616

Talföljder på laborativt vis

Vikt papper

Vik ett A-4 ark mitt itu så att du får två stycken A-5 ark. Vik det en gång till på samma sätt. Hur stora och hur många är dina ark? Vad händer om du fortsätter?

Vi konstruerar en tabell:

vikningar	ark
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

Hur kan man beskriva samband mellan antal vikningar och antal erhållna ark? Talen i högra kolumnen kan fås genom successiva multiplikationer med 2 exempelvis $8 = 2 \times 2 \times 2$. Om vi förflyttar oss längre ner i tabellen kommer det kännas onödigt att skriva om samma faktor flera gånger. Vi inför ett annat skrivsätt $2 \times 2 \times 2 = 2^3$. Tal skrivna på det sättet kallas potenser. I vårt fall har vi tredje tvåpotensen. Tredje tvåpotensen har 2 som bas och 3 som exponent. Men hur mycket är 2^0 eller 2^{-1}? 2^0 kan tolkas som om vi inte viker vårt papper alls och då har vi ett ark d v s $2^0 = 1$. Enligt samma resonemang betyder 2^{-1} att vi går ett steg bakåt till A-3 och ser att A-4 utgör hälften av A-3 d v s $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Vändning av tal

Ta ett A-4 ark och klipp den itu så att du får två stycken A-5 ark. Fortsätt på samma sätt med de erhållna A-5 arken så att du får A-6 ark. Du skall hålla på tills du har fått trettiotvå ark (Vilken betecknig har dessa storlekar?). Numrera dessa med tal från 1 till 32 och lägg dem i ordning. Vänd $\boxed{2}$ upp och ner och därefter vartannat tal d v s $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ o s v. När alla jämna talen är vända startar du med att vända $\boxed{3}$ och därefter vart tredje tal. På det sättet kommer $\boxed{6}$ åter att synas och $\boxed{9}$ blir upp och ner vänt. När hela raden är åtgärdad börjar du med $\boxed{4}$, sedan med $\boxed{5}$ o s v på ett analogt sätt.

När hela processen är avslutat bör fem tal synas. Vilket tal skulle uppdagas näst om du hade fler lappar? För att besvara frågan bör du se någon sorts mönster. De talen som syns är 1, 4, 9, 16 och 25. Vilket samband råder mellan dessa? Försök besvara frågan innan du fortsätter.

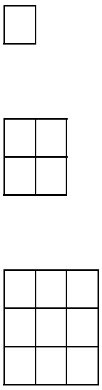
Antagligen har du lagt märke till att differenser mellan två närliggande tal ändras på ett regelbundet sätt. Differensen mellan de två första talen är 3. Mellan tredje och andra talet är differensen 5. Vid nästa tillfälle är den 7 och därefter 9. Då kan man förmoda att nästa gång blir den 11. Detta ger oss som resultat att om vi hade fler kort så skulle korten med nummer 36, 49 64 o s v vara synliga. Man kan ställa sig frågan: Vad står det på det sjuttionde synliga kortet? Frågan kan besvaras genom att du genomför successiva ökningar av differenser. Att du måste gå genom samtliga stegen för att få slutresultat heter rekursivt förfarande. Det är inte så praktiskt. Dels tar det mycken tid och dessutom är risken för felräkning uppenbar ty man lätt kan komma av sig. Vi måste se oss om någon förbättring. Vi tittar på våra synliga tal: 1, 4, 9, 16, 25, 36 och numrerar deras platser. Talet 9 ligger på tredje platsen och talet 16 på fjärde. Finns det något samband mellan talet och dess platsnummer?

Det hela blir lättare att se om vi upprättar en tabell:

nummer	I	II	III	IV	V	VI	…	LXX
tal	1	4	9	16	25	36	…	?

