

Grafteori som ett sätt att motivera bevis, begreppsbildning och rutinberäkningar

Jöran Petersson är fil. Lic i optimeringslära och universitetsadjunkt i matematikämnets didaktik vid Lärarhögskolan i Stockholm.

Inledning

En graf kan liknas vid ett vägnät i en karta. Denna liknelse för tankarna till en rad praktiska problem, exempelvis kortaste vägen mellan två platser, trafikkapacitet hos ett nätverk och att organisera ett distributionsschema. Mer långsökt är fyrfärgsproblemet: Hur många färger behöver vi för att färglägga en karta så att inga grannländer får samma färg. Vi kan också ställa sig begreppsliga frågor såsom om och hur vi definierar ”diameter” hos en graf.

Några grundläggande begrepp

Det brukar sägas att Gud skapade och Linné systematiserade. Enligt Bibeln fick Adam och Eva uppdraget att namnge djuren. På motsvarande sätt har matematikerna tagit på sig alla dessa uppgifter; att skapa begrepp, namnge dem och sedan systematisera dem i satser. I början av en matematisk teori behövs därför namn och definitioner på en del grundläggande begrepp.

En *graf* är ett nätverk och för att beskriva nätverket använder matematikerna begreppen *hörn* och *kanter*. Ibland används synonymt orden *noder* och *bågar*. Ett hörn kan liknas vid ett vägskepp och en kant vid vägen mellan två hörn. Tillsamman bygger hörn och kanter en graf.

Ytterligare begrepp är *riktad graf* – kanterna får användas i bestämda riktningar och är alltså inte dubbelriktade. *Väg* – en serie av kanter som tillsammans förbinder två hörn. *Cykel* – en väg som börjar och slutar i samma hörn. *Träd* – en graf utan cykler. *Grannar* – hörn med endast en kant mellan sig. *Loop* – en kant som börjar och slutar i samma hörn.

Minsta uppspännande träd

Ett uppspännande träd innebär att förbinda antal platser/orter med kabel/vägar. Naturligtvis ska förbindelserna inte dras onödiga omvägar utan vara så korta som det är rimligt för att hålla kostnaden nere. Givet olika alternativ för installationen, hur ser det billigaste nätverket ut?

Det går inte alltid att se en direkt lösning. Istället behövs en välgrundad strategi för att lösa detta problem. Ett förslag kan vara att sortera förbindelserna efter installationskostnad med den billigaste först och välja ut dem som bygger ett träd. Ett annat förslag kan vara att börja i en godtyckligt vald plats och sedan söka upp den plats som är billigast att ansluta tills alla är anslutna. Dessa principer används i Kruskals och Prims algoritmer. Även om båda dessa principer kan tyckas vara vanligt sunt förnuft, så räcker de till för att bevisa att, båda metoderna verkligen ger ett minsta uppspännande träd. Beviset bygger på induktion, som ingår först i gymnasiets kurs ”diskret matematik”. Vi ser att startträdet är minimalt (endast ett hörn och inga bågar) och antar att detta gäller även i steg nummer k i algoritmen. Algoritmens konstruktion visar då att även nästa steg är det minsta av alla möjliga träd. Därmed är induktionsbeviset genomfört.

Kortaste väg

Du ska färdas från A till B och har en karta med flera vägalternativ framför dig. Vilken väg är kortast? Här är det inte alltid uppenbart vilken väg som är kortast, varför vi själva får formulera några strategier. Ett förslag är att börja i A och gå till nästa närmsta vägs-käl. Från detta vägs-käl går vi vidare till nästa närmsta vägs-käl etc. Nackdelen är att vi kanske går igenom många småvägar som sammanlagt kanske inte är den kortaste vägen. Det behövs alltså en annan strategi. En strategi kan vara att systematiskt söka av alla möjliga kombinationer av vägar från A till B. Nackdelen är att det blir snabbt blir många alternativ att undersöka. En smart variant av detta är att endast ta reda på vilket billigaste ytterligare delmål du kan nå från de redan nådda. Dijkstra har gett namn åt den algoritm som använder denna princip. Algoritmen kan liknas vid att ge en elev 1 krona att disponera för en resa med start i A och be eleven bokföra vilka platser reskassan räcker till. Eleven får sedan ytterligare en krona i taget och uppdaterar vilka nya resmål pengarna räcker till. Detta upprepas tills B är nådd. Beviset för att denna algoritm ger en kortaste väg är även här ett induktionsbevis.

En viktig fråga är hur många steg en algoritm behöver. Eftersom Dijkstras algoritm erövrar ett nytt hörn och förbrukar en kant i varje steg, så begränsar dessa antalet steg. Men vilket är minst av antalet hörn och antalet kanter. Om grafen är sammanhängande måste det ju finnas minst en kant mellan varje hörn. I så fall är antalet kanter $\geq$ antalet hörn minus ett.

