130 och 323

Är du ute och cyklar – bra i så fall! ... om undervisning av algebra i skolan.

Stefan Löfwall är universitetsadjunkt vid Karlstads universitet och undervisar i matematik och matematikdidaktik. Han arbetar också med kompetensutveckling av yrkesverksamma lärare och har tidigare arbetat som lärare på gymnasie- och grundskola.

Inledning

Algebra i skolan är ett område med alltför lite förståelse och det upplevs mycket abstrakt. Hur man skriver om och förenklar uttryck dominerar i läroböckernas uppgifter – ändå har elever stora brister just i algebraiska förenklingar. Hur kan man arbeta annorlunda med algebran?

Viktiga steg

När man ska lära sig algebra är det några olika steg som måste länkas ihop för att det hela ska fungera bra. *Ett* av stegen handlar om att utföra algebraiska förenklingar. Men – får det här steget dominera nästan totalt riskerar vi alltför liten förståelse för det som görs och en känsla av att det inte har någon konkret anknytning. Algebran upplevs då som abstrakt och svår att ta till sig. Är ett algebraiskt uttryck, som sedan ska förenklas, färdigserverat från början berövas man det viktiga steget att utifrån en situation – ett upptäckt mönster, t ex – översätta situationen till ett algebraiskt uttryck. Vi ska se närmre på vad det handlar om via ett kanske välkänt exempel.

Exemplet handlar om ett månadsblad i en almanacka. Vi väljer ut fyra intilliggande datum i en kvadrat, t ex enligt följande:

5	6
12	13

Adderar vi datumen diagonalt får vi 5+13 = 18 och 6+12 = 18. Diagonalsummorna blev lika! En tillfällighet? Ett nytt försök ger också lika stora diagonalsummor. Upptäckten gäller kanske generellt oavsett var man väljer sin kvadrat i månadsbladet. Vi översätter situationen med hjälp av algebraiska symboler:

n	n+1
n+7	n+8

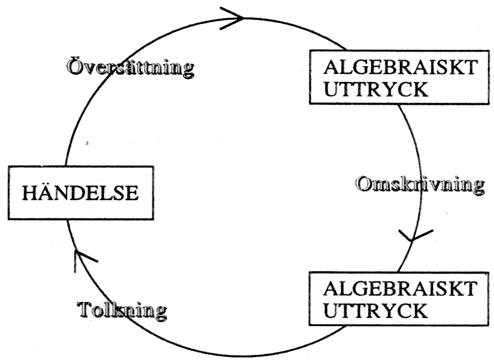
Den första diagonalsumman blir n+(n+8) = 2n+8 och den andra (n+1)+(n+7) = 2n+8. Ja, summorna blir lika! Vi väljer nu en ny kvadrat, men då har jag täckt över tre av de fyra rutorna.

17	

Beräkna nu summan av datumen i diagonalen från det övre högra hörnet till det nedre vänstra! Hur gjorde du? Några kanske säger att i nästa ruta till höger står 18 och under 17 står 17+7, d v s 24, och 18 + 24 blir 42. Andra har tolkat uttrycket för summan, 2n+8; d v s att summan blir 2 gånger talet i första rutan plus 8 och får den till 42. Den förståelsen vill vi ha! Vi flyttar sedan övertäckningen till ett nytt ställe och bestämmer en ny diagonalsumma genom att använda den senare metoden en gång till.

Den algebraiska cykeln

Det här exemplet är bra, men mitt huvudsyfte var att använda det som en illustration av de olika stegen, de som ofta beskrivs i den så kallade algebraiska cykeln (Bergsten m fl, 1997).

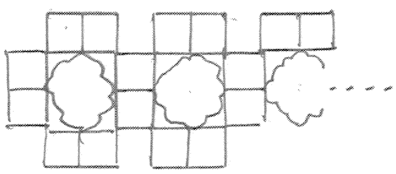


Vi startade med händelsen att vi upptäckte att diagonalsummorna var lika, översatte datumen till generella algebraiska symboler, fick två algebraiska uttryck för summorna, skrev om uttrycken så att vi fick nya algebraiska uttryck – som blev lika – tolkade därefter det nya algebraiska uttrycket för diagonalsumman när tre av de fyra rutorna täckts över för att göra en beräkning i en ny händelse.

Ser man i läroböckerna försummas ofta faserna ”översättning” och ”tolkning”. Symbolerna i dessa exempel har ingen mening och det framräknade uttrycket säger oss ingenting. ”Varför ska man använda bokstäver när det finns siffror?” är en talande kommentar från en del elever.

Under tidigare skolår talar man ofta om vikten av god taluppfattning eller god talkänsla, något som har stor betydelse för bl a självförtroendet i matematik. Lite högre upp i åldrarna utvidgas detta till god algebrauppfattning eller god känsla för algebra, senare också god känsla för olika funktioner. För att få denna goda algebrauppfattning behöver den algebraiska cykelns alla delar finnas med.

