

Den matematiska problemlösningens didaktik

Christer Bergsten är docent och universitetslektor i matematikdidaktik vid Linköpings universitet.

Inledning

Problemlösningens placering och status i skolmatematiken har varierat över tiden. I de svenska kursplanerna levde den länge ett ganska undanskymt liv för att få en central ställning som eget huvudmoment i matematikkursplanen i Lgr80 (Wyndhamn, 1997, s. 43), där man dessutom kan läsa att problemlösning ska ingå i alla andra huvudmoment (Skolöverstyrelsen, 1980, s. 99f). Även i den senaste läroplanen från 1994 har den en kärnfunktion men ses inte längre som ett "moment" utan ges ett mer övergripande syfte och funktion. Detta illustrerar den förskjutning i synen på problemlösning som skett i takt med den matematikdidaktiska utveckling som ägt rum på den internationella scenen. Under 1980-talet var mycket fokuserat på problemlösningen i sig som kognitiv och metakognitiv aktivitet med betoning på kunskaper, processer och uppfattningar (Schoenfeld, 1992). Med ökat inflytande från det sociokulturella perspektivet lyftes andra aspekter och syften fram, där situationella och diskursiva element analyserades (Ahlberg, 1992; Wyndhamn, 1993; Wyndhamn, Riesbeck & Schoultz, 2000; Björkqvist, 2001). De senaste årens ökade fokusering på meningsskapande samspel mellan olika semiotiska uttrycksformer i synen på lärande och kunnande i matematik (se t.ex. Radford, 2003) ger problemlösningen nya dimensioner som ännu inte avspeglats i en färdigutvecklad praktik. Detta gäller i viss mån även kompetensbegreppets framväxt inom matematikdidaktiken (Niss, 2004).

Klassificering av problem

Att försöka definiera en väl avgränsad och generellt accepterad innebörd i termen problemlösning är en lika omöjlig uppgift som att försöka definiera vad matematik är: "The question, what is problem solving, cannot have an unanimous answer; it depends too much on personal interests and philosophy." (Mamona-Downs & Downs, 2005, s. 385). Vad som skiljer ett problem i matematiken från en övning eller rutinuppgift brukar anges som att den/de som ger sig an att lösa uppgiften inte från början har/ser en redan färdig metod att använda (Christiansen & Walther, 1986; Björkqvist, 2001). Denna mycket generella beskrivning av vad som är ett matematiskt problem brukar även kopplas till en affektiv sida, dvs. en vilja att lösa problemet. Det ofta använda uttrycket *att hitta en lösning* antyder att någonstans bakom problemformuleringen finns det en lösningsmetod klar som det gäller att upptäcka, att hitta, vilket innebär att den egentligen redan fanns där. Detta är enligt min mening en missvisande metafor som döljer problemlösningens kreativa, skapande dimension. För den person/grupp för vilken uppgiften är ett problem existerar det per definition inte en metod som löser uppgiften, *att lösa är att skapa en metod*. Samtidigt kan uppgiften vara ett rutinproblem för en annan person/grupp, som alltså redan hade en lösning. I den meningen fanns redan en metod för att lösa uppgiften och för problemlösaren kan det då upplevas som att det gäller att upptäcka den, att hitta den, och att det är det som hela aktiviteten går ut på.

Problemlösning i någon form tycks finnas inneboende mer eller mindre i varje matematisk aktivitet. Kan man våga påstå att matematik *är* problemlösning: "är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna?" (Björkqvist, 2001, s. 116). Detta ligger också nära en tolkning av matematisk problemlösning som *matematisk modellering*.

En typ av kategorisering görs i Skovsmose (2000) där följande matris ger en översikt över de olika *lärandemiljöer* som olika typer av uppgifter bäddar för (se Figur 1).

	Övnings- paradigmet	Undersöknings- landskap
Kopplingar till ren matematik		
Kopplingar till en semi-verklighet		
Kopplingar till verkligheten		

Figur 1: Lärandemiljöer (efter Skovsmose, 2000, s. 8)

Med *undersökningslandskap* menar Skovsmose en miljö som stöder undersökande arbete, i motsats till övningar där kända matematiska samband och metoder tränas. Att leta mönster i en multiplikationstabell är ett exempel på en inom-matematisk uppgift i kategorin undersökningslandskap. Många textuppgifter i skolmatematiken är övningar med kopplingar till en semi-verklighet, dvs. man behöver inte befinna sig i den situationella verklighet som uppgiften handlar om för att kunna lösa den. Skovsmose ser övningsparadigmet som en definierande egenskap av traditionell skolmatematik men stöder "a mathematics education moving between the different milieus as presented in the matrix" (s. 15). Det handlar alltså om uppgiftens *problemtyp*, samt vilka typer av *svar* och *processer* som problemet kräver.

