

Att bevisa det omöjliga

Veronica Crispin Quiñonez disputerade i matematik år 2006 och är för närvarande universitetslektor vid Matematiska institutionen på Stockholms universitet.

Inledning

I detta föredrag kommer jag att presentera bevis för några absurda påståenden. Självklart har det smugit sig in en felaktighet någonstans, men det gäller att gömma den precis som i ett trolleritrick. Jag värmer upp med en algebraisk exercis, som är klassisk och som förekommer i många olika varianter.

Låt a och b vara två (reella) tal och antag att $a > b$, dvs att det finns ett positivt tal c sådant att:

$$a = b + c$$

$$a(a - b) = (a - b)(b + c)$$

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c)$$

$$a = b (!!!)$$

Vi multiplicerar båda led med $(a - b)$

och öppnar parenteserna:

Nu subtraherar vi produkten ac från båda led

och bryter ut a respektive b :

Till sist dividerar vi med faktorn $(a - b - c)$ och får:

Lättast ser man var felet är gömt i beviset om man utför operationerna med två valfritt valda tal a och b .

Currys trianglar

Betrakta nedanstående tre trianglar:

Den första triangeln har arean $A = (\text{bas} \times \text{höjd})/2 = (10 \times 12)/2 = 60$ ytenheter.

Om vi arrangerar om de sex delar, som triangeln är uppklippt i, kan vi alltså få en figur med arean $(60 - 2) = 58$ y.e. liksom en figur med arean $(5 \times 9 + 2 \times 7) = 59$ y.e.

Trolleritricket här består i att rita tjocka kanter och därmed lura publiken om figurernas exakta mått. Jag uppmanar publiken att klippa upp den givna triangeln i sex olika delar enligt bilden. Sätter man därefter ihop delarna till de två andra figurerna, kan man tydligt se att figurerna inte alls blir lika snygga i verkligheten. Därmed upptäcker man vart de försvunna små areorna på 2 y.e. respektive 1 y.e. tagit vägen.

En trubbig vinkel kan vara rät

Denna sofism var en av Lewis Carrolls favoriter, som han kan ha hittat i Balls bok som trycktes för första gången 1892.

Betrakta kvadraten ABCD. Låt E vara mittpunkten på sidan AB och F mittpunkten på sidan DC. Drag sträckan CG sådan att dess längd är lika med kvadratens sida och punkten G ligger utanför kvadraten. Drag sträckan AG och låt H vara mittpunkten på AG. Konstruera mittpunktsnormaler till AB och AG (som ju går genom punkterna E, F respektive H). Eftersom linjerna genom AB respektive AG inte är parallella, kommer inte heller mittpunktsnormalerna vara parallella utan skär varandra i, säg, punkten K utanför kvadraten,

så att sträckorna AK och GK passerar genom kvadraten.

Vi har: $|AH| = |GH|$ eftersom H är mittpunkten på AG
 $(\sphericalangle AHK)^\circ = (\sphericalangle GHK)^\circ = 90^\circ$, eftersom HK är mittpunktsnormalen till AG
 $HK = HK$.

Alltså, triangelarna $\triangle AHK$ och $\triangle GHK$ kongruenta enligt sida-vinkel-sida.

Vidare är $|DF| = |CF|$ då F är mittpunkten på CD
 $(\sphericalangle DFK)^\circ = (\sphericalangle CFK)^\circ = 90^\circ$, eftersom EF är mittpunktsnormalen till CD
 $FK = FK$.

Således är triangelarna $\triangle DFK$ och $\triangle CFK$ också kongruenta enligt sida-vinkel-sida, vilket ger vinkelkongruensen $(\sphericalangle KDF)^\circ = (\sphericalangle KCF)^\circ$.

Slutligen, $|DA| = |CG|$
 $|AK| = |GK|$
 $|KD| = |KC|$,

vilket ger att triangelarna $\triangle KDA$ och $\triangle KCG$ är kongruenta, och därmed är vinklarna

$$\begin{aligned}(\sphericalangle KDA)^\circ &= (\sphericalangle KCG)^\circ && \text{som i sin tur består av} \\(\sphericalangle KDF)^\circ + (\sphericalangle FDA)^\circ &= (\sphericalangle KCF)^\circ + (\sphericalangle FCG)^\circ && \text{men } (\sphericalangle KDF)^\circ = (\sphericalangle KCF)^\circ \\(\sphericalangle FDA)^\circ &= (\sphericalangle FCG)^\circ.\end{aligned}$$

Nu är dock $(\sphericalangle FDA)^\circ = 90^\circ$ medan $(\sphericalangle FCG)^\circ$ uppebart är större än 90° på grund av konstruktion. Alltså kan en trubbig vinkel vara lika med 90° !

Algebraiskt bevis för att vinkelsumman i en triangel är 180° utan parallellaxiomet

Låt $\triangle ABC$ vara en triangel och D en godtycklig punkt på sidan AC. I $\triangle ABD$ kalla vinklarna $\sphericalangle B$ och $\sphericalangle D$ för $\sphericalangle \alpha$ respektive $\sphericalangle \beta$. I $\triangle CBD$ kalla vinklarna $\sphericalangle B$ och $\sphericalangle D$ för $\sphericalangle \gamma$ respektive

$\sphericalangle \delta$. Då har vi två uttryck för vinkelsumman S i en triangel:

$$\begin{aligned}S &= \sphericalangle A + \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta && \text{som vinkelsumman i } \triangle ABD \\S &= \sphericalangle C + \sphericalangle \gamma + \sphericalangle \delta && \text{som vinkelsumman i } \triangle CBD \\S &= \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C && \text{som vinkelsumman i } \triangle ABC,\end{aligned}$$

där summan av de två första uttrycken ger

$$\begin{aligned}2S &= (\sphericalangle A + \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta) + (\sphericalangle C + \sphericalangle \gamma + \sphericalangle \delta) = \sphericalangle A + (\sphericalangle \alpha + \sphericalangle \gamma) + \sphericalangle C + (\sphericalangle \beta + \sphericalangle \delta) \\&= \\&= (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) + 180^\circ = S + 180^\circ \text{ så att } S = 180^\circ \text{ utan att använda} \\&\text{parallellaxiomet!}\end{aligned}$$

Litteratur

W. W. R. Ball: *Mathematical Recreations and Essays*, 13th edition, Dover, 1987.

S. Dodgson Collingwood (ed): *The Lewis Carroll Picture Book*, T Fisher Unwin, 1899.
(Omtryckt som *The Unknown Lewis Carroll*, Dover Publications, 1961.)

M. Gardner: *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, W. H. Freeman & Company, 1983.

E. S. Kanin, F. F. Nagibin: *Matematitjeskaja sjkatulka*, Prosvesjtjenie, 1984.