

Reza Hatami, fil-lic i matematikdidaktik, är lärarutbildare i matematik från förskolan till gymnasieskolan vid högskolan i Kalmar. Han har arbetat som behörig lärare i matematik och samhällskunskap. Han är ledamot i Lärarförbundets centrala styrelse.

Inledning

Retorisk matematik har koppling till språk, matematisk argumentation och logik. Mot bakgrund av att vi alla argumenterar mer eller mindre varje dag, även skolbarn, kan retorisk matematik bidra till att skapa förståelse för mer avancerad matematik med dess kraftfulla abstrakta symbolspråk. Barn kan känna att man i matematik lär sig att resonera. Med resonerande matematik kan elever inhämta mer förståelse för matematik än den som står i kursplanernas strävansmål.

I en historisk analys kommer att förklaras hur Sverige under 450 år utvecklades från nästan noll i matematik till en mycket stark position (Fieldsmedaljen på 60-talet). Resonerande matematik anses vara en hörnsten i denna snabba utveckling. I föreläsningen ges exempel ur svenska läroböcker i matematik som vi löser med resonemang.

Retorisk matematik

Det är emellertid lätt att det matematiska resonemanget försvinner både om man utnyttjar de algoritmer och om man använder sig av det kraftfulla abstrakta symbolspråket. Man hamnar i en *pedagogisk paradox*.¹ D.v.s. matematiklärandet som en process skapar ständigt pedagogiska paradoxer. Vi har å ena sidan algebrans symbolspråk med vilket vi på ett kompakt sätt kan uttrycka de flesta matematiska samband. Å andra sidan har vi den retoriska resonerande matematiken som ger upphov till en kraftfull kalkyl, algoritm eller regel - en vacker blomma i gränslandet till algebra. Men om man vill behålla den vackra blomman levande kan man inte ta bort rötter och stam. Då utrotar man hela trädet; något som har skett i skolmatematiken i Sverige.

I den retoriska matematiken används det vanliga språket när man löser matematiska problem. Man resonerar sig stegvis fram till lösningen i stället för att använda sig av en färdig algoritm eller en matematisk modell. En matematisk modell kan vara en ekvation som man sedan löser med hjälp av bestämda regler. Om vi säger att två kronor plus tre kronor är lika med fem kronor är resonemanget retoriskt. Om vi istället skriver $2k + 3k = 5k$ där k står för kronor är det synkoperat – en blandform. Ett mer abstrakt och därmed mer generellt skrivsätt är $2 + 3 = 5$ och vi kallar det symboliskt. Det symboliska skrivsättet gäller i alla sammanhang där vi vill beskriva det totala antalet element i föreningsmängden av två disjunkta mängder med två respektive tre element. I det symboliska resonemanget behövs bara kunskap om addition av de hela talen. Självfallet är det riktigt som A. N. Whitehead skriver

Matematikens visshet beror på dess totala abstrakta allmängiltighet.²

¹ Se s.3-4 i Uljens Michael, *Om hur människan blir människa bland människor. Om pedagogik och intersubjektivitet. Utbildning och Demokrati*.

² James R. Newman, *Sigma*, artikel av Alfred North Whitehead, *Matematiken som ett element i tänkandets historia*, s.358.

I den retoriska matematiken är den symboliska algebrans formelspråk underordnat, och resultaten härleds genom stegvisa resonemang. Den kan därför bidra till att tidigt skapa en grund för den mer avancerade matematiken med dess kraftfulla abstrakta symbolspråk. För att nå den abstrakta nivå som kännetecknar formell matematik kan det vara naturligt att successivt införa resonemang som på ett naturligt sätt närmar sig symbolisk matematik.

De resonerande och argumenterande operationer som den retoriska matematiken kräver kan vara av stor betydelse för begreppsförståelsen. Den symboliska matematiken har ett janusansikte; å ena sidan det kraftfulla kompakta abstrakta språket som är en nödvändighet för matematikens utveckling, å andra sidan, om det introduceras för tidigt, kan studerande lätt förlora den matematiska begreppsförståelsen och förmågan att resonera.

Att resonera och komma fram till ett svar bär jag med mig som ett kulturarv från mina studier. Tidigt upptäckte jag att elever har oerhört svårt att översätta en uppgift med text till ett symboliskt språk. Mina erfarenheter som lärare i matematik i Sverige säger att den retoriska matematiken inte har någon självklar plats i undervisningen och att dess relation till den symboliska matematiken inte studeras.

