

Hur kan minus minus bli plus?

Cecilia Kilhamn är lärare i matematikdidaktik vid Göteborgs Universitet och håller på med ett avhandlingsarbete om förståelse av negativa tal.

Naturliga och onaturliga tal

De positiva heltalen kallas för de naturliga talen, och i motsats till dem kan man beskriva de negativa talen som onaturliga. Ur matematikhistoriskt perspektiv tog det mycket lång tid för de negativa talen att accepteras som tal med samma status som de positiva heltalen. Även om det finns tidiga exempel på tal av motsatt kvalitet (exempelvis utgift i motsats till inkomst) så tog det till mitten av 1600-talet innan dessa tal erkändes som väldefinierade matematiska objekt. Ur ett historiskt perspektiv är det kanske inte så konstigt att våra elever i sitt första möte med negativa tal får samma känslor inför dem som 15- och 1600-talets stora matematiker som kallade dem "fiktiva", "defekta", "falska" och "absurda". Frågan är om vi tar elevernas känslor inför talen på allvar och ger utrymme för funderingar kring talens egenskaper eller om vi presenterar de negativa talen som om de också vore helt naturliga. Jag kommer här att presentera en del resultat från studier rörande negativa tal och diskutera undervisning i relation till dessa resultat.

Taluppfattning i skolår 6

I Sverige kommer de negativa talen som formella matematiska objekt att kalkylera med vanligtvis in i undervisningen först i årskurs 8. Internationellt sett är detta väldigt sent. I en intervjustudie med elever i slutet av årskurs 6 fick eleverna svara på frågan: "Vilket är det minsta talet som finns?". Ett av de vanligaste svaren var *"noll komma noll och så en massa nollor och sen en etta"* (0,000...1). Ett tal för dessa elever är alltså fortfarande något substantiellt, "mer än ingenting". Vissa funderar vidare och säger "noll" men tillägger att *"det är ju egentligen inget tal"*, *"det räknas inte"*, *"det är ju inget värt"*. Några elever anser att det minsta talet är 1, några säger att det är 0, och några enstaka säger att det är *"ett stort minustal"*.

Talens inbördes storlek är en aspekt av taluppfattningen där vårt språkbruk är lite konfliktfyllt. Dels säger vi att (-4) är mindre än (-2) , och dels säger vi att (-4) är ett större negativt tal än (-2) . Formellt matematiskt är det första korrekt ($-4 < -2$), men i de flesta konkretiseringsmodeller av negativa tal används det andra. 4 kronor är en större skuld än 2 kronor. -4°C är mer minus än -2°C , osv. De elever som har en tydlig bild av tallinjen i sin mentala verktygslåda klarar ganska bra att storleksordna även negativa tal så länge de bara jämför de negativa talen med andra negativa tal. När eleverna i intervjun ombads storleksordna talen (-2) och 1 blev det svårare. De elever som sa att (-2) var större än 1 motiverade det med att *"1 är närmare 0"*, *"2 är mer än 1"* eller att (-2) inte betyder någonting för det måste stå något framför minustecknet.

En annan aspekt av förståelsen av negativa tal är förståelse av subtraktion. Ställda inför frågan om $5 - 4 = 4 - 5$ är sant eller inte svarade många av eleverna i intervjun att det var sant. När uppgiften $2 - 5 =$ gavs som huvudräkning där svaret skulle sägas direkt svarade nästan alla elever att det blev 3, medan när det senare i intervjun fick fundera en längre stund kring uttrycket $3 - 7$ uppgav många istället svaret *"det går inte"*. Båda svaren har sina begränsningar i mötet med negativa tal. Kunskapen om att subtraktion inte är kommutativ är en förutsättning för att vi ska kunna inse att $7 - 3 = 4$ men $3 - 7 = -4$.

Om strävan är att eleven ska förstå att "minus minus blir plus" tror jag det är i arbete med taluppfattningen som undervisningen bör ta sin utgångspunkt.

Lärarstudenters lösningar av uppgiften $(-3) - (-8) =$

Blivande lärare i matematik för yngre åldrar (med gymnasiets matematik A som förkunskap) fick i en undersökning skriftligt lösa uppgiften $(-3) - (-8) =$ samt uppge hur de tänkte och hur säkra de var på sin lösning. 30% av studenterna fick fel svar på beräkningen, det vanligaste felaktiga svaret var (-11) och många av dem som svarat så uppgav sig vara säkra eller ganska säkra på sin lösning. Studenterna redovisade olika tankestrategier där somliga resonerade metaforiskt med hänvisning till en konkret modell och andra förde ett rent symbolmanipulerande resonemang utgående från olika räkneregler. Frekvensen av felaktiga svar var ungefär lika stor i de båda grupperna. I de följande avsnitten visas en del av studenternas förklaringar.

Termometern

Exempel på förklaringar: $(-3) - (-8) = (-11)$

- Om jag har -3 på en termometer. Ta bort 8, då blir det -11 .
- $-$ är lika med $+$ ($8+3=11$) tänk termometern
- På en tallinje eller termometer tänker jag var (-3) är placerad och fortsätter med (-8) till -11
- Jag tänker mig termometern och att den sänks ytterligare 8 grader. (helt säker)

Subtraktionen $(-3) - 8 = (-5)$ kan med termometern förklaras så här: från minus 3 sjunker temperaturen 8 grader, då hamnar vi på minus 5. Men hur förklarar man subtraktionen $(-3) - (-8) = 5$? Svårigheterna med termometern som modell är att den inte innehåller några naturliga situationer som svarar mot subtraktion av ett negativt tal.