Vi ser att om vi multiplicerar platsens nummer med sig självt får vi det sökta talet: $3 \times 3 = 9, 4 \times 4 = 16, 5 \times 5 = 25$. Det sjuttionde synliga talet är alltså $70 \times 70 = 4900$. Vi kan ställa en fråga av mera allmän karaktär: Vilket är det *n*:te synliga talet? Svaret är uppenbart $n \times n$ eller kortare n^2. Därmed tar vi ett försiktigt kliv in i algebrans värld.

Talen 1, 4, 9, 16, 25, 36 o s v är lite speciella. De kan åskådliggöras genom följande mönster:



Dessa tal kallas föga förvånande kvadrattal. Minns du att de kan skapas genom addition av konsekutiva udda tal med start från 1:

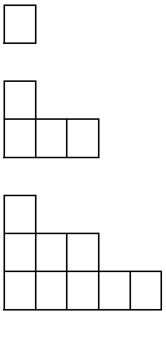
$1 = 1$

$4 = 1 + 3$

$9 = 1 + 3 + 5$

$16 = 1 + 3 + 5 + 7$

Bildmässigt ser det ut som nedan:



Förklaringen kan lätt åskådliggöras med följande bild

!

!	”
”	”

!	”	#
”	”	#
#	#	#

Nu skall vi ta reda på anledningen till varför just kvadrattalen blir synliga medan alla andra hamnar upp och ner. Vi får starta med ett par representanter ur vardera gruppen och försöka konstatera när de vänds. Vi kan välja 25 och 36 ur kvadrattalsgruppen och 15 och 18 ur den andra gruppen. Talet 18 vänds på 2, 3, 6, 9 och 18 och det skriver vi kort 18(2, 3, 6, 9, 18). Motsvarande för de andra talen ser ut 15(3, 5, 15), 25(5, 25) och 36(2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36). Vad tror du att det skiljer dessa grupper åt? När du har ställt en hypotes befäst dess styrka med några exempel till. Fundera därefter orsaken till det uppkomna fenomenet.

Du har säkert kommit fram till att kvadrattalen vänts jämnt antal gånger medan de övriga udda antal gånger. Vad kan orsaken vara till det? Talen vänds endast på sina delare. Vi skriver då ett tal ur var sin grupp uppdelat i två faktorer på alla möjliga sätt:

$$18 = 1 \times 18$$

$$18 = 2 \times 9$$

$$18 = 3 \times 6$$

och

$$36 = 1 \times 36$$

$$36 = 2 \times 18$$

$$36 = 3 \times 12$$

$$36 = 4 \times 9$$

$$36 = 6 \times 6$$

Här ser vi att kvadrattal alltid har en faktor som har sig själv som motfaktor. Man vänder ju enbart på en av dem.

Sociala relationer

Det är ganska vanligt idag, i synnerhet bland flickor, att de kramar varandra då de träffas. För matematikvidkommande kan det nyuppkomna beteende vara en källa till intressanta iakttagelser. Varför inte ställa frågan till klassen ”Hur många kramar blir det om klassens alla flickor har vänskapliga förbindelser med varandra?”. Efter att ha låtit eleverna fundera ett slag kan man dramatisera en del av händelsen genom att låta en person komma fram. Varje gång nästa person uppenbarar sig i klassens framända utförs den begärda ceremonin med alla där redan befintliga elever. På grund av det vanligtvis stora antalet elever i en klass kan frågans till synes specifika karaktär leda till mer generella resultat. Dessa skäl är tillräckliga för att man skall skapa en tabell och försöka se mönster.

Antal flickor	**Antal kramar**
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55

Varje tal i den högra kolumnen är summa av konsekutiva (på varandra följande) naturliga tal där 1 ingår ex $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Man kan lägga mönster av dessa tal och det nämnda talet skulle få följande representation

O
O O
O O O
O O O O

Detta är anledningen till att följden av dessa tal kallas triangeltal. Skulle vi vilja veta antal kramar i en grupp låt oss säga tvåhundra personer då vore det ytterst opraktiskt att fortsätta med successiva additioner. Det rekursiva sättet bör ersättas med en formel som bygger på vänstra kolumnens ingångsvärden och det är inte alltför ovanligt att elever med samlade krafter kommer fram till den. Den geniala idé som Gauss fick i tioårsåldern, kan öka självtilliten hos de flesta elever, om de blir upplysta om sin bedrift.

