

Hur lär vi oss matematik?

Ingemar Holgersson är universitetslektor och lärarutbildare vid Högskolan Kristianstad. Han är särskilt intresserad av hur vi lär matematik, och försöker följa forskningen på området. Han är också ledare för ett projekt i Svedala kommun som kallas Gränsöverskridande matematikundervisning.

I föredraget diskuterar jag hur vi lär oss matematik med utgångspunkt i en del nya resultat från psykologisk och matematikdidaktisk forskning, som ger anledning att ifrågasätta traditionella sätt att uppfatta, organisera och förstå lärande i matematik.

Av tradition undervisas matematik genom att vi som vet hur man gör (eller läromedlet) genom exempel visar före, och där eleverna genom att göra likadana exempel förväntas lära sig den aktuella färdigheten (dvs denna typ av uppgifter). Ett typexempel ger introduktion av standardmetod – så här gör man. Därefter får eleverna själva prova på liknande uppgifter. Övning ger färdighet och likadana uppgifter ger mästring. Så får man något svårare, och ev blandade uppgifter, och problemlösning används som tillämpning av inlärd teknik eller formler. Har man svårt att klar uppgifterna får man öva mer, och eventuellt dela upp dem i mindre bitar och öva dem var för sig, ungefär som när man lär sig spela piano. Man kan se detta Visa före - Göra efter-paradigm som en form av lärlingsskap med fokus på färdigheter.

Denna tradition är problematisk på flera sätt. Det har alltid funnits en spänning mellan vilken betydelse förståelse har för lärandet och vikten av mekanisk drill för att utveckla färdigheter. Men det finns ett annat problem som blir mer och mer akut i dagens samhälle, och det är dess roll när det gäller att utveckla lust till matematik och förtroende till egen förmåga. I paradigmet ligger egentligen väldigt lite positiv belöning eller stimulans. Klarar du av uppgifterna är det bara vad som förväntas av dig, men gör du det inte är det ett handfast besked om att du inte har den förmåga som förväntas. Med ett väldigt starkt fokus på färdigheter, som för eleven många gånger inte har meningsfulla kopplingar till annan meningsfull kunskap, blir detta inte särskilt stimulerande. Men även elever som har lätt för sig och klarar uppgifterna blir i detta paradigm lätt understimulerade. Uppgiften att göra efter ger väldigt lite intellektuell stimulans.

Vad är det då som driver lust till matematik? Enkelt uttryckt finns det ett par villkor som måste vara uppfyllda. Det får inte vara för enkelt, men inte heller för svårt. Det behövs en kontext och en problemställning som känns stimulerande eller utmanande. Avgörande här tycks inte vara ifall den är vardagsbaserad eller ej, utan att den är begriplig och meningsfull.

En kärnpunkt är hur vi ser på vad det är man ska lära sig i matematik. Hur viktig är förståelse och vilken vikt har färdigheter. Ser man till kursplanen i matematik för grundskolan präglas strävansmålen av en betoning av att utveckla kompetens, medan uppnåendemålen har en tydlig tendens att fokusera enbart på färdigheter. Inom den matematikdidaktiska forskningen finns det idag en ganska entydig bild av att lärande i matematik handlar om att utveckla meningsfull kunskap och kompetens. För att detta ska kunna ske behöver elevers förmåga att resonera och utveckla strategier i samband med problemlösning eller undersökande aktiviteter stimuleras. En sådan undervisning kan då enligt John Mason vid Open University och Anne Watson vid universitetet i Oxford bygga på en kultivering av naturliga förmågor, såsom

- Att se, upptäcka och föreställa sig olika mönster t ex tal,figurer, ...

- Att kunna uttrycka dessa mönster i ord, bild, handling, symboler ...
- Att arbeta med specialfall för att se mer generella mönster
- Att formulera hypoteser om generella samband eller ej
- Att modifiera hypoteser för att försöka övertyga sig själv och andra

Även små barn har tillgång till dessa förmågor.

Ett annat tema inom forskningen, kanske framför allt den psykologiska är variationen inom lärandet även i matematik. Det gäller variation och skillnader mellan individers sätt att lära, men också att vi som individer inte fungerar som datorer som alltid löser samma uppgift på samma sätt.

Robert Siegler på Carnegie-Mellonuniversitetet i Pittsburgh har i ett par översiktsartiklar diskuterat just denna variation i lärandet av olika strategier för att lösa olika uppgifter inkluderande många studier i aritmetik. Dessa översikter bygger på studier inom såväl utvecklings-, kognitions- och neuropsykologi som pedagogisk psykologi.

Variation förekommer hos ett barn i alla typer och på alla nivåer av lärande, men den är stor i alla åldrar från spädbarn till åldring. Den tenderar att vara cyklisk, ibland är lärandet mer intensivt ibland mindre, och den tenderar vara störst i perioder när vi lär oss intensivt. Lärandet kan bestå av att man utvecklar nya strategier för att lösa en typ av uppgift eller av en större användning av avancerade strategier, som man tidigare bara använt ibland. Det kan också bestå i större förmåga att välja en lämplig strategi eller i en större säkerhet i användningen av en strategi.

