

Det möjliga och det omöjliga - glimtar från ekvationslösningens historia

Maria Fahlgren, universitetsadjunkt, Karlstads universitet, Karlstad, Sverige

Thomas Martinsson, universitetslektor, Karlstads universitet, Karlstad, Sverige

Denna historiska resa börjar i historiens dunkel med de fyra räknesätten och mellanlandar hos babylonierna och via Bagdad på 800-talet e.Kr. går resan vidare till Italien under 1500-talet och till Oslo 1824 så avslutas resan i Paris 30 maj 1832 med ett pistolskott på 25 stegs avstånd.

Problem som vi idag skriver som ekvationer var tidigare verbalt formulerade.

Addition och multiplikation för positiva heltal dvs. att lösa frågeställningarna $a + b = ?$ resp. $a * b = ?$ är alltid lösbart om vi accepterar att talföljden 0, 1, 2, 3, inte har något slut utan att det finns obegränsat med positiva heltal. Dessa kallas de *naturliga talen* men dessa räcker inte till för att alltid kunna subrahera dvs. att kunna besvara frågan $a + ? = c$. Matematikerna löste detta problem genom att införa de negativa heltalen. Men detta gjordes för bara några århundraden sedan. De rationella talen införs på motsvarande sätt för att alltid kunna dividera dvs. att alltid kunna besvara frågan $a * ? = c$ om $a \neq 0$. De positiva rationella talen har används mycket länge. Nästa steg i ekvationslösningens historia är att hitta kvadratrötter eller lösa ekvationer av typ $x^2 = a$.

Nu var det dags att utöka talområdet igen. Redan Pytagoréerna upptäckte för 2500 år sedan att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. Katastrof!!!

Utväg nummer 1: Närmevärden. Man kan hitta bråktal vars kvadrat är godtyckligt nära 2. Man har hittat flera tusen år gamla lerklumpar från Babylon med beräkning av närmevärde till $\sqrt{2}$ vars sex första decimaler är korrekta.

Utväg nummer 2: Utöka $\mathbf{Q}$ algebraiskt. Vill man ha lösningar till $x^2 - 2 = 0$ så konstrueras *talmängden* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{ r + s\sqrt{2}; r, s \in \mathbf{Q} \}$ med räkneregeln att $\sqrt{2} * \sqrt{2} = 2$. Jämför hur man definierar komplexa tal.

Utväg nummer 3: Den väg man valt. Utgå från en tallinje med enbart rationella tal dvs. $\mathbf{Q}$. Denna har, som Pytagoréerna visade, en massa ”hål” t.ex. vid $\sqrt{2}$.

Åter till babylonierna. Hur kunde de hitta så exakta närmevärden. En god gissning är följande grundidé: Om $a * b = 2$, så är antingen $a = b$ och därmed $a = \sqrt{2}$ och vi har hittat den sökta roten. Eller så är $a < \sqrt{2}$ och då måste $b = 2/a$ vara större än $\sqrt{2}$ eller tvärtom. Så om vi startar vår gissning av $\sqrt{2}$ med ett tal a som inte är mitt i prick så borde medelvärdet av a och $2/a$ vara en bättre approximation. Vi tar alltså som nästa gissning talet $(a + \frac{2}{a})/2$. Detta visar sig

vara en mycket bättre gissning. Redan efter ett par upprepningar får man 6 korrekta decimaler.

Efter rotutdragning är nästa svårighetsgrad att lösa den *allmänna andragradsekvationen*. Hoppa vi fram till 800 e.Kr. så vet vi säkert att man kunde detta. För då levde i Bagdad matematikern (*Muhammad Ibn Musa*) *Al-Khwarizmi*. Hans metod att lösa andragradsekvationer var genom en geometrisk tolkning.

Nästa utmaning är lösning av tredjegradsekvationer. Detta var ett mycket svårare problem. *Omar Khayyam* (ca1048-1122), både poet och matematiker, löste både tredje- och fjärdegradsekvationer geometriskt. Han trodde inte att det gick att lösa tredjegradsekvationen algebraiskt (förutom vissa specialfall).

Även *Luca Pacioli* (1445-1514), som bl.a. utgav en sammanställning av opublicerade verk, *Summa*, var övertygad om att det inte gick att hitta någon allmän algebraisk lösning till tredjegradsekvationen. Han avslutar sin *Summa* med att påstå att lösningen till tredjegradsekvationen är lika omöjlig som kvadraturen av cirkeln. Detta avrådde flera matematiker från att ens försöka hitta en lösning men några matematiker blev tvärtom sporrade att lösa ekvationen.

Paciolo kan personligen ha stimulerat den första stora prestationen, inom renässansen algebra, då han 1501-02 föreläste vid universitetet i Bologna och där en av hans kollegor var *Scipione del Ferro* (1465-1526), professor i matematik. Ferro var nämligen den förste person som löste tredjegradsekvationen algebraiskt. Detta gjorde han omkring år 1515.

Ferro publicerade aldrig sin lösning, eftersom det var vanligt på den tiden att man behandlade matematiska upptäckter som personliga ägodelar. Ferro avslöjade dock hemligheten till en av sina elever, Antonio Maria Fiore, som också var hans svärson. Det verkar troligt att Ferro endast lärde Fiore att lösa problem av typen ”kub och något är lika med ett tal”, dvs. ekvationer av typen $x^3 + px = q$, där p och q är positiva tal. En tredjegradsekvation som saknar andragradsterm

År 1530 mottog en man, *Niccolò Tartaglia* (1500-1557) två problem av en vän. Problemen innebar lösandet av tredjegradsekvationer med andragradsterm. Tartaglia lyckades lösa problemen och gjorde det till allmän kändedom att han kunde lösa all ekvationer av typen $x^3 + px^2 = q$.

