

Mandatfördelning i Sveriges riksdag och Europaparlamentet

Jesper Carlström

1 Inledning

När ett val närmar sig är det roligt att ägna en matematiktimme åt problemet: hur fördelar man rättvist ett antal platser (mandat) mellan partier på grundval av valresultatet? Problemet kan tyckas enkelt, men ju mer man gräver i det, desto ostadigare upptäcker man att marken är. Efter en stund vet man inte ens vad ”rättvist” betyder.

Ser man sig om i världen märker man också att det finns nästan lika många sätt att fördela mandat som det finns länder. Låt oss hålla oss till den nuvarande svenska modellen. Till att börja med eftersträvas en proportionell representation, det vill säga att om ett parti har fått 37 procent av rösterna så ska det ha 37 procent av mandaten, och så vidare. Så långt verkar allt enkelt, men det går ju inte att få exakt 37 procent av riksdagens 349 mandat, eftersom det skulle innebära 129,13 mandat. Man måste därför avrunda. Så man ger partiet 129 mandat. Eller? Nu kommer vi till den första poängen. Vi har en idé, att avrunda, men vi undrar om idén fungerar. För att närma oss detta problem är det bra att göra oss av med alla svårhanterliga siffror. Vi skapar därför ”leksaksexempel”: gör röstsiffrorna lite mer tillrättalagda och mandatantalet mindre. Den matematiska insikten är att för att begripa hur något ska gå till kan man börja med att undersöka enkla fall. Principer som inte fungerar i enkla fall lär inte göra det i svårare fall heller.

Antag därför att vi har tre röstande, som avger en röst var, på varsitt parti, och att vi ska fördela två mandat. Då bör varje parti ha $2/3$ mandat, vilket avrundat blir ett mandat var. Men då blir ju inte summan två mandat utan tre! Vilket parti ska man nu bestjäla mandatet? En vallag måste naturligtvis vara utformad så att detta är reglerat i förhand. Vi lär av detta exempel är att vi inte kan förvänta oss att avrundning fungerar smärtfritt, så vi måste modifiera idén.

2 Alabama-paradoxen

En möjlighet är den så kallade Hamiltons metod, även kallad största-rest-metoden. Man avrundar då alltid nedåt, så att man aldrig kan dela ut för många mandat, och delar ut de överblivna mandaten till de partier som har störst rest. Låt mig illustrera detta med ett exempel: Säg att vi har tre partier: (a), (b), (c). Vi ska dela ut tre mandat och har röstetal enligt följande: (a) 31 röster, (b) 31 röster, (c) 10 röster. Totalt har vi alltså 72 röstande, så ”priset” för ett mandat är $72/3 = 24$ röster. Vi delar därför ut ett mandat till (a) och ett mandat till (b). Vi har nu ett överblivet mandat som ska delas ut till det parti som har störst rest. För partiet (a) är resten 7 ($31 = 1 \cdot 24 + 7$), liksom för (b). För partiet (c) är resten däremot 10, så detta parti har den största resten och får därför det tredje mandatet. Denna idé fungerar uppenbarligen, men är den bra? Får den önskade resultat?

Man kan invända mot metoden att den lider av ”Alabama-paradoxen”. Man använde metoden i USA för att fördela platser mellan staterna i representanthuset, men när man en gång utökade antalet platser så ledde det till att Alabama fick färre platser än förut! Du kan själv

undersöka vad som händer med parti (c) i vårt föregående exempel om antalet mandat utökas från tre till fyra.

3 Uddatalsmetoden

Om man garanterat vill undvika Alabama-paradoxen, det vill säga vara säker på att inget parti någonsin kan bli av med mandat för att vi delar ut fler, så delar man ut ett mandat i taget. På detta sätt skapas en lista över i vilken ordning mandaten delas ut och för att se vilka som får plats i församlingen är det bara att läsa överst på listan. Vill man utöka församlingen så använder man bara en större del av listans topp, så Alabama-paradoxen kan inte inträffa.

Det finns nu flera olika metoder för att dela ut mandat på detta sätt. Avsikten med dem alla är att försöka skapa en ordning som är ”rättvis” med avseende på röstetalen, men beroende på vilken rättviseaspekt man anser viktigast så leds man till olika resultat. Låt oss se hur man kan argumentera för den svenska metoden (som egentligen är fransk och vars upphovsman var den som insåg att humlor inte borde kunna flyga: André Sainte-Laguë).

Vi betecknar två partier med i, j och deras röstetal (antalet röster) med r_i respektive r_j . Vi antar att ett antal mandat redan har delats ut och att det är dags att dela ut ett till. Vi ställer oss därför följande fråga: om något av dessa två partier ska ha nästa mandat, vilket av dem är i så fall i störst behov av ett? Om m_i betecknar det antal mandat som parti i redan fått, och m_j betecknar det antal mandat som parti j redan fått, så borde vi försöka se till att antalet mandat blir följande när vi har delat ut ett mandat till:

$$\frac{r_i}{r_i + r_j}(m_i + m_j + 1) \quad \text{respektive} \quad \frac{r_j}{r_i + r_j}(m_i + m_j + 1). \quad (1)$$

Denna fördelning ger ju nämligen en perfekt proportion mellan partierna, i den meningen att andelen mandat är exakt detsamma som andelen röster. Det är dock sällan möjligt att uppnå eftersom dessa tal sällan är heltal. Om vi däremot ställer frågan vilket av de båda partierna som bör ha företräde att få det nya mandatet, så kan vi rimligen svara att det parti som saknar flest mandat för att bli riktigt representerat bör ha det nya mandatet.