Ett kontextuellt problem kräver en modelleringsprocess för att kunna hanteras med matematiska metoder. En lösning av problemet kan ha konsekvenser för praktisk handling, till exempel ett val mellan två olika återbetalningsformer för ett lån. I en undervisningssituation däremot är kontextens syfte oftast att ge en mening åt den matematik som studeras och därmed öka motivationen och intresset för studierna. Ett inommatematiskt problem både startar och slutar innanför matematiken som egen vetenskaplig disciplin, vilket dock inte utesluter dess motivationsskapande potential eller i förlängningen utesluter koppling till en kontext eller praktisk handling. I själva lösningsprocessen av ett inommatematiskt problem kan dock en kontextuell koppling skapas av problemlösaren, till exempel via metaforiskt tänkande, för att initiera idéer till lösningsmetoder.

Huruvida ett svar på uppgiften/problemet är givet från början eller inte kan vara avgörande för hur problemet angrips. Ur didaktisk synpunkt har ett öppet problem större lärandepotential än ett slutet då den inbjuder till en variation som bygger på och utvecklar begreppsligt tänkande. Ett öppet problem stimulerar ofta i högre grad ett undersökande arbetssätt i en mer levande och aktiv lärandemiljö. Vad som brukar kallas *rika uppgifter* (Björkqvist, 1998) eller *rika problem* (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005) kan ses som en typ av öppna problem då de har en potential att leda vidare utöver problemformuleringen.

En dimension som inte låter sig enkelt beskrivas men som avsevärt påverkar vad som händer under en problemlösningsaktivitet är problemets *svårighetsgrad*. Detta är naturligtvis precis som problem ett individrelaterat begrepp men kan ändå beskrivas med hjälp av analytiska termer som *komplexitet* och *djup*: ett både djupt och komplext problem kan bli genuint svårt.

Den typ av svar som förväntas på ett matematiskt problem kan också på ytan se mycket olika ut och påverka hur man angriper problemet. Jag kan här identifiera tre huvudkategorier, produktion, konstruktion och beskrivning. Den vanligaste svarstypen, särskilt i skolmate-

matik, är en *produktion*, där problemlösaren oftast ska producera en efterfrågad storhet, som en kvantitet eller ett algebraiskt uttryck. En *konstruktion* innebär att ta fram och beskriva en matematisk procedur. Det kan handla om en geometrisk konstruktion. En *beskrivning* behövs ofta i samband med öppna problemtyper, där olika svarsalternativ anges.

Då det i problemlösningens natur ligger att en bestämd lösningsmetod inte på förhand är given, innebär det att problemlösaren inleder och genomgår en process under arbetet med problemet. Beroende på problemets karaktär, bestämd bland annat genom de olika kategorier som beskrivits ovan, kan man skilja mellan en process som är pre-analytisk respektive post-analytisk. Ett *pre-analytiskt* angreppssätt innebär att man utgår från problemformulering och givna förutsättningar, söker identifiera en process som kan leda fram till en lösning, eller åtminstone en bit på vägen, och sedan arbeta sig fram mot en lösning. Det kan då finnas ett visst mått av osäkerhet då man ofta inte vet riktigt var man kommer att befinna sig i lösningsprocessen efter en tid. Vid ett *post-analytiskt* angreppssätt utgår man istället från den (potentiella) kunskap man skulle haft om problemet redan varit löst. Man söker på detta sätt följa lösningen "baklänges" tills man hittar en situation man kan klara av att skapa utifrån de förutsättningar som var givna. Modellen för denna problemlösningsprocess gavs redan av Pappus. Problemet med pre-analysen är att den ofta är svår att genomföra. Det är då man får ta till olika problemlösningsstrategier för att komma vidare (se t.ex. Björkqvist, 2001). Då en post-analys är möjlig att genomföra har man en större grad av kontroll över processen.

