklides!) verktyg, undersöka geometriska samband och själv upptäcka satser och konstruktioner var naturligtvis möjligt. Men det ansågs vara slöseri med tid, eftersom dåtidens lärandeideal var att teoretiskt ta till sig vad andra redan upptäckt.

De nya läroplanerna innehöll inte någon euklidisk bevisföring, och satser med bevis kom över huvud taget att bli sällsynta. Konstruktionsritning, i den mån den fanns kvar, förvisades till bildämnet. Några satser, t.ex. vissa vinkelsatser, likformighetssatser och Pythagoras sats, relaterades men utan att eleverna skulle kunna bevisa dem. Betoningen inom geometrimomentet kom istället att ligga på mätningar och beräkningar av vinklar, omkrets, area, volym, etc. Numera finns i normalfallet väldigt lite av undersökande geometri i undervisningen. Elevers kunskaper bygger i stort sett på att man lärt sig vissa formler utantill, och det visar sig också ofta i att de har svårt att hålla isär begreppen. Många lärare kan vittna om hur elever ofta förväxlar omkrets med area, hur de har svårt att upptäcka likformighet med flera problem.

Hur ska man då komma tillrätta med dessa problem? Svaret är att elever måste få möjlighet att aktivt och laborativt bearbeta olika geometriska objekt, att få ställa hypoteser om lagar och samband, att få argumentera för att dessa är sanna och kanske även få göra enklare bevis (gärna grafiska!) för sambanden. Problemet är naturligtvis att få undervisningstiden att räcka till.

Dynamiska geometriprogram

När datorerna gjorde sitt intåg i skolan hyste man stora förhoppningar om att de skulle kunna förbättra matematikundervisningen. Men geometriprogrammen var oftast statiska och gav inte mycket extra hjälp, utom för ganska rutinmässigt lärande av samma typ som läroböckerna redan kunde ge. Man behövde något nytt, och 1988 kom den första versionen av Cabri Géomètre, ett dynamiskt geometriprogram. Arbetet initierades av matematikern och datavetaren Jean-Marie Laborde som ett öppet program för undersökande av geometriska objekt och deras samband (Cabri History, 2007).

Cabri har fått stort genomslag i matematikundervisningen i stora delar av Europa, och används i många länder redan från de lägre åldrarna i grundskolan. I vissa länder har staten köpt en landslicens för programvaran så att alla skolor fritt kan använda den. Hur får man då tiden? En forskare som undersökt detta är Assude (2005), som analyserar problemet och beskriver hur lärarna medvetet måste satsa av sitt *tidskapital* (tillgänglig undervisningstid) för att vinna *didaktisk tid* (tid då begreppsutveckling sker). Nödvändigt är då att förändra sin ”vanliga” geometriundervisning för att rätt kunna utnyttja de didaktiska vinsterna. Resultaten av forskningen visar att detta lönar sig!

Användningen av dynamiska geometriprogram som ett verktyg för lärande bygger på Vygotskijs teorier om artefakter och mediering. Programvaran fungerar som ett *instrument för semiotisk mediering* för att uppnå det Vygotskij benämner *internalisering* av kunskaper. Mariotti (2000) och även Falcade, Laborde & Mariotti (2007) har utförligt beskrivit hur dessa processer gynnas av användningen av Cabri. Väldigt mycket av den forskning som bedrivits kring denna typ av programvara handlar just om Cabri, vilket är förståeligt eftersom den var först. Men det finns också en del skrivet om Geometers's Scetchpad, som har skapats i USA och används i amerikanska skolor. Inga principiella skillnader finns emellertid i hur de båda programmen fungerar, och forskningen kring Cabri kan lätt generaliseras.

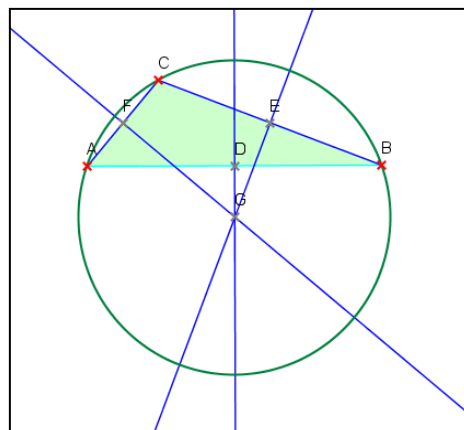
Cabri och Geometer's Scetchpad har haft tämligen litet genomslag i Sverige, och en av förklaringarna till detta är att de är kommersiella program som kostar en hel del att köpa in till en skola. Budgeten för matematikämnet är ofta snålt tilltagen och räcker ibland knappt till läroböcker. Även om läraren skulle vilja använda Cabri finns det inte någon ekonomisk möjlighet.