Men att lära nya förmågor innebär inte att "poletten trillar ner" och vi i fortsättningen är använder det vi senast lärt. Tvärtom. Nya förmågor används ofta inte konsistent, erövrandet av förmågan tar ofta tid. Benägenheten att använda den beror också på hur överlägsen den är de gamla förmågorna. Hur lång tid det tar beror på vad som lärs och förändringen kan vara omedelbar eller ske mycket gradvis över flera år.

Att förstå orsakssamband spelar en avgörande roll i lärandet, och att förklara det man observerar ger ofta mer utbyte än vad feedback och övning ger. Lärandet drivs om eleven är engagerad oftast av begreppslig förståelse och inte genom trial and error.

Ann Dowker vid universitetet i Oxford, England, har gjort en översikt över studier om aritmetisk förmåga med särskild tonvikt på särskilda svårigheter med aritmetik. Ett särskilt fokus för hennes studie är de individuella variationer som finns. Det hon finner är att det inte finns belägg för att påstå att det finns inte en aritmetisk förmåga. Tvärtom. Eftersom aritmetik är beroende av många olika sorters processer kan man bara påstå att det finns aritmetiska förmågor, och här kan individer ha väldigt olika profiler. Dessa förmågor kan grupperas i t ex procedurala (t ex olika former av beräkningsprocedurer), minnesberoende (t ex tabeller, terminologi) och begreppsliga (t ex samband mellan olika sorters problem, principer, uppskattning). Prestationerna påverkas också av både sociala förhållanden, kultur och undervisning, men även emotionella faktorer påverkar i hög grad.

Om man ändå pratar om aritmetisk kompetens behöver man alltså inkludera mer än bara färdigheter utan även förståelse och förmåga att se samband mellan olika uppgifter. Traditionella tester har ofta en väldigt ensidighet på färdigheter. De behöver alltså kompletteras med fler dimensioner av kunnande och fler dimensioner av kontexter. Så kan

man t ex tänka sig uppgifter som testar förmågan att använda, förklara och värdera aritmetisk information.

När det gäller vad vi gör i klassrummen är problemet med Visa-före-Göra-efter-paradigmet dess mycket ensidiga fokus på slutna uppgifter där målet är att komma fram till det rätta svaret. Inom olika utvecklingsprojekt världen över försöker man hitta alternativa aktiviteter som bygger på och stimulerar elevers förmåga att tänka matematiskt.

I Australien har Peter Sullivan och andra funderat på hur bra frågor i matematik ser ut. Deras svar är att det är frågor:

- som kräver mer än att komma ihåg fakta eller reproducera en färdighet
- där elever kan lära genom att arbeta med frågan, och läraren lär mer om varje elev genom att se hur de arbetar med frågan
- där det kan finnas mer än ett acceptabelt svar

Ett viktigt arbete för utveckling av en mer lustfylld matematik med fokus på utveckling av matematisk kompetens är därför att skapa erfarenheter av arbete med öppna uppgifter. Detta är uppgifter som startar i en begriplig kontext som engagerar, och där det finns ett problem med flera möjliga lösningar. Arbetet med sådana uppgifter ger eleverna tillfälle att utveckla systematiska sätt att arbeta. Det ger även möjligheter att reflektera över de mönster som går att se i de olika lösningarna och därmed lätt upphov till nya frågor.

Fördelar med ett sådant arbete som bygger på kultivering av naturliga förmågor blir enligt John Mason och Anne Watson att det blir mer lärande (och självtillit) om elever får använda dessa förmågor, än när de ska göra precis likadant som läraren eller läroboken visat. I princip är det så att ju mer tillrättalagd en uppgift blir, desto mindre behållning blir det för eleven. När elever får arbeta med uppgifter där de har möjligheter att välja hur de ska göra, uppstår kreativitet och det matematiska tänkandet stimuleras och utvecklas.

I föredraget ges exempel på hur vi i projektet *Gränsöverskridande matematikundervisning (GÖMU)* i Svedala kommun arbetar med att stimulera lärare i både förskola och grundskolans tidigare och senare år att utveckla en matematikundervisning i enlighet med de internationella rön och erfarenheter som beskrivits ovan.

Ett urval av referenser:

Butler, O.E. & Sullivan, P. (2002) Good Questions for Math Teaching: Why Ask Them and What to Ask, K-6. Math Solutions Publications.

Dowker, A. (2005) Individual Differences in Arithmetic: Implications for Psychology, Neuroscience, and Education. Psychology Press.

Mason, J. (2002) Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing. Falmer Press.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006) Designing and using Mathematical tasks. Tarquin. Isbn 1899618678.

[Siegler, R. S. \(2006\)](#). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon & R. M. Lerner (Series Eds.) & D. Kuhn & R. S. Siegler (Vol. Eds.), *Handbook of child psychology: Volume 2: Cognition, perception, and language* (6th ed., pp. 464-510). Hoboken, NJ: Wiley

[Siegler, R. S. \(2007\)](#). Cognitive variability. *Developmental Science*, 10, 104-109.