

Huvudräkning – en metod att lära matematik

Wiggo Kilborn har i många år arbetat som forskare, lärarutbildare och läromedelsförfattare.

Inledning

Huvudräkning bedrivs ofta på ett rituellt sätt med knep och knåp och uppfattas som en form av hjärngympa. I själva verket bygger all framgångsrik huvudräkning på etablerade räknelagar och räkneregler, om än på ett informellt form. För den som lär sig behärska huvudräkning på insiktsfullt sätt öppnar sig emellertid unika möjligheter att tränga in i matematikens värld. Under föreläsningen ges exempel från olika skolår och en generalisering sker efter hand från naturliga tal till hela tal och rationella tal.

Syftet med föreläsning

Syftet med den här föreläsningen är att visa hur man redan på lågstadiet kan börja en långsiktig process, vars syfte är att hjälpa eleverna att bli duktiga i huvudräkning. Detta kan ske genom man att utnyttjar finesserna med olika räknelagar och räkneregler, något som på sikt kan utgöra en god grogrund för vidare studier av matematik på olika nivåer, formellt som informellt.

Vad föreläsningen handlar om är en "huvudräkningsresa" som börjar i förskolan och som slutar på gymnasiet. Under den resan kommer jag att guida åhörarna från mycket grundläggande matematiska begrepp, via olika typer av huvudräkningsstrategier fram till mer formella matematiska operationer som eleverna har behov av för sina fortsatta studier. Detta gäller oavsett om eleverna skall fortsätta med en teoretisk utbildning eller en yrkesutbildning.

Huvudräkning har under senare år getts allt större utrymme i skolans matematikundervisning. Det finns två skäl till detta:

- Dels menar man att huvudräkning, och då främst i form av överslagsräkning, är ett viktigt komplement vid användning av miniräknare. Med hjälp av överslagsräkning kan man nämligen få en uppfattning om ett svars storleksordning och därmed minimera risken för att man får ett felaktigt svar genom att slå in fel siffror eller tecken på miniräknaren.
- Dels menar man att algoritmerna är överflödiga och att det räcker med att behärska huvudräkning eller att komplettera detta med informella räknemetoder.

I dagens kursplaner har man höga krav på att eleverna lär sig matematik – inte bara att de lär sig räkna. Samtidigt, menar man, har möjligheterna att arbeta med matematik ökat betydligt under senare år, eftersom all den tid man kan spara genom att använda miniräknare nu kan läggas på förståelse, alltså att lära sig matematik. Frågan är om detta verkligen sker. För att detta verkligen skall ske, måste eleverna kunna se matematiken i det de gör. Sett ur den synvinkeln är de flesta av de huvudräkningsmetoder som presenteras i dagens läromedel klart otillräckliga. Med dem lär man sig i allmänhet bara smarta knep för stunden, inte varför dessa knep fungerar och hur de kan utvecklas, till exempel till att förstå de räknelagar och räkneregler som senare kommer att ligga till grund för arbete med irrationella tal, algebra och funktioner.

Ett problem som lägger stora hinder i vägen för eleverna, när det gäller såväl skriftlig räkning som huvudräkning, är brister i grundläggande räkning och taluppfattning. För den elev som har en god taluppfattning och grundläggande kunskaper i de fyra räknesätten är vägen öppen

för att tillägna sig en god förmåga att räkna i huvudet. Omvänt skapar dåliga kunskaper i de grundläggande räkneoperationerna växande, och till slut oöverstigliga hinder för framgång. Ett problem i det här sammanhanget är, att en nedärvd lärarkunskap om hur man planerar och undervisar om grundläggande färdigheter i aritmetik, till stor del glömts bort. Följderna av detta har jag kunnat iaktta såväl vid klassrumsobservationer som vid analys av olika typer av test. De problem elever har inom flera av yrkesprogrammen på gymnasiet, är exempel på detta.

Exempel på innehållet i föreläsningen

Vad föreläsningen handlar om är bland annat hur en genomtänkt satsning på huvudräkning kan bidra till att eleverna på ett tidigt stadium tidigt ges en uppfattning om matematik som på sikt kan hjälpa dem att förstå mer komplicerade sammanhang. Det gäller således att på ett informellt sätt, och redan från början, lyfta fram poängerna med matematiken i räknandet. Att huvudräkningen fungerar beror ju uteslutande på att den följer givna räkneregler och räknelagar. Genom att göra eleverna uppmärksamma på detta kan man ge dem en god grogrund för fortsatta studier.