Vid universitetet i Bayreuth började en projektgrupp 1999 utveckla ”Geonet”, som innehöll dynamiska arbetsblad. År 2003 konstruerades efterföljaren GeoneXt med helt nya verktyg, liknande dem i Cabri, och sedan har utvecklingen fortsatt med förbättrade versioner. Förutsättningen var att GeoneXt skulle vara *freeware*, dvs. helt gratis att installera och använda på hur många datorer man vill (GeoneXt, 2007). Programmet finns i ett antal språkliga versioner, men tyvärr ännu inte på svenska. Men den engelska versionen går oftast bra att använda i svenska skolor.

Konstruktioner

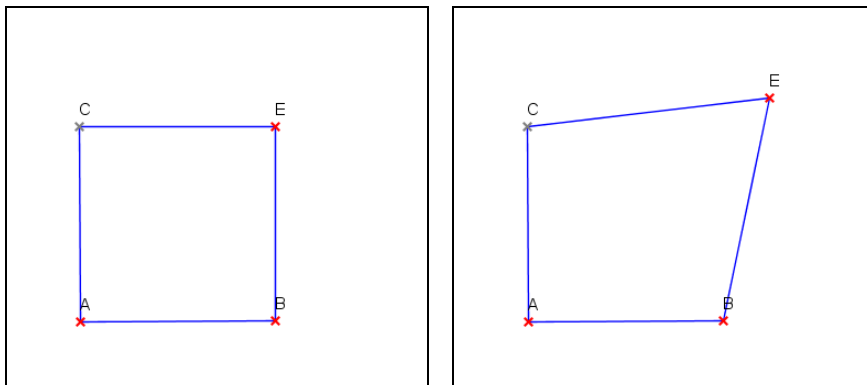
Vad är det då för typer av konstruktioner man kan göra med dynamiska geometriprogram? Ja, frågan ska kanske snarare vara vad man *inte* kan göra. De klassiska verktygen passare och linjal finns naturligtvis kvar i form av cirkel, linjer, sträckor etc. Men vissa rutinmässiga konstruktioner som exempelvis mittpunkt, normal och bisektris har givits egna kommandon. I figuren visas konstruktionen av den omskrivna cirkeln till en triangel.

För triangeln ABC har mittpunkterna på sidorna, D, E

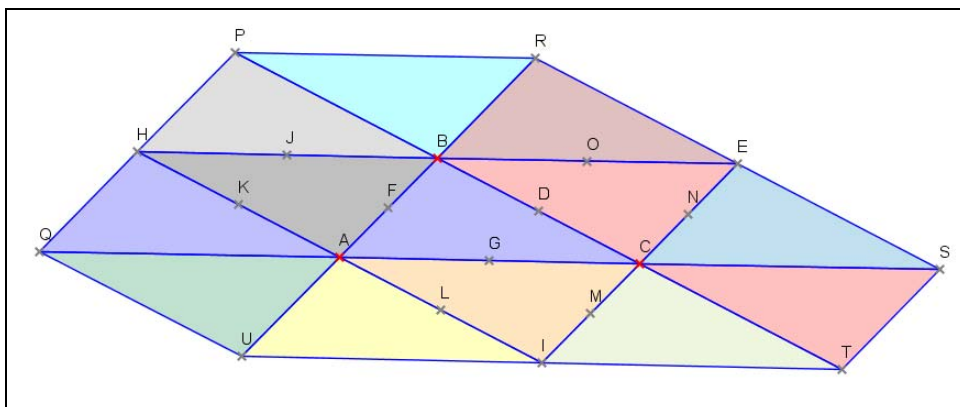


och F konstruerats med mittpunktsverktyget, därefter har normaler till sidorna uppritats med normalverktyget. Man upptäcker då att mittpunktsnormalerna skär varandra i en punkt, G. Om sedan en cirkel uppritats med G som mittpunkt och exempelvis GA som radie, kommer den också att gå genom B och C.

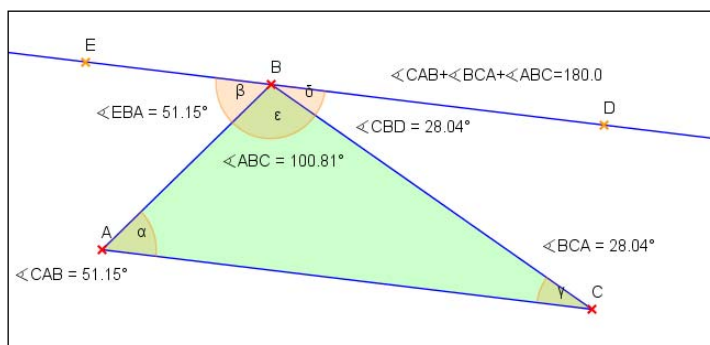
Men är det kanske en ren händelse, beroende på hur den första triangeln ritades? Det är här dynamiken kommer in. Genom att ”ta tag” i en av punkterna A, B eller C och dra kan vi förändra triangeln hur vi vill och se att konstruktionen är hållbar. Cirkeln går alltid genom punkterna hur vi än gör! Detta ”dragverktyg” är det som speciellt utmärker dynamiska geometriprogram (Mariotti, 2000). Och för att en konstruktion ska vara hållbar måste den klara ”drag-testet”. Kvadraten ABEC är inte hållbar i det följande när man drar i E:



