

Porten till symbolisk matematik

Reza Hatami, fil-lic i matematikdidaktik, lärarutbildare i matematik från förskolan till gymnasieskolan; vid högskolan i Kalmar.

Håkan Lennerstad, docent i tillämpad matematik vid Blekinge Tekniska Högskola.

Inledning

Retorisk matematik har koppling till språk, matematisk argumentation och logik. Den kan därför vara stor hjälp vid introduktionen av krävande satser eller läsuppgifter som kräver komplicerade algoritmer. Genom att stegvis resonera sig fram kan man komma fram till de algoritmer som behövs för lösningen på komplicerade problem.

I en historisk analys kommer att förklaras hur Sverige under 450 år utvecklade sig från nästan noll i matematik till en mycket stark position (Fieldsmedaljen på 60-talet). Resonerande matematik anses vara hörnstenar i denna snabba utveckling.

Resan till symbolisk matematik via porten retorisk matematik

Det är emellertid lätt att det matematiska resonemanget försvinner både om man utnyttjar de algoritmer och om man använder sig av det kraftfulla abstrakta symbolspråket. Man hamnar i en *pedagogisk paradox*.¹ D.v.s. matematiklärandet som en process skapar ständigt pedagogiska paradoxer. Vi har å ena sidan algebrans symbolspråk med vilket vi på ett kompakt sätt kan uttrycka de flesta matematiska samband. Å andra sidan har vi den retoriska resonerande matematiken som ger upphov till en kraftfull kalkyl, algoritm eller regel - en vacker blomma i gränslandet till algebra. Men om man vill behålla den vackra blomman levande kan man inte ta bort rötter och stam. Då utrotar man hela trädet; något som har skett i skolmatematiken i Sverige.

I den retoriska matematiken används det vanliga språket när man löser matematiska problem. Man resonerar sig stegvis fram till lösningen i stället för att använda sig av en färdig algoritm eller en matematisk modell. En matematisk modell kan vara en ekvation som man sedan löser med hjälp av bestämda regler. Om vi säger att två kronor plus tre kronor är lika med fem kronor är resonemanget retoriskt. Om vi istället skriver $2k + 3k = 5k$ där k står för kronor är det synkoperat – en blandform. Ett mer abstrakt och därmed mer generellt skrivsätt är $2 + 3 = 5$ och vi kallar det symboliskt. Det symboliska skrivsättet gäller i alla sammanhang där vi vill beskriva det totala antalet element i föreningsmängden av två disjunkta mängder med två respektive tre element. I det symboliska resonemanget behövs bara kunskap om addition av de hela talen. Självfallet är det riktigt som A. N. Whitehead skriver

Matematikens visshet beror på dess totala abstrakta allmängiltighet.²

I den retoriska matematiken är den symboliska algebrans formelspråk underordnat, och resultaten härleds genom stegvisa resonemang. Den kan därför bidra till att tidigt skapa en grund för den mer avancerade matematiken med dess kraftfulla abstrakta symbolspråk. För

¹ Se s.3-4 i Uljens Michael, *Om hur människan blir människa bland människor. Om pedagogik och intersubjektivitet. Utbildning och Demokrati*.

² James R. Newman, *Sigma*, artikel av Alfred North Whitehead, *Matematiken som ett element i tänkandets historia*, s.358.

att nå den abstrakta nivå som kännetecknar formell matematik kan det vara naturligt att successivt införa resonemang som på ett naturligt sätt närmar sig symbolisk matematik.

De resonerande och argumenterande operationer som den retoriska matematiken kräver kan vara av stor betydelse för begreppsförståelsen. Den symboliska matematiken har ett janusansikte; å ena sidan det kraftfulla kompakta abstrakta språket som är en nödvändighet för matematikens utveckling, å andra sidan, om det introduceras för tidigt, kan studerande lätt förlora den matematiska begreppsförståelsen och förmågan att resonera.

Att skapa möjligheter för våra elever/studenter att förstå matematiska teorier är i sig en svår och krävande utmaning, både för oss och för dem. Det krävs mycket arbete som ibland är tålamodsprövande. När man upplever att man kommit fram till en förståelse så kompenserar emellertid känslan av tillfredsställelse mer än väl de besvärliga och ibland tråkiga delarna av arbetet. **Det är inte nödvändigt att motivera studiet av matematik med att framhålla att ”matematik är roligt”.** Att motivera elever till skapande och kreativ verksamhet som fordrar både fantasi och tålamod är en viktig uppgift för matematikläraren.

Matematikens historia kan användas för att ge de studerande ökad förståelse för abstrakta matematiska begrepp. Att filosofera över matematik relaterat till dess historia skapar nya dimensioner åt undervisning och lärande. Man förbisåg aritmetikens och geometrins roller i den historiska utvecklingen. De har både bromsat och varit utmaningar till algebrans och analysens utveckling och kanske också haft liknande betydelse för den enskilde elevens begreppsförståelse.

Att se matematiken enbart som en formaliserad vetenskap med ett kraftfullt symbolspråk, som är ett effektivt verktyg i olika tillämpningar, ger inte en rättvis bild av ämnet. Det kan liknas vid att lyssna till ett musikstycke enbart ur ett musikvetenskapligt perspektiv. I så fall har man missat den personliga upplevelsen. Genom att arbeta med retorisk matematik, något som ofta är mödosamt, kan elever/studenter även bättre tillgodogöra sig den abstrakta matematikens symbolspråk.