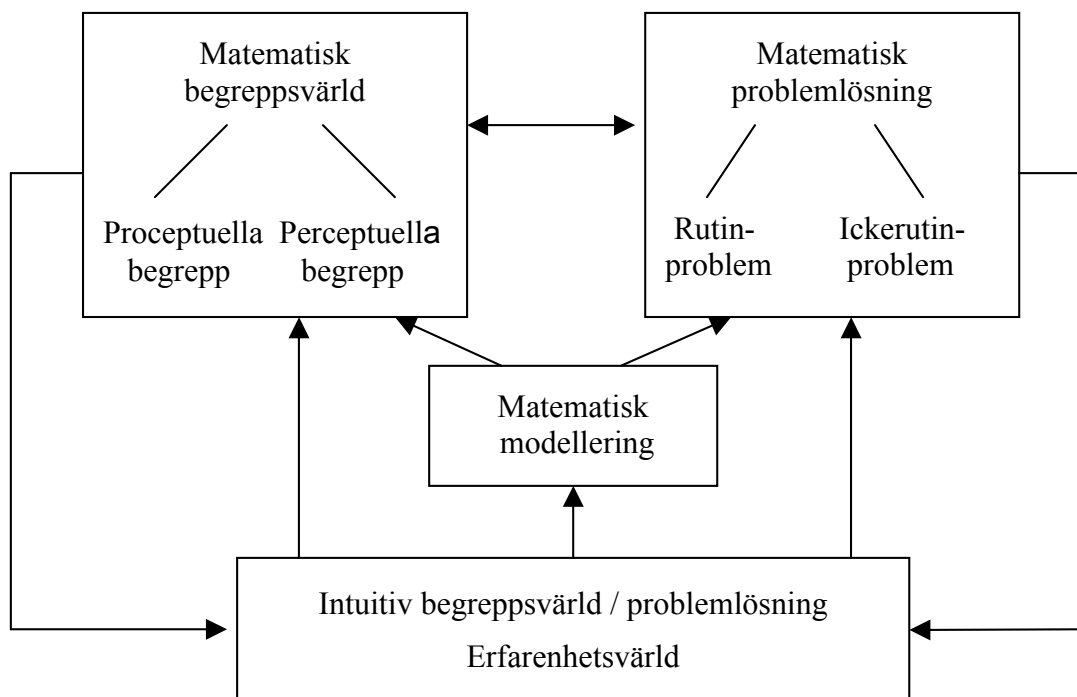
Undervisning och problemlösning

Arbete med problemlösning kan bidra till kunskapsbildning både inom disciplinen matematik, dvs. *utveckling av matematik*, och inom individen som *lärande i matematik*, *metakognitiv utveckling* och *utveckling av uppfattningar och attityder*. Att matematikens nya resultat erövrats genom problemlösning kan låta som en självklarhet och är det säkert också men det tål att påpekas i ett undervisningssammanhang. Denna nyckelaspekt av problemlösningens funktion tappas ofta bort vid diskussioner om problemlösningens plats och didaktiska hantering i klassrummet.

Problemlösningens roll i den grundläggande matematikutbildningen har betonats olika under olika perioder. En distinktion som vunnit genomslagskraft är den mellan att undervisa *för*, *om* eller *via* problemlösning (Schroeder & Lester, 1989). Genom det starka inflytandet av ett konstruktivistiskt och sociokulturellt synsätt på dagens matematikutbildning har matematikundervisning via problemlösning fått en stark ställning. I dagens undervisningspraktik lever dessa aspekter av problemlösning sida vid sida, även om lärares uttalade didaktiska medvetenhet om problemlösningens roll ibland visar sig vara mer en retorik än en praktik (Wyndhamn et al., 2000). En orsak till detta kan vara att den didaktiska transpositionen skapat en skolmatematik där problemlösningen tappat sin ursprungliga funktion, nämligen den att lösa problem. I skolan löser eleverna problemen av andra skäl, för att träna problemlösning, för att via problemlösningen lära sig matematik, att få matematiken att kännas meningsfull eller användbar, eller kanske bara för att läraren vill skapa variation på matematiklektionen. Att problemlösningen behöver sin egen didaktik är då framtvingat av den institutionella skolformen. En konsekvens av detta är att bygga upp en matematikundervisning där problemlösningens ursprungliga funktion återskapas som en matematisk praktik inom den institution som klassen utgör (Chevallard, 2002). Ett sätt att analysera och konkret utveckla sådant arbete utgår från begreppet *didaktisk situation* och de fyra arbetsfaserna *handling*, *formulering*, *validering* och *institutionalisering* (Brousseau, 1997).