Vi betraktar alltså olikheten

$$\frac{r_i}{r_i + r_j}(m_i + m_j + 1) - m_i > \frac{r_j}{r_i + r_j}(m_i + m_j + 1) - m_j \quad (2)$$

och väljer att anse parti i ha företräde framför parti j om olikheten är sann. Nu gäller det att inse att olikheten (2) är ekvivalent med

$$\frac{r_i}{2m_i + 1} > \frac{r_j}{2m_j + 1}. \quad (3)$$

För att se det är det bara att steg för steg förenkla (2). I olikheten (3) ser man att varje parti i har ett tal

$$\frac{r_i}{2m_i + 1}, \quad (4)$$

det så kallade jämförelsetalet, som kan användas för att jämföra det med andra partier. Man får alltså jämförelsetalet genom att dela röstetalet med 1, 3, 5, 7, 9 och så vidare i takt med att allt fler mandat delas ut, därav namnet ”uddatalsmetoden”.

Notera att jämförelsetalet är helt oberoende av andra partiers röstetal och utdelade mandat. Trots att vi kom fram till jämförelsetalet för parti i genom en jämförelse med parti j, kommer det alltså att vara detsamma vid jämförelse med alla andra partier. Vi kan därför ordna partierna efter deras jämförelsetal och hela tiden dela ut nästa mandat till det parti som har störst jämförelsetal. En omedelbar iakttagelse är att motiveringen vi givit bara involverar proportionalitet parvis mellan partierna. Detta är inte nödvändigtvis detsamma som global proportionalitet. Antag att ett parti har 51 % av rösterna och sju partier har 7 % var. Om vi delar ut elva mandat, så får det stora bara fyra av dessa, trots att 5,61 mandat vore 51 % av mandaten. Medan det stora partiet alltså har egen majoritet av rösterna, skulle det få en klar minoritet av mandaten.

Det här illustrerar problemet med vad ”rättvisa” är. I motiveringen betraktade vi partier parvis och leddes till en metod som skulle ge ett så rättvist förhållande som möjligt mellan dem. Men om partier går i koalition är metoden tydligen ”orättvis” ur en annan synvinkel: en koalition av sju partier kan få sju mandat av elva trots att den bara har 49 % av rösterna.

Nu vet vi alltså att uddatalsmetoden inte alltid kommer så nära ”global” proportionalitet som möjligt. I vårt exempel fick vi felet $5,61 - 4 = 1,61$ mandat från perfekt proportion. Hur stor kan avvikelserna bli? Om M är det totala antalet utdelade mandat och R är det totala antalet avgivna röster, och n antalet partier som deltar i utdelningen, så är [1, s. 7, sats 8]

$$m_i \approx M \cdot \frac{r_i}{R} \quad (5)$$

med ett fel som är högst

$$\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{r_i}{R}. \quad (6)$$

Om alltså $r_i/R = 0,51$ och $n = 8$ som i exemplet ovan, är felet högst

$$\frac{1}{2} + \frac{8-2}{2} \cdot 0,51 = 2,03. \quad (7)$$

Denna felgräns är oberoende av hur många mandat vi delar ut, så i takt med att vi delar ut fler kommer proportionen att bli allt bättre. Summan av (6) taget över alla partier är $n - 1$, så i genomsnitt är felet mindre än ett mandat.

4 Verklighetens kompromisser

Så långt uddatalsmetoden, men i verkligheten används också en rad justeringar. För det första har man ersatt den första divisorn med 1,4, så att jämförelsetalen fås genom att man delar röstetalet med 1,4, 3, 5, 7, och så vidare. Man kallar denna justering för ”jämknings”. Skälet till den är smutsig politik: man upptäckte att om man jämkade första divisorn skulle kommunisterna få färre mandat. Någon mer principiell motivering än så tycks inte ha funnits. För det andra har man infört småpartispärrar för att hålla nere antalet partier. För Europaparlamentet är dessa justeringar de enda. För riksdagen har man också komplicerat

saken genom att dela in landet i valkretsar och tilldela dem fasta mandat, samt reserverat 39 stycken mandat som så kallade "utjämningsmandat". Det är mycket svårt att få någon matematisk överblick över hur detta system fungerar. Alla försök att bevisa att det ger en ganska proportionell fördelning måste misslyckas, vilket existensen av ett motexempel visar: det är teoretiskt möjligt (men extremt otroligt) att ett parti får 1 % av rösterna men egen majoritet i riksdagen [1, s. 14]. I själva verket är justeringarna nu så många att de i normalfall tar ut varandra, så att man egentligen kunde avvara dem. Det visades genom simuleringar i ett projektarbete på gymnasiet [3].

5 Pedagogiska poänger

Bortsett från att det alltid är tacksamt att utgå från ett konkret problem och göra matematik av det, vill jag gärna peka ut ett antal poänger. För det första är det värdefullt att visa hur matematik kan användas utanför naturvetenskaperna. För det andra illustreras här hur komplex problemlösning alltid går till. Man börjar med lösa önskemål och heuristiska motiveringar, vilket leder till en idé om en metod. Men man kan inte vara säker på att metoden gör vad man vill, så man försöker bevisa satser om den. Det är slutligen satserna som gör att vi kan avgöra om metoden är bra. Under resans gång upptäcker man också att till synes enkla begrepp kan behöva problematiseras.

Referenser

- [1] J. Carlström, Kommentarer om mandatfördelningen i riksdagen.
<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se-2007-16>.
- [2] S. Linusson, Uddatalsmetoden och valsysteem, i Människor och matematik – läsebok för nyfikna, NCM 2008.
- [3] F. Carlström, Ett nytt sätt att fördela mandaten i riksdagen, projektarbete på gymnasienivå, 2007.