

## Avancerade räknare – naturliga verktyg i matematikundervisningen

*Per-Eskil Persson* är fil. lic. i matematik och lärande och är verksam vid Lärarutbildningen inom Malmö Högskola. Han har en mångårig erfarenhet som gymnasielärare och bedriver forskning kring algebralärande främst inom denna skolform.

Alltsedan räknarna introducerades i klassrummen har deras användning varit omdebatterad. Diskussionen om deras positiva, eller negativa, inverkan på elevers matematikkunskaper har återuppväckts varje gång en ny och ofta mer avancerad räknartyp gjorts tillgänglig. Inte minst gäller det grafräknarna, som används allmänt i gymnasieundervisningen idag, och de symbolhanterande räknarna, som troligen är på väg in. I debatten målas två diametralt motsatta bilder upp av räknarnas roll i matematikundervisningen:

1. Räknare har en negativ inverkan på elevers matematikkunskaper. De medför att eleverna inte förstår de beräkningar de gör, utan godtar vilka svar som helst. Räknarna försämrar förmågan att räkna i huvudet och med papper och penna, och därför har elever numera sämre färdigheter i matematik. Den utbredda användningen av räknare i grundskolan och gymnasiet bådar inte gott inför framtiden!
2. Räknare har en gynnsam inverkan på elevers matematikkunskaper. Rätt använda hjälper de elever till en djupare förståelse för matematiska begrepp, stärker deras problemlösningsförmåga, gör dem mer självständiga i matematikarbetet och bidrar till att skapa en mer positiv attityd till matematikämnet. Dessutom stärks deras förmåga att lösa uppgifter med papper och penna. Den allt bättre tillgången på räknare i skolundervisningen bådar gott inför framtiden!

Naturligtvis kan inte båda bilderna stämma i förhållande till verkligheten, så vilken av dem är den mest korrekta? Till att börja med, vem framhåller den negativa bilden? Thunberg och Lingefjärd (2006) gick i en debattartikel i *Nämnan* till hårt angrepp mot vad de benämner avancerade räknare, alltså grafräknare och symbolhanterande räknare. De menar att ”*det utbredda och slentrianmässiga bruket av miniräknare i grund- och gymnasieskolans matematik*” (s. 11) är förödande för elevernas matematikkunskaper. Liknande åsikter har i olika tappningar framförts av andra matematiker, som helst vill se att man i skolan stannar vid gamla metoder som räkning med papper och penna.

### Teoretisk bakgrund

För att förstå räknarnas inverkan måste man se till rollen av *artefakter* i undervisningen. Räknarna kan placeras in i en sociokulturell kontext via begreppen *fysiska* och *psykologiska medierande verktyg*, som först beskrevs av Vygotskij (se också Säljö, 2005). Ett verktyg kan utvecklas till ett användbart *instrument* i en lärandeprocess som kallas *instrumentell genesis*, vilket kräver tid och ansträngning av användaren. Hon/han måste utveckla färdigheter i att känna igen uppgifter i vilka instrumentet kan användas och måste sedan genomföra dessa uppgifter med verktyget. För detta utvecklar användaren *instrumentationsscheman* som består av två komponenter, en *teknisk* och en *mental* del (Drijvers, 2003).

*Kognitiva verktyg* är framtagna för att stödja kognitiva processer, och är verktyg som kan förstärka elevers förmåga att tänka, lösa problem och ta till sig ny kunskap på flera sätt. Reznichenko (2007) ger exempel på deras funktion. De

- stödjer kognitiva och metakognitiva processer

- avlastar tänkandet på lägre kognitiv nivå så att kraften kan koncentreras till tänkande på en högre nivå
- ger möjlighet för elever att delta i kognitiva aktiviteter som annars skulle ligga utom räckhåll
- ger möjlighet för elever att ställa hypoteser och testa dessa i en kontext av problemlösning.

En grundläggande fråga när det gäller matematiklärande är vilka kognitiva system som är nödvändiga för att ge tillgång till matematiska objekt. Duval (2006) har konstruerat en modell med representationsregister som mobiliseras i matematiska processer. Han skiljer mellan två typer av transformationer av semiotiska representationer, ”*treatment*” (behandling) och ”*conversion*” (omvandling). ”*Treatments*” görs i samma register (t.ex. lösa en ekvation), och ”*conversions*” inbegriper byte av register (t.ex. rita grafen för en funktion). Hans viktiga hypoteser är dels att matematisk förståelse förutsätter en samordning av minst två semiotiska representationsregister, och dels att roten till problem med matematiklärande ligger i att förstå och att på egen hand kunna byta representationsregister. Det är, som jag ser det, lätt att inse hur räknare av olika typer underlättar och ger nya möjligheter för elever att arbeta både inom och mellan register i klassrumsundervisningen. I själva verket bör lärare aktivt arbeta med detta!