Eftersom Fiore trodde att Tartaglia bluffade, utmanade han honom till en problemlösningssduell i Venedig år 1535. Varje tävlande skulle ge sin motpart 30 problem att lösa under 50 dagar. Den som löste flest problem under denna tid skulle utgå som segrare. Tartaglia, som visste att Fiore endast kände till lösningen till ekvationer av typen $x^3 + px = q$, arbetade frenetiskt med att komma på lösningen även till denna typ av ekvation. Och han lyckades med detta 2 dagar innan tävlingen började. Det slutade med att Tartaglia lyckades lösa Fiores samtliga 30 problem medan Fiore inte lyckade lösa ett enda av Tartaglias problem.

Nyheten om Tartaglias triumf spred sig snabbt och nådde bl.a. *Girolamo Cardano* (1501-1576), en läkare i Milano, som även undervisade i matematik. Cardano ville gärna ha med lösningen av tredjegradsekvationen i sitt kommande verk *Practica arithmetica*. Han bad Tartaglia om lösningen och lovade att den skulle presenteras med hans namn.

Tartaglia vägrade eftersom han hade för avsikt att själv ge ut ett verk i algebra. Cardano ger inte upp och efter mycket lock och pock lyckas han få Tartaglia att avslöja lösningen men under förutsättningen att hålla den hemlig. Rykten börjar fluktuera om att Tartaglia inte var den förste som lyckats lösa tredjegradsekvationen utan att det var del Ferro som gjort detta.

Detta får Cardano att inte längre känna sig bunden till sitt löfte till Tartaglia. År 1545 publicerade han lösningen i sin *Ars Magna*, en stor avhandling i algebra på latin, vilken inte

bara innehöll lösningen till tredjegradsekvationen utan även till fjärdegradsekvationen. Det var Cardanos främste elev *Luigi Ludvico Ferrari* (1522-1565) som lyckade lösa den allmänna fjärdegradsekvationen.

Cardano medgav att han erhållit lösningen till den speciella tredjegradsekvationen $x^3 + px = q$ av sin "vän" Tartaglia men hävdade att han själv bevisat att lösningen han erhållit var korrekt. Cardano löste även alla andra fall, som uppstod i och med att han inte tillät negativa koefficienter. Med moderna notation kan lösningen till den allmänna reducerade tredjegradekvationen $x^3 + px = q$, $p > 0$, $q > 0$, skrivas:

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} - \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} \quad \text{Cardano-Tartaglias formel}$$

Den reducerade tredjegradsekvationen ovan erhålls genom att utföra substitutionen $x = y - a/3$ i den allmänna tredjegradsekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Sedan var det dags att försöka lösa femtegradsekvationen. Många matematiker sökte efter en liknade metod för femtegradsekvationen men alla försök misslyckades! *J-L Lagrange* tog ett viktigt steg genom att visade på svårigheter genom att permutera rötter. Så småningom uppstod misstanken att det inte fanns någon allmän metod för femtegradsekvationen. *P Ruffini* publicerade 1813 ett ofullständigt bevis för att femtegradsekvationen var olösbar men det var den norske unge matematikern *N. H. Abel* som 1824 kunde bevisa det omöjliga i att hitta en formel som genom successiva rotutdragningar (*radikaler*) gav lösningen till den allmänna femtegradsekvationen.

Niels Henrik Abel föddes 5 augusti 1802 och dog 6 april 1829 i lungsot. Han visade tidigt stor fallenhet för matematik och mellan 1821-1824 studerade han matematik i Kristiania (nuvarande Oslo) och sedan mellan 1825-1827 Berlin och i Paris.

Fortfarande kvarstod frågan att avgöra vilka ekvationer som var lösbara. Man ville ha något kriterium för att avgöra om en given ekvation var lösbar eller ej.

Den som lyckades med detta var fransmannen *Evariste Galois*. Hans banbrytande arbete lade grunden för den "*moderna algebran*" och de flesta matematikinstitutioner erbjuder en högre kurs i *Galoisteori*.

Evariste Galois föddes 25 oktober 1811 nära Paris och visade också tidigt en enorm fallenhet för matematik. 1828 började han på École Normale efter att två gånger ha misslyckats att bli antagen till École Polytechnique. Han lämnade flera artiklar till den franska vetenskapsakademin som refuserades eller slarvades bort.

Som antydde i inledningen dog E Galois mycket ung i en pistolduell och kvällen innan skrev han ner alla staser mm som han hade i huvudet och gav till en vän. Dessa anteckningar är mycket svårlästa och än idag är inte allt förstått. Men 4 juli 1843 förklarade *Joseph Liouville* att han bland Galois' efterlämnade papper funnit bevisade satser om lösbarheten av polynomekvationer.

Det kräver långa algebrastudier för att förstå hur Galois gjorde men hans metod byggde på permuteringsegenskaperna hos ekvationens rötter.

Mer information kan finnas under Biennal 2008 på www.ingvet.kau.se/~thomas

Litteratur

Boyer, Carl B, Merzbach, Uta C.: *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, 1989.

Burton, David M.: *The History of Mathematics*, Wm. C. Brown Publishers, 1991.

Stewart, I.N.: *Galois Theory*, Taylor & Francis Ltd, UK, 2003