Subtraktion på termometern är när gradtalet sjunker, men det kan inte sjunka ett negativt antal steg. Termometern eller rörelse längst tallinjen var den vanligaste modellen bland studenterna i undersökningen. Andra likartade modeller med precis samma svaghet är glaciären, hissen och trappan. Problemet med modellerna är att de inte kan hantera ett negativt b i uttrycket $a - b = c$. Temperaturen kan inte sjunka eller stiga med minusgrader. Glaciären kan inte smälta undan ett negativt antal meter. Hissen kan inte åka upp eller ner ett negativt antal våningar. Det kanske är uppenbart för läraren att man här måste tillgripa en annan strategi, men är eleven medveten om det? Att inse när en modell inte längre är användbar hänger också ihop med taluppfattningen. Modellen ska inte bara vara ett verktyg som "talar om hur jag gör". Eleverna måste förstå på vilket sätt modellen är en modell av talen innan den med förståelse kan användas som en modell för subtrakton.

Pengar

Exempel på förklaringar: $(-3) - (-8) = (-11)$

- Först är man skyldig 3 kr sedan blir man skyldig ytterligare 8 kr.

I motsats till termometern som går tillbaka till en rumslik metafor där tal representerar punkter på en linje, så bygger pengamodellen på en metafor där talen representerar objekt i en mängd. Det finns positiva objekt, dvs pengar, och motsatta/negativa objekt, dvs skulder. Subtraktion brukar i en sådan modell vanligtvis vara att man tar bort objekt. Det finns inte här någon koppling till en vardaglig förståelse av vad det innebär att ta bort en skuld om jag inte har en skuld till att börja med. Om jag har en stor skuld och tar bort en del av den kan jag beskriva det matematiskt med $(-35) - (-20) = (-15)$. Här hanterar vi negativa tal på samma sätt som kineserna gjorde för 2000 år sedan, dvs som positiva tal av en annan kvalitet. Vi tänker $35 - 20 = 15$ men det är skulder (minustal) vi pratar om. Svårigheten uppstår när vi ska passera nollan. I uppgiften $(-3) - (-8) =$ ska vi ta bort en skuld på 8 från en skuld på 3. Det gör vi aldrig i vardagen.

Ett annat sätt att hantera subtraktion i den här modellen är att se subtraktion som jämförelse. Vi kan jämföra två personers ekonomi. Om jag har 7 kronor och du har 5 kronor så kan jag beskriva den skillnaden matematiskt som $7 - 5 = 2$ och se att skillnaden är 2. Här uppstår problemet när vi vill att eleverna ska förstå att $5 - 7 = (-2)$. Vi brukar aldrig beskriva skillnader som positiva eller negativa, det framgår istället av sammanhaget. Skillnaden i talat språk mellan 5 och 7 är samma som skillnaden mellan 7 och 5. Den är 2 i båda fallen. Återigen handlar det om att göra eleven medveten om hur länge en modell är användbar och vilka aspekter av talen som kommer till uttryck i modellen. Varje modell eller metafor belyser vissa aspekter men döljer andra.

Räkneregler

Exempel på förklaringar: $(-3) - (-8) = (-11)$

- Jag tog bort parenteserna och sen plussade de två siffrorna och sen fick jag sätta – framför siffran.
- Jag vet att flera på varandra följande minustecken vid en del fall resulterar i plus
- Jag adderade 8 och 3 bara satte ett minus framför. Talen är i parentes, så då tar de inte ut varann och ska bli addition.
- Jag adderar -3 och -8. Blir -11.

Tanken att det är bättre med regler än konkretiserande modeller när det gäller undervisning om negativa tal är ganska lätt att försvara eftersom alla modeller har brister och begränsningar. Problemet med räkneregler är att man så lätt glömmer bort dem, blandar ihop dem eller använder dem fel. Även här handlar det om att ha en bra taluppfattning. Vad man ska göra med de olika minustecknen och om de tar ut varandra eller ej beror på vad de står för. Två minustecken efter varandra i det här räkneexemplet blir ett plus på grund av att subtraktion av ett tal är detsamma som addition av det motsatta talet. För att förstå en sådan matematisk förklaring behöver man förstå dels vad som menas med motsatt tal och dels hur subtraktion och addition förhåller sig till varandra. För studenterna som citerats här ovanför är det oklart vilka två minustecken som tillsammans blir ett plus och vad man i så fall ska göra av det tredje minustecknet. Det hjälper dem inte att de kommer ihåg regeln.

Implikationer för undervisning om negativa tal

Verkligheten är inte så bra som modell för subtraktion av negativa tal och det är viktigt att man inser begränsningarna med alla de modeller man tar upp i undervisningen. Nyttan med att förstå subtraktion av negativa tal ligger inte i verkligheten utan i den abstrakta matematiken. För att kunna förstå abstrakta matematiska förklaringar är det oerhört väsentligt att eleven har en bra taluppfattning. Taluppfattningen behöver problematiseras och då kan det historiska perspektivet vara till en hjälp. Låt eleverna fundera och prata om hur de själva vill lösa exempelvis $3-7$. Om de enas om att det blir -4 , be dem fundera över hur -4 ska kunna fungera i andra sammanhang. Vad är -4 för ett konstigt tal egentligen?

Glöm inte bort att ta reda på var eleverna står när de möter de negativa talen!

Vilka metaforer använder de när de tänker på tal?

Vilka ideer om tal har de att utgå från?

Vad är ett tal?

Litteratur

Katz, V., & Michalowics, K.D. (Eds) (2004) *Negative Numbers Historical Modules Project*
Lakoff, G., & Núñez, R.E. (2000) *Where Mathematics Comes From*. NY: Basic Books
Thompson, J. (1996). *Matematiken i Historien*. Lund: Studentlitteratur