Att skapa möjligheter för mina elever/studenter att förstå matematiska teorier är i sig en svår och krävande utmaning, både för mig och för dem. Det krävs mycket arbete som ibland är tålamodsprövande. När man upplever att man kommit fram till en förståelse så kompenserar emellertid känslan av tillfredsställelse mer än väl de besvärliga och ibland tråkiga delarna av arbetet. **Det är inte nödvändigt att motivera studiet av matematik med att framhålla att ”matematik är roligt”.** Att motivera elever till skapande och kreativ verksamhet som fordrar både fantasi och tålamod är en viktig uppgift för matematikläraren.

Matematikens historia kan användas för att ge de studerande ökad förståelse för abstrakta matematiska begrepp. Att filosofera över matematik relaterat till dess historia skapar nya dimensioner åt undervisning och lärande. Man förbisåg aritmetikens och geometriens roller i den historiska utvecklingen. De har både bromsat och varit utmaningar till algebrans och analysens utveckling och kanske också haft liknande betydelse för den enskilde elevens begreppsförståelse.

Att se matematiken enbart som en formaliserad vetenskap med ett kraftfullt symbolspråk, som är ett effektivt verktyg i olika tillämpningar, ger inte en rättvis bild av ämnet. Det kan liknas vid att lyssna till ett musikstycke enbart ur ett musikvetenskapligt perspektiv. I så fall har man missat den personliga upplevelsen. Genom att arbeta med retorisk matematik, något som ofta är mödosamt, kan elever/studenter även bättre tillgodogöra sig den abstrakta matematikens symbolspråk.

Exempel³: Från retorisk till symbolisk matematik

I ett slott fanns det 26 stycken ljusstakar, en del sjuarmade och resten fyraarmade. Tillsammans var 128 armar. Hur många av ljusstakarna var fyraarmade?

Nivå 1: Varje ljusstake har minst fyra armar och somliga har 7 armar dvs. 3 fler än övriga. Mao 26 ljusstakar har tillsammans minst $26 \cdot 4 = 104$ armar. Härav tillhör $(128 - 104) = 24$

³ Uppgiften är hämtad från s.38, Nämnaren Tema: Algebra för alla, upplaga 1, 1997. Observera artikelns begränsnings sidor påverkar det retoriska argumentationens volymsmängd.

armar de sjuarmade ljusstakar, vilka ska fördelas i grupper av tre medlemmar. D.v.s. $24/3 = 8$
Alltså sjuarmade ljusstakar var 8 och härmed fyraarmade ljusstakar $26 - 8 = 18$ i antal.

För vidareutveckling går operationerna att sammanfattas i en och samma relation som
 $128 - 26 \cdot 4 = 3 \cdot \text{antalet sjuarmerad}$.

Nivå 2 Anta sjuarmade var kanske 10. I så fall måste de fyraarmade ha varit $(26 - 10)$

stycken.⁴ Du kan göra flera gissningar tills du kommer till rätt svar. Men oavsett valet av tal är operationerna identiska så det går därför att generalisera gissningen. Vi väljer en bokstav istället för godtyckligt tal för antalet sjuarmade; t.ex. t .⁵ I så fall är antalet fyraarmade $(26 - t)$.

Var och en av de t sjuarmade respektive de $(26 - t)$ fyraarmade har 7 respektive 4 armar, så tillsammans har de $7 \cdot t + 4 \cdot (26 - t) = 128$ armar.⁶

Nivå 3 Vi väljer från början antalet sjuarmade till t , och härav har vi antalet fyraarmade ljusstakar till $26 - t$.

D.v.s.

$$7 \cdot t + 4 \cdot (26 - t) = 128 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3t + 4 \cdot 26 = 128.$$

Nivå 4⁷ Sätt:

Antalet sjuarmade = s

Antalet fyrarmade = f .

Enligt information i uppgiften har vi

$$\begin{array}{lcl} s + f = 26 & \Leftrightarrow & s + f = 26 \\ s \cdot 7 + f \cdot 4 = 128 & \Leftrightarrow & 7 \cdot s + 4 \cdot f = 128 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lcl} s + f = 26 & & 8 \\ 4 \cdot s + 4 \cdot f + 3 \cdot s = 128 \end{array}$$

Varje summa $(s + f)$ kan ersättas med 26; härav omskrivs andra ekvationen.

$$4 \cdot 26 + 3 \cdot s = 128$$

Därmed kommer vi åter till första lösningen med identiska operationer. Med hjälp av förståelsen pga. resonemang i första och senare andra lösnings metoder samt enklare varianter av tredje och fjärde metod får eleverna under sin grundskoletid använda sig av alla de fyra angreppssätten, vilka bäddar i sig för det symboliska algebran. Under grundskoletiden kan eleverna då i högre grad utveckla sin förmåga till kritiskt tänkande/resonerande. Detta är en del av de medborgerliga rättigheterna, som man kan se som ena sidan av ett mynt. Den andra sidan av detta mynt, där myntets värde står, är den symboliska algebran.

