

Hur kommer det sig att fyra delat med ett blir fyra...? ...om man delar fyra en gång måste det väl bli två?

Stina Hallén

Lärare i matematik på Mörbyskolan (7-9-skola) i Danderyd samt projektassistent för ämnesprovet i matematik för årskurs 9 på PRIM-gruppen, Lärarhögskolan i Stockholm.

Bakgrund

I mitt arbete som matematiklärare på högstadiet upplever jag att ett av de stora problem eleverna har i matematik är förståelse för divisionsbegreppet. Jag hade en elev en gång som när hon gick i åttan stannade kvar och frågade mig en sak som hon hade funderat på. ”Hur kommer det sig att fyra delat med ett blir fyra? Om man delar fyra en gång borde det väl bli två?”

Det här var en mycket duktig elev och hon hade inga svårigheter med att tillgodogöra sig undervisningen eller klara proven. Trots det var det uppenbart att hon inte hade tillägnat sig ett viktigt begrepp. Jag har sedan alltmer fått upp ögonen för att elever ofta inte har tillägnat sig divisionsbegreppet.

Divisionsbegreppet

I ”Den grundläggande matematikundervisningen” (Frits Wigforss 1955) kan man läsa om hur det borde undervisas om divisionsbegreppet. I boken utfärdas också en varning:

”Den viktigaste anmärkningen om räknesättens innebörd hänför sig till divisionen. Mycken oklarhet i räkneundervisningen uppkommer, om ej de två väsentligt skilda tankegångar uppmärksammas, som ligger bakom detta räknesätt.”

Med de två väsentligt skilda tankegångarna menar Wigforss delningsdivision och innehållsdivision. Han menar att dessa tankegångar bör hållas ”lika strängt isär som de andra räknesätten”.

Fram till början på 1960-talet, då division var uppdelad i delningsdivision och innehållsdivision, fanns det alltså 5 räknesätt i Sverige. De två olika divisionssätten hade också olika beteckningar.

För att förstå skillnaden mellan de två tankegångarna vid division kan man studera följande exempel som är hämtade ur Wigforss bok.

Exempel på delningsdivision (betecknades med bråkstreck, /)

Tio pojkar skulle dela lika på ett 60 dm långt snöre. Hur lång bit kunde de få vardera?

Exempel på innehållsdivision (betecknades med kolon, :)

Några pojkar delade lika mellan sig ett 60 dm långt snöre, så att var och en fick 10 dm. Till hur många räckte snöret?

Båda exemplen ska lösas med divisionen $60/10$ men tankegångarna är olika. En elev som i det andra exemplet tänker sig en uppdelning i 10 förstår inte hur uppgiften ska lösas. Där

måste man tänka hur många gånger 10 får plats i 60. Svaren blir ju 6 i båda fallen men enheterna olika. I första exemplet efterfrågas antalet bitar och i andra antalet pojkar. Om man skulle skriva "enheter" i beräkningarna skulle det se ut som följer:

Delningsdivision

$60 \text{ dm} / 10 \text{ pojkar} = 6 \text{ dm} / \text{pojke}$

Innehållsdivision

$60 \text{ dm} : 10 \text{ dm} = 6 \text{ st}$

Vid innehållsdivision har täljare och nämnare samma enhet och svaret blir ett antal, medan svaret vid delningsdivision är på formen "per styck". Varför försvann då denna strikta uppdelning i två olika räknesätt med två olika sätt att beteckna tankegången? I "Tidskrift för skolmatematik" (nr 1, september 1955) finner man en artikel av lektor Edvin Ferner. Artikeln heter "Innehållsdivision och delberäkning – en kritisk analys". Det fanns på den här tiden olika uppfattningar om hur man skulle undervisa om division. Det fanns de som menade att det var bra att strikt särskilja de båda tankegångarna, men det fanns också de som menade att de tankegångar som krävs för att tudela divisionen var för komplicerade för barn under andra och tredje skolåret. Ferner anslöt sig till den senare uppfattningen och presenterar i artikeln sina argument för att slå ihop delberäkning och innehållsdivision till ett räknesätt, division. Ferner skriver:

"Begreppen innehållsdivision och delberäkning är ju mer än sekelgamla. Det som tillkommit är endast att man strängare än förr, nästan rigoröst, skiljer de båda divisionssätten åt. Man faktiskt klyver ett räknesätt i två och på så sätt skapar en splittrande mångfald i stället för att söka nå det, som är värdefullt i all undervisning: överskådlig enhet och sammanhang!"

Det var alltså en debatt på den här tiden som ledde till att de två divisionsätten slogs ihop till ett räknesätt. I modernare litteratur "Baskunskaper i matematik" (Löwing, Kilborn 2002) kan man läsa om betydelsen av att elever har tillgång till båda tankestrategierna för division. De skriver till exempel att det 1998 bara var 26 % av eleverna i en undersökning som klarade av att formulera en räknehändelse till beräkningen $14/0,5$. Detta troligtvis för att eleverna inte behärskar ett innehållsdivisionstänkande. Att elever inte behärskar innehållsdivisionstänkande leder också till svårigheter med uppgifter av typen $800/400$ eftersom det blir svårt att tänka sig detta som en delningsdivision. De skriver också att många människor intuitivt använder båda tankeformerna men

"Det är lärarens uppgift att bygga upp ett språk för dessa tankeformer och se till att de hos eleverna förädlas till att bli användbara verktyg, t ex vid huvudräkning och vid bråk och decimaltal."

Undersökning

För att undersöka vilka kunskaper elever i årskurs 7 har om division har jag konstruerat uppgifter som handlar om delningsdivision och innehållsdivision och bett dem beskriva hur de tänker när de löser dem. Ett exempel på en uppgift är följande:

Du har 15 kronor som du ska köpa tuggummi för. Varje tuggummi kostar 1,25 kr. Hur många tuggummin kan du köpa?

Elevlösning:

$$1,25 \cdot 10 = 12,5$$

$$15 - 12,5 = 2,5$$

$$1,25 \cdot 2 = 2,5$$

Svar: 12 st

Eleven hade tillgång till miniräknare men valde ändå detta sätt att lösa uppgiften. En metod där multiplikation används och det blir flera beräkningssteg istället för att beräkna antalet tuggummin i en enda beräkning med division. Samma elev lyckades konstruera en räknehändelse till $32/4$ som var relevant men misslyckades med $12/0,4$. Slutsatsen blir att denna elev har tillägnat sig tankegångarna för delningsdivision men inte för innehållsdivision.

Diskussion

Eleverna är oftast väl förtrogna med tänkandet vid delningsdivision men alla har inte tillgång till tankestrategier för innehållsdivision. Frits Wigforss menar att det är av stor vikt att man skiljer på de olika sätten att tänka när man undervisar om division. Eleverna måste få tillgång till båda tankesätten. Han menar dessutom att man bör börja undervisningen om division med innehållsdivision. Eleverna behöver inte känna till de båda begreppen innehållsdivision och delningsdivision men det är viktigt att läraren inser att division kan betraktas på dessa båda sätt.

Referenser

Kilborn, Löwing, Baskunskaper i matematik

Frits Wigforss, Den grundläggande matematikundervisningen