Hur som helst resulterar ansträngningarna i följande formel där *n* står för antal personer och *t* för antal kramar:

$$t = \frac{n(n-1)}{2}$$

Den formeln kan med fördel användas för att ta reda hur många kramar skulle det bli om klassens killar hade utsatts för samma övning. Pojkar är i regel mindre villiga att träda fram och helt omöjliga att ta kroppskontakt som är förutsättningen i övningen. Dessutom skulle aktiviteten upplevas som meningslös.

Frågan ”Hur många handskakningar blir det om alla pojkar skakar hand med alla flickor?” (Varken flickor eller pojkar skall hälsa på varandra sinsemellan den här gången) kommer säkert att uppfattas som förvånande trivialt. Det bör inte hindra läraren från dramatisering av förloppet genom att låta låt oss säga fyra flickor och tre pojkar utföra uppgiften för att stärka medvetandet kring multiplikationens struktur. Här kommer man till slutsatsen att antal handskakningar är produkt mellan antal flickor och antal pojkar.

De bägge övningarna kan samköras om man vill framhäva matematikens rika natur. Man kan ställa frågan ”Vilka blir det flest - kramar eller handskakningar i klassen under förutsättning att två individer av samma kön kramar varandra och av olika kön skakar hand med varandra?”.

Resultatet kan uppenbart variera här och beror på klassens sammansättning. Man kan säkert ställa hypoteser för att vid senare tillfälle undersöka dem. Det som leder till något mera kontrollerbar resultat är frågan om det kan finnas tillfällen då antal kramar och handskakningar är samma. Undersöker man det osystematiskt kan mödan orsaka frustration på grund att man lätt tappar kontrollen. Blicka istället tillbaka på vår tabell. Det gäller att hitta två rader där produkten av vänstra kolumnens tal är lika med summan av högra. Raderna (3,3) och (6,15) uppfyller villkoret. Även raderna (6,15) och (10,45) gör likadant. Tittar man på vad som är specifikt för tal i vänstra kolumnen upptäcker man förhoppningsvis att dessa i sig är triangeltal och dessutom att det krävs två konsekutiva sådana. Kontrollera gärna med fler exempel. För en matematiker gäller det att hitta en förklaring och förklaringens dignitet kan variera beroende på hur konkret eller korrekt situationen kräver att man är. Jag tror att de flesta lärare är eniga om att en konkret bild är mera övertygande än algebraiska manipulationer och kan ses som förberedelse inför de senare.

Vårt problem med andra ord blir att hitta förklaring till varför $6 \times 10 = 15 + 45$. Gör vi en representation av ingående tal får vi:

```
                          O
                          O O
O                         O O O
O O                       O O O O
O O O                 och O O O O O
O O O O                   O O O O O O
O O O O O                 O O O O O O O
                          O O O O O O O O
                          O O O O O O O O O
```

är lika mycket som

```
O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O
```

Innehållet i rektangeln grupperas om på följande sätt

	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O		O	O	O	O	O	O	O	O	O
O	O		O	O	O	O	O	O	O	O
O	O	O		O	O	O	O	O	O	O
O	O	O	O		O	O	O	O	O	O
O	O	O	O	O		O	O	O	O	O

Gruppen längst till höger är ju ett triangeltal i sig och kan omformas

	O	O	O	O	O	O	O	O	O
O		O	O	O	O	O	O	O	O
O	O		O	O	O	O	O	O	O
O	O	O		O	O	O	O	O	O
O	O	O	O		O	O	O	O	O
O	O	O	O	O		O	O	O	O
							O	O	O
								O	O
									O