Matematikdidaktikens historia i Sverige

⁴ Oerhört viktig att inte koncentrera sig i svaret utan i processen, där kan vi få stöd för den generella lösningen. Istället för 16 säger jag $26 - 10$. Det är mycket bra att göra ett tabell.

⁵ Xarázmi (Al-khwarizmi) använder termen shey, som betyder något istället för obekanta. Pedro från Alcala använder för första gången ordet "shey" till spanska "xēi" och ev. bokstaven x börjades för första gången användas som obekant se s.13 i Hatami, Från Al jábr till Ars mgna, Växjö universitet, 1998.

⁶ Allt detta bör skrivas i första hand med vanligt språk; helt retorisk.

⁷ Här är det mycket passande att rita bilder.

⁸ Här använder vi oss av kommutativa egenskapen hos multiplikation och addition, vilka är viktiga för förståelsen för en del algebraiska manipulationer.

I en lärobokanalys från 1600-talet till början av 1900-talet beträffande reguladetri grupperade jag författarna i tre traditioner,⁹ vilka två av dem kan placeras i matematikdidaktikens historia i Sverige.

Den tradition¹⁰ som Biörk inleder genom att använda proportionalitet fortsätts av Celsius, Beckmarck och Forsell och senare av Björling och Zweigbergk. Hans lärobok är utmärkt både ur ett matematisk och ur ett pedagogiskt perspektiv. Den har ett stort antal övningsuppgifter. I Zweigbergks framställning betonas både förståelsen och den mekaniska färdigheten. Detta måste enligt min mening vara en av anledningarna till att hans lärobok kom att vara efterfrågad under en så lång tid och ges ut i ett så stort antal exemplar.¹¹

Anders Celsius undervisade i Anders Gabriel Duhres¹² skola och för denna skola skrev han sin lärobok *Arithmetica eller räknekonst* (1727), som sedan länge användes i matematikundervisningen vid landets gymnasier.¹³ Duhre var också pedagog och jordbruksreformator under den tidiga frihetstiden. Forsell fortsatte den matematiska och pedagogiska tradition som startades med Biörk och som Celsius förde vidare till Beckmarck. Forsell hade inflytande inom olika områden av samhället som skolan, kyrkan, och politiken. Hos Forsell sätts förståelse och självständighet för elevens lärande i centrum. Ingen utantilläxa fick ges till elever om inte innehållet förklarats. Vi ser en tydlig kontinuitet från Celsius via Beckmarck och Forsell till Zweigbergk samt E. G. Björling. Forsell dog 1838. Första upplagan av Zweigbergks lärobok trycktes året efter. Samhällets politiska omständigheter är helt nya. Demokratiseringen tar fart. Eleverna behöver inte kunna bara använda regler utan nu måste de förstå varför de fungerar. De måste lära sig vara självständiga medborgare som passar in i det nya samhället.

Några exempel från retorisk till symbolisk vilka eventuellt tas upp vid föreläsningen

1. Kvadratens kontinuerliga halvering som en föräning av gränsvärdebegreppet.
2. Proportionsläran och reguladetriuppgifter som inledning till funktionslära.
3. Aritmetisk talserie som ett exempel på matematikens generaliseringskraft från årskurs 1 uppåt.

⁹ Se s.185-198 i Hatami, Reguladetri, Växjö universitet, 2007.

¹⁰ Framställningen i hans lärobok från 1643 passade inte den tiden med dess behov av konkreta räkneregler. Förståelsen av reglerna kommer i centrum och inte skickligheten i att använda dem.

¹¹ Med 35 upplagor mellan 1839-1920 och med 9 upplagor i Finland 1856-1878. Observera att han dog 1862.

¹² Anders Gabriel Duhre (1680-1739), den första svenska moderna matematikern som höll utmärkta föreläsningar i matematik på svenska i Stockholm 1717-1723. Pedagog och jordbruksreformator under den tidiga frihetstiden. Se Rodhe Staffan, *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731*, Uppsala, 2002, s.50-54. Svenskt Biografiskt Lexikon (SBL), band 11, s.506.

¹³ Svenskt biografiskt lexikon (SBL), s.266-267.