

Matematikens storskaliga struktur

Johan Wild är lärare i matematik vid Europaskolan i Strängnäs.

Bakgrund

Under mitt första år som student läste jag uteslutande matematik. Läsåret inleddes med en kurs i algebra, på vilken en kurs i linjär algebra följde. Någonstans i slutet av läsåret fanns en kurs som tog upp transformer av olika slag. Jag har inga speciella minnen av föreläsningarna i den kursen, men jag minns mycket tydligt en lektion. De flesta kurser leddes av en kursansvarig lektor, medan doktorander fungerade som lärare i de olika lektionsgrupperna. Kursen om transformteori var inget undantag. Doktoranden var från Polen och pratade dålig engelska och än sämre svenska, men han gjorde sitt bästa.

Den aktuella lektionen, som inträffade tidigt i kursen, var nog egentligen vigd åt att ta fram Fourierserier med hjälp av ett verk där olika standardfunktioner fanns i tabeller. Lektionen blev lite krångligare eftersom lektionsledaren tillhörde den kategori människor som tyckte det var kul att fundera ut primitiva funktioner till alla tänkbara och otänkbara funktioner, och dessutom var mycket duktig på detta. Det utbröt lite förvirring i klassen eftersom vi inte riktigt hade hans färdighet i nämnda konst, och eftersom detta inte riktigt harmonierade med kursledarens tanke om att använda tabellen.

Rätt som det var fick jag en klar blixtnärhet från en mulen himmel, och insåg ett mycket viktigt samband. Jag insåg att Fourierkoefficienterna kan tolkas som koordinater i ett vektorrum som spänns upp av basfunktionerna $\sin kx$ och $\cos kx$ för alla positiva k . Jag berättade om min idé för några klasskamrater. Lektionsledaren, som befann sig i närheten, hörde och gav mig beröm. Tyvärr tror jag det dröjde ganska länge innan mina klasskamrater fick samma insikt.

De följande åren läste jag fysik och inriktade mig mot teoretisk fysik. Jag minns inte om jag någonsin fick anledning att tillämpa transformteori i sin transform-ur-tabell-skepnad. Däremot läste jag flera kurser i kvantmekanik där olika representationer naturligtvis dök upp. Jag följde också en kurs i funktionalanalys där olika rum med diverse egenskaper togs upp.

Jag blev själv forskarstuderande och läste ännu mer kvantmekanik och matematik. Ganska mycket av mitt yrkesverksamma liv kretsade nu kring basbyten i olika funktionsrum. Vid denna tid hade jag kollegor som hade en något mer tillämpad bakgrund. De undervisade bland annat i kretsteori, där transformteori uteslutande är en tillämpning av tabeller över standardfunktioner.

Dessa kollegor och min forne polske lektionsledare representerar två ytterligheter. Om du inte är insatt i transformteori kan situationen liknas med att ena gruppen endast betraktar derivatabegreppet som något man slår upp i en tabell, helt utan koppling till begreppet gränsvärde, medan andra gruppen skulle använda derivatans definition för att härleda derivatan av minsta lilla polynom i varje tillämpning.

Jag irriterade mig lite på att studenterna inte fick den insikt i till exempel *varför* just Fouriertransformen är så praktisk att använda i kretsteori. Studenternas praktiska förmåga var hämmad av att de inte fick den djupare insikten, men framför allt gick de ju miste om ett fantastiskt vackert stycke matematik!

Med tiden fastnade jag för undervisningen och blev gymnasielärare. Väl medveten om att många av de viktiga och vackra begreppen i matematiken inte skulle bli tillgängliga för speciellt många av mina elever, började jag fundera över hur jag skulle bära mig åt för att introducera dem redan på gymnasienivå. Det övergripande temat i min undervisning har sedan dess varit att försöka få eleverna att se de stora dragen i den matematiska teorin.

Den storskaliga strukturen

Kosmologi är en gren av fysiken där universums storskaliga struktur utforskas. Enskilda detaljer inuti galaxer är inte intressanta, galaxerna behandlas som dammkorn. Att studera kosmologi är att bege sig ut på en fantastisk resa i det storskaliga universum och dess utveckling från Big bang till tidens ände.

På motsvarande sätt finns en storskalig struktur i matematiken, vilket ger matematiken en av dess skönheter.

Ett litet exempel är likheterna i utvidgningen av heltal till rationella tal och vidare till reella tal å ena sidan, och utvidgningen från polynom till rationella funktioner och vidare till potensserier å den andra.

Ett mycket större och intressantare exempel är hur olika strukturer successivt införs på en mängd: metrik, vektoralgebra, norm och skalärprodukt. Exempel på mängder där dessa begrepp har en mer eller mindre naturlig tolkning är funktioner, koder och pannkakssmet. Inom ramen för detta är det lätt att introducera exempelvis fourierserier och att hitta tillämpningar inom kvantmekaniken. Tänk att det finns en motivering i matematiken till att ett fyllt elektronskal har just åtta elektroner!

Presentationen syftar till att visa hur detta stoff kan tas upp på gymnasiet. Det är inte bara förenligt med rådande kursplaner, utan kan dessutom knyta ihop kurserna på ett inspirerande sätt. Syftet är också att stimulera andra lärare att återupptäcka den högre matematiken.