Exempel³ ”ett mal och tio jázr är lika med 39 dirhám”⁴

För mindre än 200 år löste man polynomekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ till lösningen $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Många som kommer från andra länder brukar använda sig av denna

formel medan vi brukar använda en annan formell i Sverige. Formeln $x = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$ bygger på ekvationen $x^2 + px + q = 0$. Varför gör vi så? Här nedan försöker jag ge en historisk tolkning. Det synliggör samtidigt porten till symbolisk matematik, som är den resonerande matematiken – i det här fallet kvadratkompletteringsmetoden. Följande är en ekvation från första boken i Algebra från 830 som är helt skriven retoriskt. Hans metod är **kvadratkomplettering** i dess ursprungliga geometriska betydelse. Xarázmi skriver att ppgiften handlar om arean av en kvadrat med obekant sida. Kvadratens area kallas för *mal*,

³ Se s.13-19 i Hatami, Från Al jábr till Ars magna, Växjö universitet, 1998.

⁴ *mal*:kapital (x^2), *Dirhám*: enhet för pengar och *Jázr*: rot (x) den obekanta som Xarázmi brukar kalla *shey*, en obestämd sak som går att ersättas med vilket/vilken som helst, på så sätt är ordet ”något” en bättre och mer exakt översättning av ”shey” på spanska *Xëi*. Och härifrån bokstaven x som obekant..

Professor L.C. Karpinski skriver: ”ekvationen $x^2 + 10x = 39$ löper som en gyllene tråd genom flera århundradens algebra.” Se s.76 i Struik, Matematikens historia, Köthem, 1996

medan dess sida kallas *jáẓr*. Han ritar en kvadrat med area x^2 (= mal) sedan delar han 10 med 2, därefter bygger han ut på kvadratens höger och nedan sidorna två rektanglar, vilkas area tillsammans är tio *jáẓr* (=10*x*). Vi översätter hans retoriska lösning till vårt algebraiska språk. (i föreläsningen visas bilder).

Vi kan skriva med modernt språk:

$$x^2 + 10x = 39.$$

x^2 den ursprungliga kvadraten

$$\frac{10}{2} = 5$$

$2 \cdot (5x)$ de två rektanglarna

$5^2 = 25$ högra hörnkvadraten

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

ursprungliga kvadraten plus de två rektanglarna samt plus hörnkvadraten som tillsammans bildar en ny kvadrat som bildas via den komplettering av ursprungliga kvadraten och de två hörnrektanglarna (vänster leden av ekvationen)

$(x + 5)^2 = 64$ den kompletterade kvadraten

$$x + 5 = 8$$

$x = 3$ sidan i den ursprungliga kvadraten.

Dagens lösningsmetod är identisk med Xarázmis metod, fast den brukar vara algebraisk och inte geometrisk. Byt 10 och 39 mot p och $-q$, så kan vi generalisera Xarázmis metod.

Matematikdidaktikens historia i Sverige

I en lärobokanalys från 1600-talet till början av 1900-talet beträffande reguladetri grupperade jag författarna i tre traditioner,⁵ vilka två av dem kan placeras i matematikdidaktikens historia i Sverige.

Den tradition⁶ som Biörk inleder genom att använda proportionalitet fortsätts av Celsius, Beckmarck och Forsell och senare av Björling och Zweigbergk. Hans lärobok är utmärkt både ur ett matematisk och ur ett pedagogiskt perspektiv. Den har ett stort antal övningsuppgifter. I Zweigbergks framställning betonas både förståelsen och den mekaniska färdigheten. Detta måste enligt min mening vara en av anledningarna till att hans lärobok kom att vara efterfrågad under en så lång tid och ges ut i ett så stort antal exemplar.⁷

Anders Celsius undervisade i Anders Gabriel Duhres⁸ skola och för denna skola skrev han sin lärobok *Arithmetica eller räknekonst* (1727), som sedan länge användes i

⁵ Se s.185-198 i Hatami, Reguladetri, Växjö universitet, 2007.

⁶ Framställningen i hans lärobok från 1643 passade inte den tiden med dess behov av konkreta räkneregler. Förståelsen av reglerna kommer i centrum och inte skickligheten i att använda dem.

⁷ Med 35 upplagor mellan 1839-1920 och med 9 upplagor i Finland 1856-1878. Observera att han dog 1862.

⁸ Anders Gabriel Duhre (1680–1739), den första svenska moderna matematikern som höll utmärkta föreläsningar i matematik på svenska i Stockholm 1717–1723. Pedagog och jordbruksreformator under den tidiga frihetstiden. Se Rodhe Staffan, *Matematikens utveckling i Sverige fram till 1731*, Uppsala, 2002, s.50–54. Svenskt Biografiskt Lexikon (SBL), band 11, s.506.

matematikundervisningen vid landets gymnasier.⁹ Duhre var också pedagog och jordbruksreformsreformator under den tidiga frihetstiden. Forsell fortsatte den matematiska och pedagogiska tradition som startades med Biörk och som Celsius förde vidare till Beckmarck. Forsell hade inflytande inom olika områden av samhället som skolan, kyrkan, och politiken. Hos Forsell sätts förståelse och självständighet för elevens lärande i centrum. Ingen utantillläxa fick ges till elever om inte innehållet förklarats. Vi ser en tydlig kontinuitet från Celsius via Beckmarck och Forsell till Zweigbergk samt E. G. Björling. Forsell dog 1838. Första upplagan av Zweigbergks lärobok trycktes året efter. Samhällets politiska omständigheter är helt nya. Demokratiseringen tar fart. Eleverna behöver inte kunna bara använda regler utan nu måste de förstå varför de fungerar. De måste lära sig vara självständiga medborgare som passar in i det nya samhället.

Några exempel från i algebra och analys kommer att delas ut vid föreläsningen.

⁹ Svenskt biografiskt lexikon (SBL), s.266–267.