Varianter av problemet kortaste väg

En väg behöver ju inte endast vara kortast till sträckan. Målet kan även vara att hitta den i tid snabbaste vägen, den energisnålaste vägen etc. Alla dessa har gemensamt att en summa ska minimeras, vilket ju Dijkstras algoritm gör. Den är alltså vad matematiker kallar *generell*. Men om en motorcykelväg ska vara kurvig och poängsätts efter detta, där mest kurvor ger högst poäng, hur fungerar algoritmen då? Här behövs matematisk kreativitet. Antingen får vi sätta poängen i bakvänd ordning eller så kan vi beräkna $1/\text{poängen}$. Då motsvarar lägst poäng den kurvigaste vägen och Dijkstras algoritm kan användas.

En väg till skolan ska naturligtvis vara säker, vilket kan mätas som sannolikheten = $1 - \text{olycksrisken}$. Upprepade sannolikheter ska multipliceras och produkten ska maximeras. Denna variant motsvarar att byta "minimera summan" mot att "maximera produkten".

Minkostnadsflöde och Transportproblem

En butikskedja har ett antal lager och butiker. Varje vecka ska butikerna förses med en viss mängd varor. Hur ska transportbilarna köra för att minimera transportkostnaderna? Detta problem kan ritas som en *bipartit graf*. Det betyder att transporterna går endast från lager till butik och inte mellan lager – lager eller butik – butik. En metod att lösa detta problem är att modifiera algoritmen för kortaste väg så att den hittar en billigaste väg och använder denna i första hand tills ett lager är tomt eller butiken fylld. Steg för steg hittar algoritmen billigaste återstående väg tills butikernas efterfrågan är fylld.

Att uppfinna nya begrepp som beskriver en graf

Har grafen någon diameter och hur skulle vi kunna definiera den? En diameter hos en graf skulle kunna vara den vanliga geometriska diametern, men ett alternativ är att definiera diametern hos en graf som det längsta minimala avstånd mellan två hörn. Att definiera det enbart som det längsta avståndet mellan två hörn gör det frestande att gå omvägar mellan de två hörnen, och får ju en graf med cykler oändlig diameter, vilket skulle göra definitionen användbar endast på träd, eftersom de har endast en väg mellan varje par av noder. Kan vi definiera radien hos en graf på motsvarande sätt?

Kan en graf beskrivas i variabler och ekvationer? Ja faktiskt. Tolka varje kant som en variabel och varje hörn som en ekvation. Om i ett minikostnadsflöde kanterna x_1 , x_2 , går in i ett hörn och kanten x_3 går ut från samma hörn så gäller ekvationen $x_1 + x_2 = x_3$. Detta är samma som Kirschhoff's strömlag där strömmen $x_1 + x_2$ kommer in i förgreningen och strömmen x_3 går ut.

Hur många kanter kan en enkel graf (dvs. utan loopar och parallella kanter) ha? Det är lika många som antalet diagonaler och sidor i motsvarande polygon. Givet en graf kan vi rita om den på följande sätt: Lägg till alla diagonaler och sidor i motsvarande polygon och tag bort grafens ursprungliga kanter. Vad ska vi kalla en sådan graf? Matematikerna har valt att kalla den *komplementär graf*.

Ett annat sätt att rita om en graf är att tolka den som en karta där en kant är en gräns mellan två länder och hörnen är platser där gränserna mellan flera länder möts. För enkelhets skull kan vi börja med en karta. Varje land har en huvudstad. I en gemenskap mellan olika länder, exempelvis EU, behöver vi en väg mellan varje huvudstad och dess grannländers huvudstad. I EU-grafen suddar vi sedan ut gränserna eftersom varor, tjänster, människor och kapital får röra sig fritt över dessa. Den nya grafen som kallar matematikerna den *duala grafen*. Denna omritning av en graf möjliggör lösningen av fyrfärgsproblemet. Den klassiska formuleringen lyder: Räcker det med fyra färger för att färglägga en karta så att inga grannländer får samma färg? Problemet löstes först 1977 genom att en dator fick räkna igenom alla möjliga fall. Svar: Det räcker med fyra färger.

Litteratur

- Bazaraa, M, Jarvis, J. (1977). *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons.
- Bäckström, K.J. (1986) *Diskret matematik*. Studentlitteratur.
- Böiers, L.C. (2003) *Diskret matematik*. Studentlitteratur.
- Eriksson, K., Gavel, H. (2003) *Diskret matematik och diskreta modeller*. Studentlitteratur.
- Eriksson, K., Gavel, H. (2003) *Diskret matematik – fördjupning*. Studentlitteratur.
- Jonasson, J., Lemurell, S. (2004) *Algebra och diskret matematik*. Studentlitteratur.
- Lundgren, J. Rönnqvist, M. Värbrand, P. (2003). *Optimeringslära*. Studentlitteratur
- Korte, B. Vygen, J. (2002). *Combinatorial Optimization*. Springer.
- West, D. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall.