

Hvordan tall blir til variable i arbeid med generalisering

Frode Rønning er professor i matematikk ved lærerutdanningen, Høgskolen i Sør-Trøndelag, Trondheim.

Innledning

Noe av det mest sentrale i det å utvikle matematisk tenking er å utvikle evnen til å generalisere. John Mason har skrevet at "generalisation is the heartbeat of mathematics" og at matematisk tenking ikke finner sted med mindre elevene blir gitt mulighet til å arbeide med å uttrykke sine generaliseringer (Mason, 1996).

For å kunne uttrykke generaliseringen på en effektiv måte er det nødvendig å bruke et matematisk språk, og her kommer algebra inn som et nyttig og nødvendig redskap. Gjennom regning med tall, med algebraisk tenking i bakgrunnen, er det mulig å gjøre skillet mellom tallregning og algebra utydelig, og tallene vil etter hvert vil stå fram, ikke som bestemte tall, men som representanter for tall (variable).

Små barn synes åpenbart å ha evnen til å generalisere, og de utnytter den stadig for å utvide sine kunnskaper på mange områder i livet. For en matematikklærer blir utfordringen å utnytte, bevare og videreutvikle denne evnen i forbindelse med å lære matematikk.

Aspekter ved algebra

I gjeldende læreplan for det norske skolesystemet (LK06, 2007) heter et av hovedområdene Tall og algebra. I beskrivelsen av dette hovedområdet står det at algebra generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall, og at dette gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Det står videre at algebra blir brukt i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner. Som kompetansemål allerede etter 2. årstrinn står det at eleven skal kunne gjenkjenne, samtale om og videreføre strukturer i enkle tallmønstre. Det er derfor belegg for å si at algebraisk tenking skal være en del av matematikkundervisningen helt fra starten av skoleløpet.

Kaput (1999, min oversettelse) har beskrevet fem ulike aspekter ved algebraisk tenking:

1. Algebra som generalisering og formalisering av mønster og betingelser
2. Algebra som manipulasjon av formalismer
3. Algebra som studium av strukturer abstrahert fra utregninger og sammenhenger
4. Algebra som studium av funksjoner, relasjoner og samvariasjon
5. Algebra som språk for modellering av fenomener og situasjoner

I formuleringene fra den norske læreplanen kan en finne elementer av både punkt 1, 3, 4 og 5. Det er interessant å merke seg at punkt 2, formell manipulasjon av symboler, ikke er eksplisitt nevnt. Likevel er det kanskje dette punktet det brukes mest tid på i skolen etter at algebra som tema formelt er innført. I tillegg til det å løse likninger er det nok likevel dette som de fleste elever forbinder med algebra. For ulike aspekter ved algebra, se også Bednarz, Kieran og Lee (1996).

Bokstavsymbolene har ulike roller avhengig av hvilke aspekter ved algebra som studeres. Når algebra betraktes som generalisert aritmetikk, ser en på bokstavene som generaliserte tall i betydningen at de kan erstattes med vilkårlige tall, slik som når man illustrerer den kommutative loven for addisjon eller multiplikasjon. Når algebra brukes i forbindelse med å studere sammenhenger, representerer bokstavene variable størrelser, der én størrelse kan avhenge av en annen (avhengige og uavhengige variable). Dette kan kalles *funksjonsaspektet* ved algebra (punkt 4 ovenfor). En tredje rolle kan oppstå dersom man modellerer en situasjon, og denne prosessen gir opphav til en likning som inneholder en størrelse som er ukjent. Bokstavsymbolet står da for en fast, men hittil ukjent størrelse. Det vil si at størrelsen er ukjent helt til man har løst likningen.

Bokstavsymbolenes ulike roller kan kobles til de ulike aspektene ved algebra som er gjengitt ovenfor, men igjen særlig i forhold til punktene 1, 3, 4 og 5. Punkt 2 framstår som prosedyrekunnskap (Hiebert & Lefevre, 1986) som er nødvendig for å behandle de algebraiske uttrykkene som oppstår når man arbeider innenfor de andre aspektene.

Å uttrykke mønster gjennom generalisering

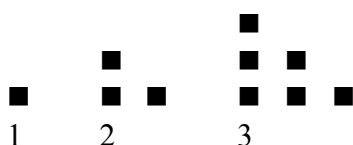
Sentralt i all matematikkundervisning er bruken av eksempler. Fra lærerens side er eksemplene ment å vise en struktur eller en sammenheng – de er eksempler *på* noe. For eleven, som ikke kjenner strukturen eller sammenhengen, er de imidlertid bare enkeltstående eksempler. Ved å arbeide med glidende overganger mellom tall og variable kan en oppnå at strukturen trer fram gjennom de spesielle eksemplene. Det er dette John Mason kaller *å gå fra det spesielle til det generelle* (Mason, 2005). Nedenfor er vist et eksempel som kan gi opphav til en struktur.

$$3 + 4 + 5 = 3 \cdot 4$$

Noen spørsmål som en kan stille med utgangspunkt i dette eksemplet kan være:

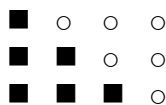
- Hva kan dette være et eksempel *på*?
- Hva er den bakenforliggende strukturen?
- Hvilken rolle spiller de ulike tallene?
 - Er de to 3-tallene de samme?
 - Er de to 4-tallene de samme?
- Hva er fast – hva endrer seg?
- Prøv med andre tall, $4 + 5 + 6$ – hva skjer?
- Prøv med flere tall i summen – hva skjer?

En annen måte å generalisere et mønster kan være å ta utgangspunkt i en tallfølge, som også ofte kan representeres ved såkalte figurtall. Et kjent eksempel på figurtall er *trekantttallene* som kan illustreres slik som vist på figuren nedenfor. De tre første trekantttallene er vist.



La nå T_n betegne trekantttall nr n . Da kan T_n uttrykkes som $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Dette uttrykket kan

begrunnes ved å betrakte for eksempel trekantall nr 3 slik:



Her ser en at to kopier av det samme trekantallet danner et rektangel der den ene sidekantens lengde tilsvarer trekantallets nummer (n), og den andre sidekantens lengde tilsvarer én mer enn trekantallets nummer ($n + 1$). Rektanglet har altså areal $n(n + 1)$. Dette er ikke spesielt for trekantall nummer 3 – en tilsvarende struktur kan finnes for de andre trekantallene. Dette gjør eksemplet til mer enn bare et eksempel. Det er et *generisk eksempel* (Balacheff, 1988) – et eksempel som viser den generelle strukturen. I dette eksemplet er det funksjonsaspektet ved algebra som er rådende.

Jeg vil i presentasjonen gi eksempler på ulike måter å uttrykke mønster gjennom generalisering og gjennom en rekke eksempler la deltakerne selv erfare hva det vil si å arbeide med generalisering og med å uttrykke denne.

Litteratur

- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (red.), *Mathematics, teachers and children* (ff. 216-230). London: Hodder and Stoughton.
- Bednarz, N, Kieran, C., & Lee, L. (red.). (1996). *Approaches to algebra*. Dordrecht: Kluwer.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. I J. Hiebert (red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (ff. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. I E. Fennema & T. Romberg (red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (ff. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- LK06 (2007). *Læreplanverket for kunnskapsløftet*. Lastet ned 07.01.2008 fra http://www.utedningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_UtdProgrFag.aspx?id=2103
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (ff. 65-86). Dordrecht: Kluwer.
- Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Paul Chapman Publ.