

Pärlor i Kombinatorisk Geometri

Paul Vaderlind, Matematiska institutionen, Stockholms Universitet

Kombinatorisk geometri är en av de mindre kända grenarna inom modern matematik. Å andra sidan är problem som betraktas i ämnet ofta lång ifrån nya. Betrakta till exempel det klassiska Newtons problem känt under namnet **Kyss-problemmet**:

Vilket är det största antalet enhetssfärer i $\mathbb{R}^3$ som samtidigt tangerar en given enhetssfär? Hur är det allmänna svaret i $\mathbb{R}^n$ för varje $n \geq 1$?

Den klassiska delen av kombinatorisk geometri handlar ofta om ömsesidigt förhållande mellan punkter och linjer i planet, punkter och plan i rummet osv. En klassisk frågeställning är **Separering av punkter i planet** med linjer eller andra kurvor, till exempel:

Givet är $2n+3$ punkter i planet ($n \geq 1$), sådana att inga tre ligger på en linje och inga fyra ligger på en cirkel. Visa att det alltid finns en cirkel C som passerar genom tre av de givna punkterna och separerar de övriga $2n$ punkter: n punkter finns på insidan av C och n på utsidan av C .

Ett annat populärt forskningsområde kan sammanfattas med namnet **Färgläggningsproblem**. Exempel på relativt enkla problem i detta sammanhang är:

a) Varje punkt på en cirkel färgas röd eller svart. Avgör om det säkert kommer att finnas tre punkter A , B , och C på cirkeln som är målade med samma färg och som är sådana att triangeln ABC är

- i) rätvinklig
- ii) liksidig
- iii) likbent

b) Antag att varje punkt i planet tilldelas en av två färger. Visa att man kan finna fyra punkter A , B , C och D som har tilldelats samma färg och som är sådana att $ABCD$ är en parallelogram.

Samtidigt är det i färgläggningsproblematiken nära till mycket svåra och, ofta, öppna frågeställningar. Ett sådant svårt problem är frågan om det **Kromatiska talet för planet (CNP)**:

a) Varje punkt i planet tilldelas en av *två* färger. Visa att det alltid kommer att finnas två punkter som tilldelades samma färg och som ligger på avstånd 1 från varandra.

b) Varje punkt i planet tilldelas en av *tre* färger. Visa att det alltid kommer att finnas två punkter som tilldelades samma färg och som ligger på avstånd 1 från varandra.

c) Till varje punkt i planet tilldelas en av *sju* färger. Visa att det kan göras på ett sådant sätt att det inte kommer att finnas två punkter som tilldelades samma färg och som ligger på avstånd 1 från varandra.

Den kanske mest kända satsen i Kombinatorisk geometri är den klassiska satsen av **Eduard Helly (1926)**:

Låt $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ vara en familj av konvexa delmängder till $\mathbb{R}^n$, ($k \geq n+1$), sådan att mängderna i varje delfamilj till $\mathbf{B}$ bestående av $n+1$ mängder har en icke-tom skärning (minst ett gemensamt element). Då är skärningen av alla mängder i $\mathbf{B}$ icke-tom.

För $n = 1$ låter satsen ganska trivialt:

Låt $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ vara en familj bestående av minst två konvexa mängder på linjen (alltså intervall), sådan att varje två av mängderna i $\mathbf{B}$ har en icke-tom skärning. Då är skärningen av alla mängder i $\mathbf{B}$ icke-tom.

Vi kommer att gå genom flera tillämpningar av denna sats. Därefter kommer det att nämnas flera andra överraskande (och förhoppningsvis lättbegripliga) resultat som

Isoperimetriska problemet (Vilken av alla plana figurer med omkrets 1 har den största arean?), **Mängder med konstant bredd**, **Borsuks förmodan**, mm.