- En elev som lärt sig att en subtraktion som $8 - 6$ kan uppfattas som en uppräkning från 6 till 8, alltså som $6 + __ = 8$, kan senare använda den kunskapen i en rad andra sammanhang. Uppgiften $51 - 48$ kan då lösas som en uppräkning i tre steg, från 48 till 53. Uppgiften $5 - (-2)$ kan på motsvarande sätt uppfattas som $(-2) + __ = 5$, alltså avståndet (på tallinjen) mellan (-2) och 5 osv.
- En elev som lärt sig lika tillägg, dvs. att man i en subtraktion kan lägga till samma tal till båda termerna har andra fördelar. En subtraktion som $48 - 19$ kan då, till exempel, tolkas som åldersskillnaden mellan mamma och son. Eftersom åldersskillnaden är densamma efter ett år, är därför $48 - 19 = 49 - 20$, vilket är betydligt enklare att beräkna i huvudet. Även denna strategi kan generaliseras till negativa tal. Till $5 - (-2)$ kan man nu addera 2 till båda termerna, vilket ger $5 + 2 - ((-2) + 2) = 7 - 0$.

Det flesta av dessa operationer är relativt lätta att konkretisera och att öva - enskilt eller i grupp.

När det gäller addition och multiplikation så är det de kommutativa och associativa räknelagarna som utgör grunden. Redan tidigt förstår barn att det är lättare att beräkna $3 + 9$ om man börjar räkna uppåt i tre steg från 9. På motsvarande sätt är det inte svårt att uppfatta att $7 + 8 + 3$ kan beräknas som $(7 + 3) + 8$, alltså genom att byta ordningen mellan termerna. Med den tekniken blir även en addition som $189 + 346 + 11$ enkel att beräkna i huvudet som $(189 + 11) + 346$ alltså $200 + 346$. Med hjälp av de här räknelagarna kan man dessutom förklara hur såväl informella som formella algoritmer är uppbyggda. Jag menar, det är ju lika meningslöst för eleverna att lära sig såväl informella algoritmer som formella om de ändå inte förstår vad de gör.

Ännu större vinster kan göras när det gäller multiplikation. För den som behärskar multiplikationstabellen blir $4 \cdot 18$ enkelt att beräkna som $4 \cdot 2 \cdot 9 = 8 \cdot 9$ och $25 \cdot 28$ som $25 \cdot 4 \cdot 7 = 100 \cdot 7$. På motsvarande sätt kan man använda den distributiva lagen. Om man vet att $4 \cdot 102$ kan skrivas som $4 \cdot (100 + 2) = 400 + 8$, så kan på motsvarande sätt $4 \cdot 98$ beräknas som $4 \cdot (100 - 2) = 400 - 8$, osv. Observera att den här typen av övningar samtidigt innehåller viktig förkunskap för att senare förstå algebra, till exempel att $a(b - c) = ab - ac$. På motsvarande sätt kan man genom huvudräkning förbereda arbetet med konjugatregeln och kvadreringsreglerna.

När det gäller division så har jag iakttagit att de flesta av de problem eleverna har med bråk och decimaltal kan härledas till bristande taluppfattning. Konsekvenserna av detta blir tydliga när man kommer till algebraiska uttryck - inte minst inom lärarutbildningen. Genom att lägga en god grund för division under de första skolåren, kan man undvika problem med uppgifter som $\frac{6}{7} : 3$. Många elever kan manipulera sig fram till svaret $\frac{6}{21}$ men de förstår inte innebörden i vad de gjort och de kan därför inte generalisera operationen till decimaltal eller till algebra. En mer elementär uppfattning ger vid handen att $\frac{6}{7}$ betyder $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ och att division med 3 innebär att dessa sex sjundedelar skall delas lika på tre grupper, alltså med $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ i varje grupp. Ett annat problem brukat uppstå vid multiplikationer som $3 \cdot \frac{2}{7}$. Ett vanligt svar är $\frac{6}{21}$, vilket innebär att man förlängt stället för att multiplicera. För den som vet att $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ så är det enkelt att se $3 \cdot \frac{2}{7}$ som $(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} + \frac{1}{7}) = \frac{6}{7}$, vilket kan utföras som enkel huvudräkning.

På motsvarande sätt har många elever på högstadiet och på A-kursen problem med divisioner som $3 : 0,2$. Orsaken brukar vara att de enbart behärskar delningsdivision och inte kan dela upp 3 i 0,2-grupper. En enkel strategi som elever bör lära sig redan under de första skolåren är emellertid att man lika gärna kan uppfatta divisionen som frågan "hur många gånger 0,2 innehålls (ryms) i 3?". (Detta är divisionens variant av utfyllnadssubtraktion.) En konkret frågeställning kan i det här fallet vara hur många gräddförpackningar om 0,2 liter man kan fylla om man har 3 liter grädde. Eftersom det går fem förpackningar per liter blir svaret $3 \cdot 5$.