Andra bra exempel som tränar cykelns olika delar kan vara olika typer av mönsteruppgifter, t ex följande uppgift som handlar om hur många plattor som går åt runt träden i nedanstående plantering.



- Hur många plattor behövs runt a) två träd b) tre träd c) 20 träd?
- Skriv ett allmänt samband som visar hur man kan räkna ut hur många plattor som behövs om har n st träd!
- Hur många plattor behövs runt 100 träd?

Beroende på hur man tänker kan man få det allmänna sambandet antingen via en förenkling eller direkt. Dessa olika lösningar kan diskuteras. Man kan se att de olika faserna i den algebraiska cykeln finns med.

Dra in eleverna!
En poäng är att också ta upp den algebraiska cykeln med eleverna! Naturligtvis är detta inte det första man gör när man kommer in på algebra. Men – den hjälper eleverna att lära sig mer om sitt eget lärande; de får ett bättre metaperspektiv: Vad går det här ut på, hur hänger de olika delarna ihop, var har jag min styrka, vilken länk är min svaghet etc. Ett bra metaperspektiv är också en förutsättning för att eleverna ska kunna ta ett större eget ansvar för sitt lärande (Åkesson, 1997).

Ytterligare några exempel
Produkten $21 \cdot 48$ ger samma resultat som den produkt vi får om vi kastar om ordningen på siffrorna i faktorerna, d v s $12 \cdot 84$. Gäller den principen för alla produkter? Vi märker rätt snabbt att den principen bara gäller ibland. Vad krävs för att den ska gälla?

Händelsen att produkten av två tvåsiffriga tal, ”ab” och ”cd”, blir lika om man kastar om ordningen av siffrorna ska översättas till algebraiska symboler. De tvåsiffriga talen är ”ab” = 10a + b, ”cd” = 10c + d. Om det sedan ska gälla att $"ab" \cdot "cd" = "ba" \cdot "dc"$, vad krävs då av siffrorna? De två produkterna ger följande algebraiska uttryck i en ekvation:

$$(10a+b)(10c+d) = (10b+a)(10d+c)$$
$$100ac + 10ad + 10bc + bd = 100bd + 10bc + 10ad + ac$$
$$99ac = 99bd$$
$$ac = bd$$

Hur ska vi tolka resultatet? Jo, produkten av tiotalssiffrorna ska vara lika med produkten av entalssiffrorna. Då fungerar det! Vi kontrollerar att det stämmer i vårt inledande exempel. Sedan vill vi använda vårt resultat i en ny situation: Visa fler exempel på produkter där principen stämmer!

Man kan bygga på uppgiften och fråga sig om något liknande gäller för addition av tvåsiffriga tal. Ja, i exemplet 27 + 61 = 72 + 16 kan vi kasta om ordningen på samma sätt. Här kan vi göra en motsvarande undersökning som för multiplikationsexemplet. Dessutom: Summan blir 88 i vårt exempel. I 32 + 56 = 23 + 65 blir summan också 88! Är det en tillfällighet att summan blir 88?

Ett av mina absoluta favoritexempel i det här sammanhanget handlar om tändstickorna i en tändsticksask: Kasta ut några fulla askar i klassrummet, be dem som fångar askarna att plocka ur ett valfritt antal tändstickor så att jag inte vet hur många som finns kvar efter det. Be dem därefter att räkna hur många tändstickor som är kvar i asken och beräkna siffersumman av detta antal. Be dem därefter att också ta bort det antal tändstickor som motsvaras av siffersumman och tänk efter hur många tändstickor som sedan är kvar i asken. Om jag nu är vältränad kan jag gå omkring och skaka askarna, lyssna noggrant, och säga hur många tändstickor som finns i var och en! Spännande och roligt – och en fin illustration av den algebraiska cykeln!

En klassisk laboration handlar om att laborera med rektanglar, beskriven av den ungerska matematikdidaktikern Dienes (1961), refererad på svenska bl a av Nilsson (1996). Den är användbar på olika nivåer beroende på att den är tänjbar, främst från grundskolans senare år till de första gymnasiekurserna. Även för de senare kurserna på gymnasieskolan går det att göra uppgifterna svåra nog. Laborationen består av två delar. Till denna laboration har jag skrivit en separat handledning där jag också tar upp såväl egna didaktiska kommentarer som sådana som Dienes har lämnat.

Litteratur

Bergsten,C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997): NämnarenTEMA-*Algebra för alla*. Göteborg: Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs universitet.

Dienes, Z. (1961): Building Up Mathematics. London: Hutchinson Ed. LTD.

Nilsson, M. (1996): Matematikundervisning i gymnasieskolan, del II. Malmö: Lärarhögskolan i Malmö.

Åkesson, J. (1997): *ANSVAR – hur lär man sig det*? Kristianstad: Institutionen för beteendevetenskap. Högskolan i Kristianstad.