Något som är tämligen besvärligt med passare och linjal är transformationer av olika slag: spegling i linje och i punkt samt parallellförflyttning. Dessa finns som enkla verktyg i GeoneXt, och man kan med dem undersöka symmetrier och göra tesseleringar. Så här kan en tesselering av kongruenta trianglar gestalta sig:

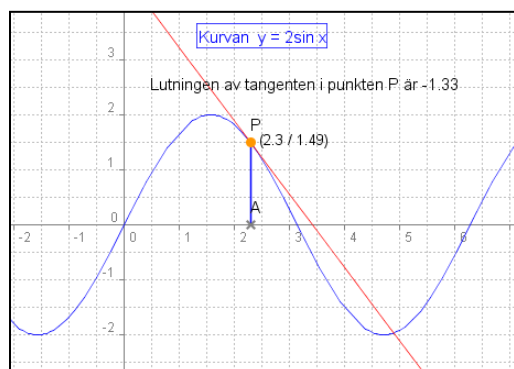


Naturligtvis kan man även göra mätningar i figuren av sträckor och vinklar, och med dessa kan man utföra beräkningar. Här är det möjligt för elever att upptäcka samband av olika slag, och också lägga grunden till mer eller mindre formella bevis. Bevisföring kan introduceras i grundskolan senare år och byggas vidare på i gymnasiets kurser. Mariotti (2000) och även Marrades & Gutiérrez (2000) har beskrivit hur 15-16-åringar i social interaktion ställer hypoteser, som de undersöker med Cabri och sedan konstruerar bevis. Sinclair (2003) visar hur 17-18-åringar arbetar med



förkonstruerat material med målet att eleverna ska förstå skillnaden mellan att ställa hypoteser, argumentera och bevisa.

Ovan visas en konstruktion för att upptäcka och bevisa lagen om triangelns vinkelsumma. Vinklarna α , β och γ markeras och mäts, och deras summa beräknas (uppe till höger). Det visar sig att summan blir 180° hur man än flyttar hörnen på triangeln. Därefter konstrueras linjen DE, som är parallell med sidan AB, och där uppträder vinklarna β och γ igen (som alternativvinklar)! Utifrån detta kan ett bevis fullbordas.



GeoneXt ger också möjlighet att arbeta med funktioner, och är på den punkten mycket mer användarvänlig än Cabri. Skillnaden mot t.ex. vanliga grafräknare är att man kan undersöka funktioner dynamiskt och även skapa animationer. Bredvid är ett exempel på en sinuskurva med tangent. En animering av punkten P gör att denna glider längs kurvan tillsammans med tangenten. Koordinaterna för P och tangentens lutning kan hela tiden avläsas och animeringen kan frysas i vilket läge som helst.

Undervisning

Det framkommer i alla de undersökningar jag hittills refererat till att framgång med att använda dynamiska geometriprogram helt är beroende på lärarens kunskaper och arbetssätt och på att hon/han aktivt arbetar med att knyta elevernas erfarenheter från skärmen till de matematiska begreppen och den formella matematikteorin. Annars riskeras man att GeoneXt-övningarna bara blir roliga aktiviteter som eleverna inte klarar att omsätta i matematiska kunskaper och färdigheter. Man måste också ompröva sitt sätt att presentera geometrin, kanske kasta om ordningen som nya begrepp införs i, etc. Det finns också goda introduktioner till hur man utvecklar ett geometritänkande utifrån undersökande aktiviteter, exempelvis Johnston-Wilder & Mason (2005).

Referenser

- Assude, T. (2005). Time Management in the Work Economy of a Class, a Case Study: Integration of Cabri in Primary School Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 59: 183-203.
- Cabri History (2007). Hämtad 2007-11-07 från <http://www.cabri.net/cabri2/historique-e.php>
- Falcade (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 317-333.
- GeoneXt (2007). Hämtad 2007-11-07 från <http://geonext.uni-bayreuth.de/>
- Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: Paul Chapman Publishing.
- Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44: 25-53.
- Marrades, R. & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs Produced by Secondary School Students Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44: 87-125.
- Sinclair, M.P (2000). Some Implications of the Results of a Case Study for the Design of Pre-constructed Dynamic Geometry Sketches and Accompanying Materials. *Educational Studies in Mathematics*, 53: 289-317.