### Forskningsresultat

En rad sammanställningar och metastudier vad gäller användningen av räknare har gjorts under de senaste åren. I dessa har, utgående från ett stort antal artiklar och forskningsrön, försökt få fram de viktigaste resultaten, både av positiv och negativ natur. Exempel på sådana är Reznichenko (2007), Lagrange m.fl. (2003), Kulik (2003), Ellington (2003) och Burrill m.fl. (2002). Redovisningen av olika aspekter på räknar användningen är förstås omfattande, men det finns några viktiga punkter som återkommer. Elever som använder räknare

- blir aktivare i sitt sätt att arbeta med matematik
- ser problemlösning på ett nytt sätt när de befrias från rutinberäkningar, både numeriska och algebraiska
- är mer flexibla med problemlösningstrategier och representationsformer
- får en ökad förmåga att förstå och behärska matematiska begrepp
- förbättrar signifikant såväl problemlösning förmåga som förmåga att utföra beräkningar och operationer
- försämrar *inte* sin förmåga att räkna med papper och penna, utan visar i de flesta fall förbättring även i sådan färdigheter
- uppvisar en mer positiv attityd gentemot matematik än de som inte använder räknare.

För mig är det också, på grund av min forskning, av speciellt intresse vilken inverkan avancerade räknare har på elevernas förståelse av algebra och algebraisk symboler. Detta gäller naturligtvis i synnerhet de symbolhanterande räknarna. Förutom Drijvers (2003) har även t.ex. Bardini m.fl. (2004), Kieran & Drijvers (2006) samt Heid & Edwards (2001) beskrivit olika aspekter av räknarnas roll för algebran. Deras slutsatser är av liknande slag som punkterna ovan, men de pekar också på några problemområden.

Det finns i forskningen dokumenterade fall där användningen av räknare inte haft någon påvisbar inverkan på elevernas kunskaper, och faktiskt även några där den varit negativ. Dessa fall karakteriseras av ett eller flera av följande kännetecken:

- Eleverna har inte undervisats explicit i hur räknarna ska användas och har inte förstått deras begränsningar.

- Räkna har inte använts konsekvent och kontinuerligt i undervisningen, utan har bara tagits in i klassrummet vid enstaka tillfällen.
- Läraren har inte fått någon adekvat utbildning för att hantera räknarna i undervisningen, varken sett ut ett praktiskt eller didaktiskt perspektiv.
- Matematikundervisningen har inte anpassats för att utnyttja räknarna på ett riktigt sätt, utan den har genomförts precis som om eleverna bara hade papper och penna.

Räknare av olika typer kan alltså utgöra en väsentlig tillgång i matematikundervisningen, och är det också i de flesta fall. Men framgången är förenad med villkor!

### Framgångsfaktorer

Utifrån de slutsatser forskningen kommit fram till är det inte bara möjligt att göra en syntes av resultaten (vilket relaterats ovan) utan det är också möjligt att göra en lista över viktiga framgångsfaktorer för användningen av räknare i skolundervisningen. Här följer en sådan (ej uttömmande!) lista:

1. *Introducera räknarna tidigt i skolmatematiken.* Lämpligt är att starta redan i de tidiga åren med enkla räknare som används i speciella aktiviteter. Räknarna ska inte upplevas som något främmande och konstigt!
2. *Använd räknarna kontinuerligt över tid.* Från de senare åren i grundskolan bör eleverna ha tillgång till dem hela tiden, även när de arbetar med hemuppgifter. I gymnasieskolan är grafräknare obligatoriska på alla program, men internationellt introducerar man dem ofta i grundskolans senare år. Räknarna ska ses som naturliga verktyg i matematikundervisningen!
3. *Lägg ner ordentligt med tid på att utbilda eleverna i hur räknarna används.* Det fungerar inte att bara sätta räknarna i händerna på dem och hoppas att de på egen hand ska lista ut hur dessa ganska komplicerade verktyg fungerar. Det tidskapital man investerar får man alltid utdelning på i det långa loppet.
4. *Var noga med att förklara och visa räknarnas begränsningar.* Grafräknare arbetar enbart numeriskt och med ett visst antal värdesiffror. Detta gör att vissa beräkningar och vissa grafer kan bli ganska märkliga. Eleverna måste inse detta för att kunna bedöma de svar räknaren ger på ett kritiskt sätt. De symbolhanterande räknarna kan även arbeta algebraiskt/analytiskt, men även för dem finns begränsningar man måste vara uppmärksam på.
5. *Använd avancerade räknare för att visualisera och utforska matematiska objekt.* Detta är bland de viktigaste funktionerna hos dem och stöds av Duvals registermodell samt nämns särskilt av t.ex. Säljö.
6. *Använd räknare för problemlösning och i undersökande aktiviteter.* Med räknarnas hjälp kan man undersöka ett problem numeriskt, ställa hypoteser och testa dessa. Med hjälp av avancerade räknare kan även generella argument och hållbara bevis konstrueras.
7. *Koppla alltid samman räknaraktiviteter med matematikteori.* En lösryckt aktivitet glöms ofta snabbt av eleverna och bidrar väldigt lite till deras begreppsutveckling. Läraren måste se till att eleverna knyter samman den med ett korrekt matematiskt skrivsätt och med det matematikområde man arbetar med.
8. *Förändra matematikundervisningen så att den passar väl med räknarnas möjligheter.* Matematiken framställs ofta i läroböckerna så att den stämmer bäst med papper-och-penna-matematik. Såväl ordningen på momenten, introduktionen av nya begrepp som arbetssättet måste tas i övervägande.

9. *Bestäm även när räknarna inte ska användas.* Huvud- och överslagsräkning är av största vikt att träna, t.ex. för att kunna vara kritisk gentemot de svar som fås på räknarna. Men det måste också finnas matematiska grundfärdigheter utan räknare. Alla nationella prov innehåller ju sådana delprov.
10. *Arbeta med uppgifter som stärker elevernas positiva syn på matematiken.* Räknarna medger att man använder data från verkligheten (som ofta inte är så ”vackra”), och löser tämligen komplexa problem med dem. Man har också möjlighet att undersöka roliga problem, som t.ex. spelproblem med simuleringar etc.

## Referenser

- Bardini, C., Pierce, R.U. & Stacey, K. (2004). Teaching Linear functions in Context with Graphics Calculators: Students’ Responses and the Impact of the Approach on Their Use of Algebraic Symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2: 353-376.
- Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. & Sanchez, W. (2002). *Handheld graphing technology at the secondary level: Research findings and implications for classroom practice*. Dallas, Texas: Texas Instruments.
- Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. Doktorsavhandling. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61: 103-131.
- Ellington, A.J. (2003). A Meta-Analysis of the Effects of Calculators on Students’ Achievement and Attitude Levels in Precollege Mathematics Classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.34, No.5, 433-463.
- Heid, M.K. & Edwards, M.T. (2001). Computer Algebra Systems: Revolution or Retrofit for Today’s mathematics Classrooms. *Theory into Practice*, Vol.40, No.2: 128-136.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of CAS in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11: 205-263.
- Kulik, J.A. (2003). *Effects of using instructional technology in colleges and universities: What controlled evaluation studies say*. Hämtad 24 september 2007 från [http://www.sri.com/policy/csted/reports/sandt/it/Kulik\\_IT\\_in\\_colleges\\_and\\_universities.pdf](http://www.sri.com/policy/csted/reports/sandt/it/Kulik_IT_in_colleges_and_universities.pdf)
- Lagrange, J.B., Artigue, M., Laborde, C. & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. I A.J. Bishop m.fl., *Second International Handbook of Mathematics Education*, 237-269. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Reznichenko, N. (2007). *Learning with a Graphing Calculator (GC): GC as a cognitive tool*. Paper presenterad vid den årliga EERA-konferensen, Clearwater, FA, feb. 2007.
- Säljö, Roger (2005). *Lärande och kulturella redskap: om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Stockholm: Nordstedts.
- Thunberg, H. & Lingefjärd, T. (2006). Öppet brev till Skolverket: Avancerad räknare – hjälper eller stjälper? *Nämnan 33 (4)*, 10 – 13.