En didaktisk modell

I figur 2 presenteras ett försök att placera in problemlösning (i vid mening) i en allmän epistemologisk modell för en matematisk praktik där lärande kan vara ett objekt (mål) för verksamheten.



Figur 2: Epistemologisk modell för matematisk praktik.

Den erfarenhet och begrepps- och tankevärld man som individ äger lägger i varje situation man ställs inför en grund för hur man uppfattar situationen och agerar för att hantera den. Man kan kalla detta en intuitiv (eller idiosynkratisk) handlingsgrund. Att befinna sig i en undervisningssituation i matematik utgör inget undantag härvidlag men situationen och de uppgifter man ställs inför ger här ett specifikt fokus på matematikens två huvudinnehåll, dvs. dess begrepp och dess metoder för problemlösning. Med verkliga eller semi-verkliga problem för handen når man dit först efter en modelleringsprocess. Dessa ”delar” av den matematiska praktiken existerar samtidigt och återverkar på varandra och skapar en loop för matematiklärandets utveckling, hela tiden med sin grund i den undre boxen i schemat i Figur 2. Vad som är möjligt vid den matematiska problemlösningen styrs av det komplexa samspelet mellan sådana typer av didaktiska faktorer och kategorier som diskuterats ovan men även av inflytandet från kraften i de andra boxarna i Figur 2. Enligt Tall (2004) byggs matematiken upp av två skilda världar, den ena med sin genes i perceptionen (modellerad genom geometrin: perceptuella begrepp) och den andra handlingsgrundad (modellerad genom aritmetik och algebra: proceptuella begrepp). Med den teoretiska överbyggnaden för dessa som grund (jfr. begreppet matematisk organisation ovan) kan en tredje matematisk värld skapas genom teoretiskt tänkande, dvs. den rent axiomatiska matematiken.

Modellen i Figur 2 försöker beskriva huvuddelarna och dynamiken i en matematisk praktik, som också kan ligga till grund för en didaktisk praktik, som genererar lärande i matematik men också matematiskt vetande (jfr. avsnittet ’kunskapsbildning’ ovan). Det är matematikdidaktikens uppgift att skapa förutsättningar för att utveckla didaktiska organisationer som placerar in problemlösningen på ett konstruktivt sätt i detta komplex.

Litteratur

- Ahlberg, A. (1992). Att möta matematiska problem. En belysning av barns lärande. *Göteborg Studies in Educational Sciences* 87. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Björkqvist, O. (1998). Matematiskt rika uppgifter för högstadiet och gymnasiet. *Studie- och undervisningsmaterial från Pedagogiska fakulteten vid Åbo Akademi, nr 22*. Institutionen för lärarutbildning, Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Vasa.
- Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I B. Grevholm (red.), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser de l'étude. 1. Structures et fonctions. In Dorier, J-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. & Floris, R. (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Corps (Isère) – du 21 au 30 août 2001. La Pensée Sauvage Edition.
- Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A.G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: Reidel.
- Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.
- Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 385-401.
- Niss, M. (2004). The Danish "KOM" project and possible consequences for teacher education. In R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm & O. Helenius (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-190). Göteborg: The Royal Swedish Academy of Sciences.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning* 5(1), 37-70.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.
- Schroeder, T.L. & Lester, Jr. F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem-solving. In *New directions for elementary school mathematics*, 1989 Yearbook, NCTM (pp. 31-42). Reston, VA: The Council.
- Skolöverstyrelsen (1980). *Lgr 80. Läroplan för grundskolan, allmän del*. Stockholm: Skolöverstyrelsen och Liber Utbildningsförlaget.
- Skovsmose, O. (2000). Landscapes of investigation. Centre for Research in Learning Mathematics, Roskilde University.
- Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. Johnsen Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, pp.281-288. Bergen University College, Norway.
- Wyndhamn, J. (1993). Problem-solving revisited. On school mathematics as a situated practice. *Linköpings Studies in Arts and Science* 98, Linköping University.
- Wyndhamn, J. (1997). Från räkning till matematik. Om matematik och matematikämnet I de senaste läroplanerna. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.
- Wyndhamn, J, Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). Problemlösning som metafor och praktik. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.